KG1 Jiří Kalvoda: Cvičení 12

Informace k cvičení jsou na https://kam.mff.cuni.cz/~jirikalvoda/vyuka/24z/kg1.

1 Ušaté lemma

Připomeňme, že graf G je (vrcholově) 2-souvislý, právě když ho lze vyrobit z kružnice pomocí operací přidávání ucha.

a) Nechť G je graf s aspoň třemi vrcholy. Dokažte, že G je 2-souvislý, právě když pro každé tři různé vrcholy x, y, z existuje v G cesta z x do y obsahující z.

b) Nechť G je graf s aspoň třemi vrcholy. Dokažte, že G je 2-souvislý, právě když pro každé tři různé vrcholy x, y, z existuje v G cesta z x do y neobsahující z.

2 Počítání dvěma způsoby

a) Na vysoké škole si každý student zapsal aspoň 10% ze všech nabízených předmětů. Dokažte, že existuje předmět, na němž je zapsáno aspoň 10% všech studentů.

b) Z přednášky víme, že na vrcholech $\{1, 2, \ldots, n\}$ existuje n^{n-2} stromů. Kolik z nich obsahuje hranu $\{1, 2\}$?

c) Na turnaji v trojkovém mariáši (což je hra pro tři hráče) bylo 32 účastníků, 12 z nich sehrálo pět partií, 20 z nich sehrálo šest partií. Kolik tam bylo sehráno partií?

d) Na jiném turnaji v trojkovém mariáši bylo 15 účastníků a každá dvojice účastníků se tam právě dvakrát sešla u společné partie. Kolik tam bylo sehráno partií? Plyne ze zadání, že každý hráč sehrál stejný počet partií? Pokud ano, kolik partií sehrál každý hráč?

e) Turistický oddíl má 100 členů. Pro své členy oddíl zorganizoval celkem 10 výletů. Na každém výletě bylo nejvýše 30 členů oddílu. Dokažte, že existují dva členové oddílu, kteří spolu nikdy nebyli na společném výletě.

f) Nechť M je matice tvaru 10×10 obsahující čísla $1, 2, \ldots, 10$, přičemž každé číslo se v ní vyskytuje 10-krát. Dokažte, že M má řádek nebo sloupec obsahující aspoň 4 různá čísla. Jak zobecnit tento závěr na matice tvaru $n \times n$, v nichž se každé z čísel $1, 2, \ldots, n$ vyskytuje právě n-krát?

3 Nekonečné vs. libovolně velké

a) Ukažte, že existuje **nekonečný** graf G, který pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje cestu délky k, ale neobsahuje nekonečně dlouhou cestu.
b) Ukažte, že existuje posloupnost a reálných čísel taková, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ v ní existuje rostoucí podposloupnost (ne nutně souvislá) délky k, ale neexistuje v ní nekonečná rostoucí podposloupnost.

4 Ramseyovské problémy

Ramseyova věta (grafová): $\forall k, l \in \mathbb{N}$*:* $\exists N \in \mathbb{N}$*:* $\forall G$ *– graf na* N *vrcholech:* G *obsahuje kliku na* k *nebo nezávislou množinu na* l *vrcholech.*

Ramseyova věta (dvojbarevná): $\forall k, l \in \mathbb{N}$*:* $\exists N \in \mathbb{N}$*:* $\forall$ *obarvení hran* K_N *červeně/modře:* G *obsahuje červený indukovaný podgraf na* k *nebo modý na* l *vrcholech.*

Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá (K_N značí úplný graf na množině vrcholů $\{0, 1, \ldots, N-1\}$):

a) Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že když hrany K_N obarvíme dvěma barvami, pak vždy bude existovat jednobarevný úplný podgraf na deseti vrcholech, který obsahuje vrchol číslo 0.
b) Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že když hrany K_N obarvíme dvěma barvami, pak vždy bude existovat jednobarevný úplný podgraf na deseti vrcholech, jehož každý vrchol je mocnina dvojky.
c) Trojbarevná verze: $\forall k, l, m \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall$ obarvení hran K_N červeně/modře/zeleně: G obsahuje červený indukovaný podgraf na k nebo modý na l nebo zelený na m vrcholech.
d) Vícebarevná: $\forall c, k \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall$ obarvení c barvami hran grafu K_N: G obsahuje jednobarevný indukovaný podgraf na k vrcholech.