Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Uvažme relaci "x je dělitelem čísla y" na množině $\{1,\ldots,n\}$.

a) Dokažte, že tato relace je (neostré) uspořádání.

b) Má toto uspořádání nějaký největší a nejmenší prvek?

c) Má toto uspořádání nějaký minimální a maximální prvek?

d) Čemu v tomto uspořádání odpovídá infimum a supremum neprázdné podmnožiny?

Úloha 2:

a) Ukažte, že pro každou konečnou množinu platí, že všechna její lineární uspořádání jsou navzájem isomorfní.

Pozn.: Relace R na X je isomofní relaci S na Y pokud existuje bijekce $f : X \to Y$ taková, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in S$.

b) Ukažte, že pro každou množinu A přirozených čísel platí, že všechna lineární uspořádání množiny A jsou navzájem isomorfní, právě když A je konečná.

Úloha 3: Které z následujících relací na množině $\mathbb{N}^2$ (dvojice přirozených čísel) jsou uspořádáními? Která z těchto uspořádání jsou lineární?

a) Porovnání po obou souřadnicích $\leq_S$:

$(a, b) \leq_S (x, y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge b \leq y$

b) Porovnání v alespoň jedné souřadnici $\leq_U$:

$(a, b) \leq_U (x, y) \Leftrightarrow a \leq x \vee b \leq y$

c) Porovnání v obou složkách různými směry $\leq_Z$:

$(a, b) \leq_Z (x, y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge b \geq y$

d) Slovníkové (lexikografické) porovnání $\leq_L$:

$(a, b) \leq_L (x, y) \Leftrightarrow a < x \vee (a = x \wedge b \leq y)$

e) Slovníkovo-maximové porovnání $\leq_M$:

$(a, b) \leq_M (x, y) \Leftrightarrow \max(a, b) < \max(x, y) \vee (a, b) \leq_L (x, y)$

f) Maximové porovnání s tím, že nerozhodné případy se porovnají lexikograficky $\leq_N$:

$(a, b) \leq_N (x, y) \Leftrightarrow \max(a, b) < \max(x, y) \vee [\max(a, b) = \max(x, y) \wedge (a, b) \leq_L (x, y)]$

Úloha 4: Ukažte že každé konečné částečné uspořádání je izomorfní uspořádání dělitelností na $\mathbb{N}$.

Úloha 5: Určete počet různých částečných uspořádání na čtyřech prvcích.

Úloha 6: Ukažte, že pro každé lineární uspořádání $\mathbb{N}$ existuje vnoření do $\mathbb{Q}$.

Pozn.: Pro daná částečná uspořádání $(P, \leq)$, $(Q, \preceq)$ funkce $f : P \to Q$ je *vnoření* pokud je prostá a $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \preceq f(y)$.

Chyták dne: Uvažujme hru, kde Bořivoj má náhodně promíchaný balíček karet. Jednu po druhé je snímá a ukazuje Alence. Když Alenka řekne "stop", Bořivoj sejme naposledy a pokud následující karta je červená, Alenka vyhraje. Pokud není červená a nebo Bořivojovi dojdou karty, Alenka prohrává. Jaká je optimální strategie?