Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Dokažte matematickou indukcí $4|(6n^2 + 2n)$.

Úloha 2: Označme S_n množinu všech celých čísel, která lze zapsat ve tvaru $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \ldots \pm n$ (Tedy jde o součet n čísel, kde každé $\pm$ nahradíme buď znaménkem $+$ nebo $-$ nezávisle na ostatních). Dokažte následující tvrzení:

a) Pro všechna $x \in S_n$ platí: $-\dfrac{n(n+1)}{2} \leq x \leq \dfrac{n(n+1)}{2}$.

b) Všechna čísla v S_n mají stejnou paritu (jsou buď všechna sudá, nebo všechna lichá). Jak tato parita souvisí s hodnotou n?

c) Všechna celá čísla splňující předchozí dvě podmínky leží v množině S_n.

Úloha 3: Nechť $f : X \to Y$ a $g : Y \to X$ jsou funkce takové, že pro každé $x \in X$ platí $(g \circ f)(x) = x$ a pro každé $y \in Y$ platí, že $(f \circ g)(y) = y$. Dokažte, že f i g jsou bijekce (tedy prosté a na).

Úloha 4: Buďte R a S tranzitivní relace na téže množině. Které z následujících relací jsou také tranzitivní?

a) $R \cup S$

b) $R \cap S$

c) $R \setminus S$

Úloha 5: Určete počet relací na čtyřech (n) prvcích:
— všech,
— reflexivních,
— symetrických,
— antisymetrických.

Úloha 6: Určete počet různých ekvivalencí na pěti prvcích.