

# KG1 Jiří Kalvoda: Cvičení 2

Informace k cvičení jsou na <https://kam.mff.cuni.cz/~jirikalvoda/vyuka/24z/kg1>.

## 1 Odhady

Odhady z přednášky:

$$\begin{aligned} \bullet n^{n/2} \leq n! \leq n^n & \qquad e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en \left(\frac{n}{e}\right)^n \\ \bullet \left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k & \\ \bullet \frac{2^{2m}}{2^{m+1}} \leq \binom{2m}{m} \leq 2^{2m} & \qquad \frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \leq \binom{2m}{m} \leq \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}} \end{aligned}$$

Zápisem  $[n]$  označme množinu  $\{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ . V následujících otázkách předpokládejme, že  $n$  je nějaké „dost velké“ číslo.

- Pomocí těsnějších odhadů na  $n!$  odhadněte  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ .
- Čeho je víc, všech funkcí z množiny  $[n]$  do množiny  $[3n]$ , nebo všech prostých funkcí z množiny  $[2n]$  do množiny  $[2n]$ ?
- Čeho je víc, všech grafů na množině vrcholů  $[n]$ , nebo všech grafů na množině vrcholů  $[100n]$ , jejichž každý vrchol má stupeň nejvýš 10?
- Rozhodněte, zda platí  $n! \in 2^{\mathcal{O}(n)}$  a  $n! \in 2^{\Omega(n)}$ .
- Seřadte podle velikosti:  $2^{2n}$ ,  $e^{(\ln n)^3}$ ,  $\binom{2n}{n}$ ,  $n^{\ln n}$ ,  $(\sqrt{n})^n$ .

## 2 Vytvořující funkce

Vytvořující funkce pro posloupnost  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  je mocninná řada  $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ . Je obecně známo, že  $\frac{1}{1-x}$  je vytvořující funkce pro  $1, 1, 1, \dots$

### 2.1 Funkce pomocí jiné

Předpokládejme, že posloupnost  $a_0, a_1, a_2, \dots$  má vytvořující funkci  $f(x)$ . Jakou vytvořující funkci budou pak mít následující posloupnosti?

- a)  $a_0 + 1, a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_n + 1, \dots$
- b)  $2a_0, 2a_1, 2a_2, \dots, 2a_n, \dots$
- c)  $0, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \dots$
- d)  $a_1, a_2, a_3, \dots$
- e)  $a_0, -a_1, a_2, -a_3, \dots, (-1)^n a_n, \dots$
- f)  $a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, 0, \dots$
- g)  $a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, 0, \dots$
- h)  $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \dots$

### 2.2 Posloupnost pomocí jiné

A které posloupnosti mají následující vytvořující funkce?

- a)  $f(-x)$
- b)  $f'(x)$
- c)  $f(2x)$