KG1 Jiří Kalvoda: Cvičení 10

Informace k cvičení jsou na https://kam.mff.cuni.cz/~jirikalvoda/vyuka/24z/kg1.

1 Vrcholová souvislost grafů

Vrcholová souvislost, značená $k_v(G)$, je největší k takové, že graf G je vrcholově k-souvislý. Pro neúplný graf G je $k_v(G)$ rovno velikosti nejmenšího vrcholového řezu a pro K_n máme $k_v(K_n) = n - 1$.

Mengerova věta: graf je vrcholově k-souvislý, právě když mezi každými dvěma různými vrcholy existuje k vnitřně vrcholově disjunktních cest.

a) Existuje graf G, pro nějž je $k_v(G) < k_e(G)$?

b) A co $k_v(G) > k_e(G)$?

c) Může být rozdíl $|k_v(G) - k_e(G)|$ libovolně velký?

d) Nechť G je graf, jehož každý vrchol má stupeň nejvýš 3. Plyne z toho, že $k_e(G) = k_v(G)$?

2 Ušaté lemma

Připomeňme, že graf G je (vrcholově) 2-souvislý, právě když ho lze vyrobit z kružnice pomocí operací přidávání ucha.

a) Nechť G je graf s aspoň třemi vrcholy. Dokažte, že G je 2-souvislý, právě když pro každé tři různé vrcholy x, y, z existuje v G cesta z x do y obsahující z.

b) Nechť G je graf s aspoň třemi vrcholy. Dokažte, že G je 2-souvislý, právě když pro každé tři různé vrcholy x, y, z existuje v G cesta z x do y neobsahující z.

c) Dokažte, že v každém 2-souvislém grafu lze zorientovat hrany (tj. nahradit každou hranu orientovanou hranou) tak, že pro každé dva vrcholy x, y bude existovat orientovaná cesta z x do y.