KG1 Jiří Kalvoda: Cvičení 7

Informace k cvičení jsou na https://kam.mff.cuni.cz/~jirikalvoda/vyuka/24z/kg1.

1 Projektivní roviny

Připomeňme, že projektivní rovina byla definovaná jako hypergraf $(X, \mathcal{P})$ splňující trojici axiomů:

1. *Pro každé dva různé vrcholy $x, y \in X$ existuje právě jedna hyperhrana $p \in \mathcal{P}$, která je oba obsahuje.*
2. *Pro každé dvě různé hyperhrany $p, q \in \mathcal{P}$ platí $|p \cap q| = 1$.*
3. *Existuje čtyřprvková množina vrcholů C, jejíž žádné tři vrcholy neleží ve společné hyperhraně.*

1.1 Konstrukce

Nechť p je prvočíslo a $[p] = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Uvažme množinu trojic $[p]^3 - \{(0,0,0)\}$. Na této množině zavedeme ekvivalenci $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$ právě tehdy když existuje $\alpha \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ takové, že:

$$x_1 \equiv \alpha \cdot x_2 \qquad y_1 \equiv \alpha \cdot y_2 \qquad z_1 \equiv \alpha \cdot z_2 \qquad \pmod{p}.$$

Množinu všech tříd ekvivalence $\sim$ ozmačíme X.

Definujeme $\mathcal{P} = \{\{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in [p]^3, ax + by + cz \equiv 0 \pmod{p}\} \mid (a,b,c) \in [p]^3 - \{(0,0,0)\}\}$.

a) Ověřte, že $\sim$ je skutečně relace ekivalence.

b) Ověřte, že $(X, \mathcal{P})$ je projektivní rovina. Nejprve nahlédněte, že vnitřní množina v definici $\mathcal{P}$ se skládá vždy z celých tříd ekivalence $\sim$. Dále si rozyslete, že pro různá a, b, c ze stejne třídy ekvivalence $\sim$ dosteneme stejnou množinu bodů (tedy pro jednu třídu ekvivalence máme jen jednu přímku). Nakonec ověřte axiomy projektivní roviny.

1.2 Aplikace

Ukažte, že existuje graf s nejvýše n vrcholy s alespoň $\Omega(n^{3/2})$ hranami, který neobsahuje cyklus na čtyřech vrcholech.

2 Toky

Toková síť (V, E, z, s, c) *je uspořádaná 5-tice, kde* (V, E) *je orientovaný graf,* z *je zdroj,* s *je stok a* $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ *je funkce kapacit hran.*

Tok v této síti je $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ *tž:*

1. $\forall e \in E : f(e) \leq c(e)$
2. $\forall x \in V - \{z, s\} : f[\mathrm{In}(x)] = f[\mathrm{Out}(x)]$.

Velikost toku je $f[\mathrm{Out}(z)] - f[\mathrm{In}(z)] = f[\mathrm{In}(s)] - f[\mathrm{Out}(s)]$.

Řez R *v takovéto síti je podmnožina* $R \subseteq E$ *tž. v grafu* $(V, E - R)$ *neexistuje orientovaná cesta ze* z *do* s.

Zlepšující cesta pro tok f *je taková cesta ze* z *do* s *složená z dopředných i zpětných hran taková, že pro každou dopřednou* e *na ní platí* $f(e) < c(e)$ *a zpětnou* e' *platí* $f(e') > 0$.

Párování v grafu G *je podmnožina hran taková, že žádně dvě nesdílí společný vrchol.*

Vrcholové pokrytí v grafu G *je podmnožina vrcholů taková, že pro každou hranu* G *platí, že obsahuje alespoň jeden vrchol pokrytí.*

2.1 Lemátka

Dokažte/nahlédněte následujíci lemátka, které jste na přednášce používali bez důkazu:

a) Tok, který má zlepšující cestu, není maximální.
b) Pokud M je párování a C je vrcholové pokrytí v nějakém grafu, tak $|M| \leq |C|$.

2.2 Algoritmické aplikace toků

Ukažte, jak lze následující úlohy efektivně, tj. v polynomiálním čase, vyřešit (například převedením na standardní úlohu pro nalezení největšího toku v síti).

a) Máme dánu tokovou síť (V, E, z, s, c), cílem je najít její minimální zs-řez.
b) Máme dánu tokovou síť, kde ovšem místo jednoho spotřebiče s je několik spotřebičů $s_1, s_2, \ldots, s_k$ a jeden zdroj z. Rozdíl oproti běžné síti je jen v tom, že pro žádný z vrcholů $z, s_1, s_2, \ldots, s_k$ nepožadujeme, aby se v nich zachovával tok. Cílem je najít maximální tok v této síti. (Velikost toku definujeme obvyklým způsobem, tedy jako rozdíl mezi tím, co vytéká ze zdroje, a tím, co do zdroje přitéká.)
c) Máme dánu tokovou síť (V, E, z, s, c) a hranu $e \in E$, cílem je najít tok f (ne nutně maximální) takový, že $f(e)$ je co největší.
d) Máme dánu matici M, jejíž prvky jsou nuly a jedničky. Cílem je najít v M co největší množinu jedniček takových, že žádné dvě nejsou ve stejném řádku ani ve stejném sloupci.