KG1 Jiří Kalvoda: Cvičení 1

Informace k cvičení jsou na https://kam.mff.cuni.cz/~jirikalvoda/vyuka/24z/kg1.

1 Kuličky a přihrádky

Mějme dáno k uniformních kuliček, které chceme všechny rozdělit do p přihrádek (uspořádaných zleva doprava). Kolika způsoby to lze učinit? Uvažujme tři možné varianty podle povoleného počtu kuliček v přihrádce:

a) V přihrádkách může být libovolný počet kuliček.
b) V každé přihrádce je nejvýše jedna kulička.
c) V každé přihrádce je aspoň jedna kulička.

Dále znovu uvažme část a. a b. s tím rozdílem, že nyní jsou kuličky očíslované postupně $1, 2, ..., k$. Celkem máme tedy pět možných variant úlohy.

2 Počty součtů

a) Kolika způsoby lze nezáporné celé číslo $n \in \mathbb{N}$ napsat jako součet s sčítanců? Předpokládejme, že každý sčítanec je také nezáporné celé číslo a že na pořadí sčítanců záleží. Například pro $n = 4$ a $s = 2$ máme pět možností: $4 = 0 + 4,\ 4 = 1 + 3,\ 4 = 2 + 2,\ 4 = 3 + 1,\ 4 = 4 + 0$.
b) Jak se změní předchozí výsledek, jestliže budeme požadovat, aby všechny sčítance byly kladné?

3 Kombinatorické identity

Rozmyslete si, že platí následující identity ($n, k \in \mathbb{N}$):

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ pro $n \geq 1$.
c) $\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} = 2^n$
d) $\sum_{0 \leq k \leq n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$
e) $\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ pro $n \geq 1$.

   Lehčí varianta: n je liché.

4 Náhodné úlohy

a) Mějme šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n$ pro $n \in \mathbb{N}$, na níž chybí jedno rohové políčko. Dokažte, že ji jde celou vydláždit dlaždicemi tvaru `L` velikosti 2×2.
b) Máme osm kuliček, které vypadají úplně stejně, jen jedna je o trochu těžší než ostatní. Dokážete s pomocí pouhých dvou vážení na rovnoramenných vahách najít tu těžší?