KG1 Jiří Kalvoda: Cvičení 3 (Vytvoř. fce)

Informace k cvičení jsou na https://kam.mff.cuni.cz/~jirikalvoda/vyuka/24z/kg1.

Vytvořující funkce pro posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ je mocninná řada $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$.

Postup výroby VF z rekurzivně zadané posloupnosti.

- začneme s rovností $a_nx^n =$ (rekurzivní výraz)x^n.
- sečteme pro všechna přípustná n: $\sum_{n \geq n_0} a_nx^n = \sum_{n \geq n_0}(\text{rek. v.})x^n$.
- upravujeme a všechny nekonečné sumy nahradíme za $f(x)$.
- vyřešíme rovnici, kde neznámá je $f(x)$.

Zobecněné kombinační číslo ($r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$): $\binom{r}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ Zobecněná binomická věta: $(1+x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k$. Důsledek: $\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_n \binom{m+n-1}{m-1} x^n$.

1 Vytvořujíci funkce posloupností

Najděte vytvořující funkci následujících posloupností:

a) $1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$
b) $1, 2, 3, 4, \ldots, n+1, \ldots$
c) $\binom{p}{p}, \binom{p+1}{p}, \ldots, \binom{p+n}{p} \ldots$
d) $1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \ldots$

2 Kombinatoricky definované VF

Najděte vzorce v uzavřeném tvaru (tedy bez nekonečných sum) pro vytvořující funkce následujících posloupností.

a) Posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, kde a_n označuje počet způsobů, jak lze číslo n zapsat jako součet tří lichých přirozených čísel (na pořadí sčítanců záleží). Například $a_7 = 6$, neboť číslo 7 lze zapsat těmito součty: $1+1+5, 1+5+1, 5+1+1, 1+3+3, 3+1+3, 3+3+1$.
b) Posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, kde b_n označuje počet způsobů, jak lze číslo n zapsat jako součet libovolného počtu lichých přirozených čísel (na pořadí sčítanců opět záleží). Například $b_4 = 3$, nebot' číslo 4 lze zapsat těmito součty: $1+3, 3+1, 1+1+1+1$.
c) Posloupnost $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, kde c_n označuje počet způsobů, jak lze číslo n zapsat jako součet jedniček a dvojek (na pořadí sčítanců záleží). Například $c_4 = 5$, neboť číslo 4 lze zapsat těmito součty: $1+1+1+1, 1+1+2, 1+2+1, 2+1+1, 2+2$.

3 Dokazování rovností

Pro posloupnosti b_n a c_n z předchozího příkladu platí, že pro každé $n \geq 0$ je c_n rovno b_{n+1} .

a) Dokažte to pomocí vytvořujících funkcí.
b) Dokažte to kombinatorickou úvahou.

4 Rekurence

Najděte vzorce v uzavřeném tvaru (tedy bez nekonečných sum) pro vytvořující funkce následujících posloupností.

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 3a_{n-1} - 1 & \text{pro } n \geq 1 \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 1/2 & \text{pro } n = 0 \\ 1 - \sum_{0 \leq k \leq n-1} b_k & \text{pro } n \geq 1 \end{cases}$$