Cvičení: Lineární algebra I – 29. listopadu 2013

9.1. Poznámka. V testu se objeví:

1. Výpočet maticové rovnice na tělesem $\mathbb{Z}_p$.
2. Rozhodněte, zda je zadaná struktura těleso, vektorový prostor.
3. Zjistěte zda systém vektorů je lineárně nezávislý, respektive určete souřadnice vektoru vůči konkrétní bázi.
4. Spočítejte matici lineárního zobrazení a spočítejte lineární zobrazení v bodě.

9.2. Poznámka. Geometrická intuice. Lineární zobrazení zadané vzhledem k bázím. Elementární příklady.

9.3. Příklad. Spočítejte $F(w)$ kde $F\colon V \to W$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory V a W s bázemi B_1 a B_2 zadané následujícím předpisem (a vyjádřete výsledek vzhledem k bázi B_2):

1.
$$\begin{aligned} V, W &\text{ jsou } \mathbb{R}^3 \text{ a } \mathbb{R}^2 \\ B_1, B_2 &\text{ jsou kanonické báze} \\ v &= (1,3,8)^T \text{ nebo obecně } (x,y,z)^T \end{aligned}$$
$$F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}.$$

2.
$$\begin{aligned} V, W &\text{ jsou } \mathbb{R}^3 \text{ a } \mathbb{R}^2 \\ B_1 &= \{(1,1,0)^T, (0,1,1)^T, (1,0,1)^T\}, B_2 = \{(1,0)^T, (2,1)^T\} \\ v &= (1,3,8)^T \text{ nebo obecně } (x,y,z)^T \end{aligned}$$
$$F\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}.$$

3.
$$\begin{aligned} V &\text{ je } \mathbb{R}^3, \quad W \text{ je prostor polynomů} \\ B_1 &= \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}, B_2 = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ v &= (3,1,4)^T \end{aligned}$$
$$F((1,1,0)^T) = 2x^3 + x^4, \quad F((0,1,1)^T) = 1 + x^2, \quad F((1,0,1)^T) = 2x^2 + x^3.$$

4.
$$\begin{aligned} B_1 &= \{u_1, u_2, u_3\}, \quad B_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \\ v &= u_1 + 2u_2 - u_3 \\ F(u_1) &= v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \quad F(u_2) = 2v_1 - 2v_3, \quad F(u_2) = v_1 + 2v_2 + v_3. \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} B_1 &= \{u_1, u_2, u_3\}, \quad B_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \\ v &= u_1 + 2u_2 - u_3 \\ F(u_1) &= v_1 - v_2 + v4, \quad F(u_2) = 2v_3 + v_4, \quad F(u_2) = v_1 + 2v_2 - v_3 + 2v_4. \end{aligned}$$

9.4. Příklad. Spočítejte matici lineárního zobrazení. Pro

$$F((x_1, x_2)^T) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)^T \tag{1}$$
$$F((x_1, x_2)^T) = (x_1, x_2)^T \tag{2}$$
$$F((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)^T \tag{3}$$
$$F((x_1, x_2, x_3)^T) = (4x_1, 7x_2, -8x_3)^T. \tag{4}$$

a pro

$$F((3,1)^T) = (1,2)^T, \text{ a } F((-1,0)^T) = (1,1)^T \tag{5}$$
$$F((4,1)^T) = (1,1)^T, \text{ a } F((1,1)^T) = (3,-2)^T \tag{6}$$
$$F((1,1)^T) = (2,1)^T, \text{ a } F((-1,1)^T) = (6,3)^T. \tag{7}$$

Domácí úkoly

9.5. Úkol. Ukažte, že stopa matice $\mathrm{tr}(A)$ je lineární zobrazení. **(3 body)**
(Stopa matice $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ je $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$)

9.6. Úkol. Ukažte, že $F(0) = 0$ a $F(-v) = -F(v)$ pro lineární zobrazení F. **(2 body)**

9.7. Úkol. Nechť V a W jsou vektorové prostory nad tělesem T. Pak množina $\mathcal{L}(V, W) = \{F\colon V \to W \mid F \text{ je lineární zobrazení}\}$ spolu s operacemi $\oplus$ a $\odot$ je vektorový prostor. Kde operace $\oplus$ a $\odot$ jsou definovány následovně:

$$F \oplus G\colon v \mapsto F(v) + G(v), \quad \alpha F\colon v \mapsto \alpha F(v),$$

pro všechna $F, G \in \mathcal{L}(V, W)$ a $\alpha \in T$. **(2 body)**

9.8. Úkol. Nechť $\mathcal{L}(V, W)$ je definováno jako v minulém příkladu a nechť $\dim V = n$ a $\dim W = m$. Ukažte, že $\dim \mathcal{L}(V, W) = nm$. **(3 body)**