Cvičení: Lineární algebra I – 18. října 2013

3.1. Příklad. Určete, které matice jsou regulární:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & -20 \end{pmatrix}.$$

3.2. Příklad. Najděte inverzní matice k maticím:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

3.3. Příklad. Najdětě hodnoty maticových proměnných, tak aby byly splněny následující rovnosti:

1.
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.
$$X_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(X_3 - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4. Příklad. Ukažte, že inverzní matice je určena jednoznačně.

3.5. Příklad. Ukažte, že součin dvou regulárních matic je regulární.

3.6. Příklad. Dokažte, že pokud pro matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pro každé $b \in \mathbb{R}^n$ existuje alespoň jedno $x \in \mathbb{R}^n$, takové, že $Ax = b$, pak je A regulární.

3.7. Příklad. Nechť A je čtvercová matice.

1. Nechť platí, že $A^2 = 0$. Ukažte, že $I_n - A$ je regulární.
2. Nechť platí, že $A^3 = 0$. Ukažte, že $I_n - A$ je regulární.

Domácí úkoly

3.8. Úkol. Pro regulární matici A ukažte, že $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. **(2 body)**

3.9. Úkol. Nechť A je čtvercová matice a m je přirozené číslo. Nechť platí, že $A^m = 0$. Ukažte, že $I_n - A$ je regulární. **(2 body)**

3.10. Úkol. Ukažte, že je-li matice A symetrická a regulární, potom také matice A^{-1} je symetrická.

(4 body)

3.11. Úkol. Ukažte, že AA^T je vždy symetrická matice. **(3 body)**

3.12. Úkol. Spočítejte n-tou mocninu matice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. *(Poznámka: Použijte indukci a vztahy pro součty sinů a cosinů*[1]*.)* **(5 bodů)**

[1] http://www.clarku.edu/ djoyce/trig/identities.html