KG1 Jiří Kalvoda: Cvičení 13

Informace k cvičení jsou na https://kam.mff.cuni.cz/~jirikalvoda/vyuka/24z/kg1.

1 Ramseyovské problémy

Ramseyova věta (grafová): $\forall k, l \in \mathbb{N}$*:* $\exists N \in \mathbb{N}$*:* $\forall G$ *– graf na* N *vrcholech:* G *obsahuje kliku na* k *nebo nezávislou množinu na* l *vrcholech.*

Ramseyova věta (dvojbarevná): $\forall k, l \in \mathbb{N}$*:* $\exists N \in \mathbb{N}$*:* $\forall$ *obarvení hran* K_N *červeně/modře:* G *obsahuje červený indukovaný podgraf na* k *nebo modý na* l *vrcholech.*

Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá (K_N značí úplný graf na množině vrcholů $\{0, 1, \ldots, N-1\}$):

a) Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že když hrany K_N obarvíme dvěma barvami, pak vždy bude existovat jednobarevný úplný podgraf na deseti vrcholech, který obsahuje vrchol číslo 0.

b) Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že když hrany K_N obarvíme dvěma barvami, pak vždy bude existovat jednobarevný úplný podgraf na deseti vrcholech, jehož každý vrchol je mocnina dvojky.

c) Trojbarevná verze: $\forall k, l, m \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall$ obarvení hran K_N červeně/modře/zeleně: G obsahuje červený indukovaný podgraf na k nebo modý na l nebo zelený na m vrcholech.

d) Vícebarevná: $\forall c, k \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall$ obarvení c barvami hran grafu K_N: G obsahuje jednobarevný indukovaný podgraf na k vrcholech.

2 Nekonečná Ramseyova věta

Ramseyovy věta (vícebarevná, hypergrafová, nekonečná): $\forall b \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$*, pokud libovolně obarvíme všechny* p*-prvkové podmnožiny* $\mathbb{N}$ *pomocí* b *barev, tak bude existovat nekonečná množina* $X \subseteq \mathbb{N}$*, jejíž všechny* p*-prvkové podmnožiny mají stejnou barvu.*

a) Dokažte, že v každé nekonečné posloupnost reálných čísel lze najít nekonečnou rostoucí podposloupnost, nekonečnou klesající podposloupnost, nebo nekonečnou konstantní podposloupnost.

b) Dokažte, že v každé spočetné nekonečné množině bodů v rovině lze najít nekonečně mnoho bodů, které všechny leží na společné přímce, nebo nekonečně mnoho bodů, z nichž žádné tři neleží na přímce.

3 Konečná šachovnice

Mějme „šachovnici“ tvaru $N \times N$, pro nějaké $N \in \mathbb{N}$. Máme k dispozici b barev a každé políčko šachovnice obarvíme některou z těchto barev. Dokažte, že pokud je N dost velké v závislosti na b, tak platí následující:

a) Existuje deset políček ve stejném řádku, která mají všechna stejnou barvu.
b) Existují dva řádky a dva sloupce takové, že všechna čtyři políčka na jejich průsečících mají stejnou barvu.
c) Existuje deset řádků a deset sloupců takových, že všech 100 políček na jejich průsečících má stejnou barvu.

Jak velké N stačí k tomu, aby byla tvrzení splněná?

4 Nekonečná šachovnice

Mějme nyní nekonečnou „šachovnici“, jejíž řádky i sloupce jsou očíslované přirozenými čísly.

a) Ukažte, pro libovolné $m \in N$, že pokud libovolně obarvíme políčka této šachovnice dvěma barvami, tak bude existovat „jednobarevná podšachovnice tvaru $m \times \infty$“, tj. vždy půjde vybrat m řádků a nekonečně mnoho sloupců tak, že jejich průsečíky budou mít všechny stejnou barvu.
b) Ukažte, že existuje obarvení políček nekonečné šachovnice dvěma barvami, ve kterém neexistuje „jednobarevná podšachovnice tvaru $\infty \times \infty$“, tj. nelze vybrat nekonečně mnoho řádků a nekonečně mnoho sloupců tak, aby všechna políčka na jejich průsečících měla stejnou barvu.