KG1 Jiří Kalvoda: Cvičení 9

Informace k cvičení jsou na https://kam.mff.cuni.cz/~jirikalvoda/vyuka/24z/kg1.

Párování v grafu G je podmnožina hran taková, že žádně dvě nesdílí společný vrchol.

1 Hallova věta

Připomeňme grafovou verzi Hallovy věty: V bipartitním grafu G s partitami A a B existuje párování velikosti $|A|$, právě když pro každou množinu $X \subseteq A$ platí $|N(X)| \geq |X|$.

Také můžete předpokládat, že platí aktuálně zadaný domácí úkol:

> Do mateřské školky přišel Mikuláš s velkým pytlem hraček. Každé dítě ukázalo na deset hraček, které se mu líbí. Ukázalo se, že každá hračka se líbí nejvýše pěti dětem. Ukažte, že je možné každému dítěti dát jako dárek dvě hračky, které se mu líbí.

a) Nechť $G = (V, E)$ je graf. Předpokládejme, že pro každý podgraf H grafu G platí $|E(H)| \leq |V(H)|$ Ukažte, že je možné hrany G nahradit orientovanými hranami tak, že do každého vrcholu bude vstupovat nejvýš jedna hrana.

b) Nechť $G = (V, E)$ je graf. Předpokládejme, že pro každý podgraf H grafu G platí $|E(H)| \leq 10|V(H)|$. Ukažte, že je možné hrany G nahradit orientovanými hranami tak, že do každého vrcholu bude vstupovat nejvýš deset hran.

c) Mějme dvě přirozená čísla $k \leq n$. Pojmem latinský obdélník tvaru $k \times n$ označujeme matici s k řádky a n sloupci vyplněnou čísly $1, \ldots, n$ tak, že v každém řádku se každé číslo vyskytuje právě jednou a v každém sloupci se každé číslo vyskytuje nejvýš jednou. Dokažte, že pokud $k < n$, tak ke každému latinskému obdélníku tvaru $k \times n$ lze přidat $n - k$ řádků tak, aby vznikl latinský obdélník tvaru $n \times n$, neboli latinský čtverec.

2 Hranová souvislost grafů

Připomeňme, že hranová souvislost grafu G, značená $k_e(G)$, je největší číslo k takové, že G je hranově k-souvislý, nebo ekvivalentně, $k_e(G)$ je velikost nejmenšího hranového řezu v grafu G.

Mengerova věta: graf je hranově k-souvislý, právě když mezi každými dvěma různými vrcholy existuje k hranově disjunktních cest.

a) Čemu je rovno $k_e(K_n)$ – tj. úplný graf? Čemu je rovno $k_e(K_{m,n})$ – tj. úplný bipartitní graf?

b) Nechť G je graf, jehož každý vrchol má stupeň právě d. Co lze říci o hodnotě $k_e(G)$?

c) Nechť $G = (V, E)$ je graf, jehož hranová souvislost je rovna k. Předpokládejme, že vytvoříme nový graf G^+ tak, že ke grafu G přidáme nový vrchol z a spojíme ho hranami s nějakými k různými vrcholy $y_1, \ldots, y_k$ grafu G. Co lze říci o hranové souvislosti grafu G^+?

d) Nechť G je hranově k-souvislý graf. Zvolme v něm $k+1$ různých vrcholů $u, v_1, v_2, \ldots, v_k$. Dokažte, že G obsahuje k hranově disjunktních cest $P_1, \ldots, P_k$, kde cesta P_i spojuje vrchol u s vrcholem v_i.

3 Vrcholová souvislost grafů

Vrcholová souvislost, značená $k_v(G)$, je největší k takové, že graf G je vrcholově k-souvislý. Pro neúplný graf G je $k_v(G)$ rovno velikosti nejmenšího vrcholového řezu a pro K_n máme $k_v(K_n) = n - 1$.

Mengerova věta: graf je vrcholově k-souvislý, právě když mezi každými dvěma různými vrcholy existuje k vnitřně vrcholově disjunktních cest.

a) Existuje graf G, pro nějž je $k_v(G) < k_e(G)$?

b) A co $k_v(G) > k_e(G)$?

c) Může být rozdíl $|k_v(G) - k_e(G)|$ libovolně velký?

d) Nechť G je graf, jehož každý vrchol má stupeň nejvýš 3. Plyne z toho, že $k_e(G) = k_v(G)$?

e) Nechť G je vrcholově k-souvislý graf. Zvolme v něm $k+1$ různých vrcholů $u, v_1, v_2, \ldots, v_k$. Rozhodněte, jestli G musí obsahovat k vrcholově disjunktních cest $P_1, \ldots, P_k$, kde cesta P_i spojuje vrchol u s vrcholem v_i.