KG1 Jiří Kalvoda: Cvičení 4 (Vytvoř. fce)

Informace k cvičení jsou na https://kam.mff.cuni.cz/~jirikalvoda/vyuka/24z/kg1.

Vytvořující funkce pro posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ je mocninná řada $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$.

Zobecněné kombinační číslo ($r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$): $\binom{r}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ Zobecněná binomická věta: $(1+x)^r = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} x^k$. Důsledek: $\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_n \binom{m+n-1}{m-1} x^n$.

Vytvořující funkce posloupnosti samých jedniček je $\frac{1}{1-x}$.

Základní úpravy:

$f(x) + g(x)$	$a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots$
$cf(x)$	$ca_0, ca_1, ca_2, \ldots, ca_n, \ldots$
$xf(x)$	$0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \ldots$
$\frac{f(x)-a_0}{x}$	$a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}, \ldots$
$f(x^2)$	$a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, 0, \ldots$
$f(cx)$	$a_0, ca_1, c^2a_2, c^3a_3, \ldots, c^na_n, \ldots$
$f(x)g(x)$	$a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \ldots, \sum_{0\leq i\leq n} a_ib_{n-i}, \ldots$

1 Vytvořujíci funkce posloupností

Najděte vytvořující funkci následujících posloupností:

a) $1, 2, 3, 4, \ldots, n+1, \ldots$
   1) pomocí konvoluce
   2) pomocí derivace
   3) pomocí zobecněné binomické věty

b) $\binom{p}{p}, \binom{p+1}{p}, \ldots, \binom{p+n}{p} \ldots$

2 Explicitní vzorec

Najděte explicitní vzorec pro n-tý člen posloupností určených následujícími vytvořujícími funkcemi:

a) $\frac{a}{b-cx}$ pro $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$

b) $\frac{3x+7}{(x+2)(x+3)}$

c) $\frac{20x+16}{2x^2-x-6}$

d) $\frac{2x^2+7x-4}{x^2-1}$

e) $\frac{1+2x}{x^2+6x+9}$

Pro matematické úpravy a jiné podúlohy klidně použijte vhodné nástroje.

Obecný postup: jmenovatele rozdělíme na dvojčleny, rozložíme na parciální zlomky a pro každý z nich najdeme vytvořující funkci.

3 Kombinatoricky definované VF

Najděte vzorce v uzavřeném tvaru (tedy bez nekonečných sum) pro vytvořující funkce následujících posloupností.

a) Posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, kde b_n označuje počet způsobů, jak lze číslo n zapsat jako součet libovolného počtu lichých přirozených čísel (na pořadí sčítanců opět záleží). Například $b_4 = 3$, neboť číslo 4 lze zapsat těmito součty: $1 + 3, 3 + 1, 1 + 1 + 1 + 1$.

b) Posloupnost $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, kde c_n označuje počet způsobů, jak lze číslo n zapsat jako součet jedniček a dvojek (na pořadí sčítanců záleží). Například $c_4 = 5$, neboť číslo 4 lze zapsat těmito součty: $1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 2 + 1, 2 + 1 + 1, 2 + 2$.

4 Dokazování rovností

Pro posloupnosti b_n a c_n z předchozího příkladu platí, že pro každé $n \geq 0$ je c_n rovno b_{n+1} .

a) Dokažte to pomocí vytvořujících funkcí.

b) Dokažte to kombinatorickou úvahou.

5 Vytvořující funkce polynomů

a) Nechť d je přirozené číslo a nechť $P(x)$ je polynom stupně menšího než d. Uvažme funkci $f(x) = \frac{P(x)}{(1-x)^d}$. Ukažte, že $f(x)$ je vytvořující funkce pro posloupnost $q(0), q(1), q(2), q(3), \ldots$, kde $q(n)$ je nějaký polynom v proměnné n stupně menšího než d. (Zdá-li se vám to těžké, rozmyslete nejdřív případy $d = 1$ a $d = 2$.)

b) Rozmyslete, zda platí i opačné tvrzení, tedy že když $q(n)$ je polynom stupně menšího než d, tak posloupnost $q(0), q(1), q(2), \ldots$ má nutně vytvořující funkci tvaru $\frac{P(x)}{(1-x)^d}$, kde $P(x)$ je nějaký polynom stupně menšího než d.

c) Předpokládejme, že $q(n)$ je polynom stupně $s \in N_0$. Ukažte, že existuje polynom $r(n)$ stupně $s + 1$ takový, že pro každé $n \in N_0$ platí $r(n) = q(0) + q(1) + q(2) + \cdots + q(n)$. (I zde můžete začít s případy, kdy s je nějaké malé číslo)