Cvičení: Lineární algebra I – 11. října 2013

2.1. Příklad. Řešte následující soustavy rovnic Gauss–Jordanovou eliminací (a všimněte si, že výsledek nezávisí na volbě pivota):

1.

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 5z &= 1 \\ x - y + z &= 3 \\ 3x + 2y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4u + 5v &= 3 \\ 3x + 2u - 3v &= 4 \\ 7x + 6y + 10u + 7v &= 1 \end{aligned}$$

2.2. Poznámka. Trochu o geometrické interpretaci násobení (především ve 2D).

2.3. Příklad. Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte (kdykoliv má výraz smysl):

$$(A + 4B) + C, \quad (A + B)^T \cdot 2C, \quad (B \cdot C) \cdot A^T, \quad (B \cdot 3A^T) + C, \quad C \cdot (B^T - (\pi A)^T).$$

Najděte matici C', takovou, že platí: $C \cdot C' = C' \cdot C = I_2$.

2.4. Příklad. Najděte všechny matice, které komutují s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Domácí úkoly

2.5. Úkol. Buď A, B matice typu $n \times n$ takové, že $A \cdot B = I_n$. Potom kdykoliv $B \cdot v = B \cdot w$ pro nějaké vektory v, w potom už nutně $v = w$. **(3 body)**

2.6. Úkol. Řekneme, že matice A typu $n \times n$ je idempotentní, pokud $A \cdot A = A$.

1. Najděte idempotentní matici A typu 2×2 a různou od I_2.
2. Ukažte, že pokud A je idempotentní, potom i $I_n - A$ je idempotentní.

(4 body)

Pozn: Zdůrazněte kdykoliv použijete komutativity, asociativity atd. u maticových operací.

2.7. Úkol. Ukažte, že pokud dva body v $\mathbb{R}^m$ jsou řešení soustavy n rovnic o m neznámých, tak potom jsou všechny body na přímce určené těmito body také řešení této soustavy rovnic. **(4 body)**