KG1 Jiří Kalvoda: Zápočtový test

Tahák

- $n^{n/2} \le n! \le n^n$ $\qquad$ $e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le en\left(\frac{n}{e}\right)^n$
- $\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le \left(\frac{en}{k}\right)^k$
- $\frac{2^{2m}}{2m+1} \le \binom{2m}{m} \le 2^{2m}$ $\qquad$ $\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \le \binom{2m}{m} \le \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}$

Vytvořující funkce pro posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ *je mocninná řada* $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$. *Je obecně známo, že* $\frac{1}{1-x}$ *je vytvořující funkce pro* $1, 1, 1 \dots$.

Základní úpravy:

$f(x) + g(x)$	$a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots$
$cf(x)$	$ca_0, ca_1, ca_2, \dots, ca_n, \dots$
$xf(x)$	$0, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \dots$
$\frac{f(x)-a_0}{x}$	$a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, \dots$
$f(x^2)$	$a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, 0, \dots$
$f(cx)$	$a_0, ca_1, c^2a_2, c^3a_3, \dots, c^na_n, \dots$
$f(x)g(x)$	$a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \dots, \sum_{0\le i\le n} a_ib_{n-i}, \dots$

n*-té catalanovo číslo* C_n *je definováno jako počet binárních stromů (tj. zakořeněných stromů složených buď z listů, nebo z vnitřních vrcholů mající právě levého a pravého potomka) s právě* n *vnitřními vrcholy. Na přednášce bylo ukázáno, že tato čísla splňují rekurenci* $C_n = \sum_{0\le i<n} C_iC_{n-1-i}$ *a pomocí vytvořujících funkcí bylo ukázáno, že* $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

1 Vytvořující funkce

Najděte explicitní vzorec pro n-tý člen posloupností určené následující vytvořující funkcí:

$$f(x) = \frac{7}{x+4} - \frac{4}{2x-3}$$

Vzorečky nad rámec taháku v zadání této písemky odůvodněte.

2 Závorky

Spočítejte (explicitní vzorec) počet validních uzávorkování obsahujících m párů kulatých a n párů hranatých závorek.

Např. pro $m = 2$ a $n = 1$ máme následujících 15 možností: `([()])`, `([])()`, `(())[]`, `()[()]`, `[()()]`, `(([]))`, `()[]()`, `()()[]`, `(()[])`, `[()]()`, `()([])`, `([]())`, `[]()()`, `[(())]`, `[](())`.

3 Porovnání

Čeho je více (pro dostatečně velké n): Všech permutací $2n$ prvků nebo všech funkcí $[2n]$ do $[n]$? Výsledek odůvodněte.