

13. cvičení z PSt — 15.5.2025

Bodové odhady

- Zkoumáme posloupnost n.n.v. se stejným rozdělením, např. $Geom(\theta)$, $U(0, \theta)$, kde θ je parametr.
- Zapisujeme $X_1, \dots, X_n \sim F_\theta$, tzv. **náhodný výběr** z F_θ (model s parametrem).
- Naměříme $X_1 = x_1, \dots$, chceme odhadnout θ .
- $\hat{\theta}_n$... nějaká metoda jak odhadnout θ pomocí naměřených dat (hodnot $X_1, \dots, X_n$), angl. *estimator*
- $m_r(\theta) = \mathbb{E}(X^r)$ pro $X \sim F_\theta$... **r -tý moment**, ideální vlastnost rozdělení
- $\hat{m}_r(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r$... **r -tý výběrový moment**, náhodná veličina, funkce našeho naměřeného vzorku (tj. statistika)
- **Odhad metodou momentů** vyřešíme rovnici $m_1(\theta) = \hat{m}_1(\theta)$ pro neznámou θ .
- event. soustavu rovnic $m_r(\theta) = \hat{m}_r(\theta)$ pro $r = 1, 2, \dots$ podle potřeby.
- $L(\theta; x_1, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1 \& \dots \& X_n = x_n)$... pravd. pozorovaných dat závislá na parametru θ .
- nebo $L(\dots) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$... hustota pravděpodobnosti ...
- $\ell(\theta; x_1, \dots, x_n) = \log L(\dots)$... pro snazší výpočty.
- **Odhad metodou maximální věrohodnosti (Maximal Likelihood)** hledáme θ , pro které je maximální $L(\theta; x_1, \dots, x_n)$, resp. $\ell(\dots)$. Obvykle pomocí derivací funkce L , resp. ℓ .
- **bias (vychýlení):** $\mathbb{E}(\hat{\theta}_n - \theta)$... θ skutečný parametr, $\hat{\theta}_n$ náš odhad (náhodná veličina, protože závisí na naměřených datech)
- odhad je **nevychýlený/nestranný/unbiased**: $bias = 0$
- odhad je **asymptoticky nevychýlený**: $bias$ konverguje k 0, neboli $\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) \rightarrow \theta$
- odhad je **konzistentní**: $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$: pro všechna $\varepsilon > 0$ $P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) \rightarrow 0$
- **MSE (mean square error, střední kvadratická odchylka):** $\mathbb{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2)$
- Věta: $MSE = bias^2 + \text{var}(\hat{\theta}_n)$.

Pro praktickou ukázkou, viz pythonový notebook na webu přednášky <https://iuuk.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/PSt1/>.

1. Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim U(0, \theta)$.
 - (a) Navrhněte bodový odhad θ momentovou metodou.
 - (b) Navrhněte bodový odhad θ metodou maximální věrohodnosti.
 - (c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.
 - (d) Pro každý z nich spočítejte střední kvadratickou odchylku (MSE). (Stačí experimentálně na počítači.)
 - (e) Který odhad je lepší? Napadá vás nějaký ještě lepší?
2. Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim Geom(p)$.
 - (a) Navrhněte bodový odhad p momentovou metodou.
 - (b) Navrhněte bodový odhad p metodou maximální věrohodnosti.
 - (c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.

Intervalové odhady

Čebyševova nerovnost: $P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t\sigma_X) \leq \frac{1}{t^2}$.

Distribuční funkce standardního normálního rozdělení $N(0, 1)$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\Phi(x)$	0.00003	0.00135	0.02275	0.15866	0.500000	0.84135	0.97725	0.99865	0.99997

Inverz distribuční funkce Studentových rozdělení a standardního normálního rozdělení:

p	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
$\Psi_1^{-1}(p)$	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
$\Psi_2^{-1}(p)$	1.89	2.92	4.3	6.96	9.92
$\Psi_4^{-1}(p)$	1.53	2.13	2.78	3.75	4.6
$\Psi_8^{-1}(p)$	1.4	1.86	2.31	2.9	3.36
$\Psi_{20}^{-1}(p)$	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85
$\Psi_{30}^{-1}(p)$	1.31	1.7	2.04	2.46	2.75
$\Phi^{-1}(p)$	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

3. Máme jedno měření $X \sim N(\mu, 1)$. (Tj. parametr $\theta = \mu$.)

- (a) Najděte intervalový odhad pro μ se spolehlivostí 95 %. (Pro konkrétnost: naměřili jsme $x = 2.9$.)
- (b) Místo jednoho měření jich provedeme n (pochopitelně nezávislých). Jaký bude teď intervalový odhad pro μ ? Pro konkrétnost: naměřili jsme $x_1, \dots, x_9 = 1.82, 1.00, 2.50, 3.00, 0.50, 2.97, 1.76, 1.35, 3.41$.
- (c) Nechť X má stále střední hodnotu μ a rozptyl 1, ale není už nutně normální. Co se změní?

4. Nechť $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ popisuje dráhu, kterou uletí radioaktivní částice, nechť se rozpadne. Náš přístroj její rozpad (a polohu rozpadu, tj. hodnotu X) zachytí, ale jen pokud $1 \leq X \leq 2$. Formálně, budeme zkoumat náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim F_{X|B}$ pro jev $B = 1 \leq X \leq 2$.

- (a) Navrhněte bodový odhad λ momentovou metodou.
- (b) Navrhněte bodový odhad λ metodou maximální věrohodnosti.
- (c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.

5. Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim \text{Pois}(\lambda)$.

- (a) Navrhněte bodový odhad λ momentovou metodou.
- (b) Navrhněte bodový odhad λ metodou maximální věrohodnosti.
- (c) Spočítejte střední kvadratickou odchylku (MSE).

Testování hypotéz

6. (Všimněte si podobnosti a rozdílu oproti příkladům na intervalový odhad.) Máme jedno měření $X \sim N(\mu, 1)$. Chceme ověřit hypotézu $H_0: \mu = 5$ s hladinou významnosti $\alpha = 5\%$.

- (a) Jaký zvolíme kritický obor – množinu měření, ve které hypotézu zamítneme? (Co řekneme, pokud jsme naměřili $x = 6$?)
- (b) Místo jednoho měření jich provedeme n (pochopitelně nezávislých). Jaký bude kritický obor pro $\bar{X}_n$? (Co řekneme, pokud jsme naměřili 6.5, 6, 5, 4.8, 5.5?)
- (c) Pokud je ve skutečnosti $\mu = 4$ a máme $n = 10$ měření, jaká je pravděpodobnost, že hypotézu nezamítneme?
- (d) Nechť X má stále střední hodnotu μ a rozptyl 1, ale není už nutně normální. Co se změní?
- (e) Co když nevíme nic o rozptylu X ?

7. Podle slibu výrobce bude jeho stroj dělat chyby nejvýše ve 3 % případů. Z 600 pokusů došlo k chybě v 28 případech. Posuďte slib výrobce (coby nulovou hypotézu) na hladině významnosti 5 %.

- (a) Počet chyb modelujte přesně, tj. pomocí binomického rozdělení.
- (b) Počet chyb modelujte přibližně pomocí normálního rozdělení (s vhodným μ, σ^2).