KG1 Jiří Kalvoda: Cvičení 5

Informace k cvičení jsou na https://kam.mff.cuni.cz/~jirikalvoda/vyuka/24z/kg1.

Příští týden se cvičení nekoná, je děkanský sportovní den.

1 Catalanova čísla

Z přednášky: n-té catalanovo číslo C_n je definováno jako počet binárních stromů (tj. zakořeněných stromů složených buď z listů, nebo z vnitřních vrcholů mající právě levého a pravého potomka) s právě n vnitřními vrcholy. Na přednášce bylo ukázáno, že tato čísla splňují rekurenci $C_n = \sum_{0\le i<n} C_i C_{n-1-i}$ a pomocí vytvořujících funkcí bylo ukázáno, že $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

1.1 Catalanovské objekty

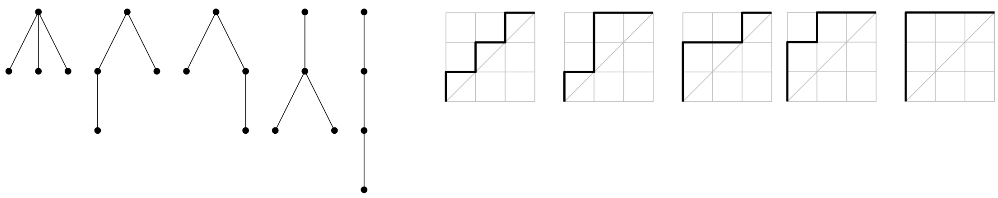
Určete počet:

a) Zakořeněných stromů s n hranami, kde každý vrchol může mít libovolný počet potomků, a potomci daného vrcholu mají určené pořadí zleva doprava. (Příklad pro $n = 3$ je v levé části obrázku.)

b) Procházky v mřížce $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ z bodu $(0, 0)$ do bodu (n, n) takové, že v každém kroku se posuneme buď o jednu jednotku nahoru nebo o jednu jednotku doprava, a zároveň nesmíme nikdy sestoupit pod přímku danou rovnicí $x = y$. (Příklad pro $n = 3$ je v pravé části obrázku.)

Každou z předešlých úloh můžete ukázat:

1) buď pomocí rekurzivního vzorečku,
2) nebo pomocí bijekce na jiné objekty, jejichž počet už znáte.



1.2 Alternativní odvození vzorečku pro C_n

Vyřešme část b) předchozího příkladu kombinatorickou úvahou. V tomto příkladu slovem *procházka* označme libovolnou cestu v $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, která začíná v bodě $(0, 0)$ a v každém kroku se posune o jedna doprava nebo o jedna nahoru. Řekneme, že procházka je dobrá, pokud nikdy nesestoupí pod přímku $x = y$, jinak je špatná.

a) Kolik existuje všech procházek (dobrých i špatných) končících v bodě $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

b) Dokažte pomocí vhodné bijekce, že počet všech procházek končících v bodě $(n + 1, n - 1)$ je stejný, jako počet špatných procházek končících v bodě (n, n).

c) Odvoďte z toho, že počet dobrých procházek končících v bodě (n, n) je $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

2 Projektivní roviny

Připomeňme, že projektivní rovina byla definovaná jako hypergraf $(X, \mathcal{P})$ splňující trojici axiomů:

1. *Pro každé dva různé vrcholy $x, y \in X$ existuje právě jedna hyperhrana $p \in \mathcal{P}$, která je oba obsahuje.*
2. *Pro každé dvě různé hyperhrany $p, q \in \mathcal{P}$ platí $|p \cap q| = 1$.*
3. *Existuje čtyřprvková množina vrcholů , jejíž žádné tři vrcholy neleží ve společné hyperhraně.*

2.1 Alternativní axiomatizace

Ukažte, že axiom 3 lze nahradit axiomem: Existují dvě různé přímky p, q z $\mathcal{P}$, z nichž každá obsahuje alespoň tři různé body.

2.2 Konstrukce

Nechť p je prvočíslo a $[p] = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Uvažme množinu trojic $[p]^3 - \{(0,0,0)\}$. Na této množině zavedeme ekvivalenci $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$ právě tehdy když existuje $\alpha \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ takové, že:

$$x_1 \equiv \alpha \cdot x_2 \qquad y_1 \equiv \alpha \cdot y_2 \qquad z_1 \equiv \alpha \cdot z_2 \qquad \pmod{p}.$$

Množinu všech tříd ekvivalence $\sim$ ozmačíme X.

Definujeme $\mathcal{P} = \{\{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in [p]^3, ax + by + cz \equiv 0 \pmod{p}\} \mid (a, b, c) \in [p]^3 - \{(0, 0, 0)\}\}$.

a) Ověřte, že $\sim$ je skutečně relace ekivalence.

b) Ověřte, že $(X, \mathcal{P})$ je projektivní rovina. Nejprve nahlédněte, že vnitřní množina v definici $\mathcal{P}$ se skládá vždy z celých tříd ekivalence $\sim$. Dále si rozyslete, že pro různá a, b, c ze stejne třídy ekvivalence $\sim$ dosteneme stejnou množinu bodů (tedy pro jednu třídu ekvivalence máme jen jednu přímku). Nakonec ověřte axiomy projektivní roviny.

2.3 Nekonečné projektivní roviny

a) Nechť X je množina všech (euklidovských) přímek v $\mathbb{R}^3$ procházejících počátkem. Pro takovou přímku $x \in X$ definujme množinu přímek $P_{\perp x} = y \in X; y \perp x$ a označme $\mathcal{P} = \{P_{\perp x} \mid x \in X\}$ systém všech takovýchto množin. Dokažte, že $(X, \mathcal{P})$ je projektivní rovina.

b) Nahlédněte, že tato konstrukce je ekvivalentní s následují konstrukcí: Vezmeme rovinu $\mathbb{R}^2$ s jejími body a přímkami. K nim doplníme pro každou množinu rovnoběžných přímek **jeden** bod „v nekonečnu“, kde se protínají. A pak všemi body v nekonečnu protáhneme ještě jednu přímku.