Čtvrté cvičení ADS 1

Příklad 1 (rychlejší Dijsktra): Máte zadaný ohodnocený graf takový, že hrany mají pouze K různých délek a v něm vrcholy u, v. Vymyslete algoritmus k nalezení nejkratší cesty z u do v, který poběží v $O(\log(K)(m+n))$.

Příklad 2 (nefungující Dijsktra): Najděte příklad grafu s jednou zápornou hranou a bez záporného cyklu na kterém Dijsktrův algoritmus nenalezne nejkratší cestu.

Příklad 3 (cykly): V orientovaném grafu jsou některé vrcholy obarvené zeleně. Jak zjistit, jestli existuje cyklus obsahující alespoň jeden zelený vrchol?

Příklad 4 (mosty): Počítačovou síť popíšeme grafem: vrcholy odpovídají routerům, hrany kabelům mezi nimi. Přirozeně se nám nelíbí mosty: to jsou kabely, jejichž výpadek způsobí nedostupnost některých routerů. Navrhněte, jak do sítě přidat co nejméně kabelů, aby v ní žádné mosty nezbyly.

Příklad 5 (kamiony): Mějme mapu města ve tvaru orientovaného grafu. Každou hranu ohodnotíme podle toho, jaký nejvyšší kamion po dané ulici můze projet. Po cestě tedy projede maximálně tak vysoký náklad, kolik je minimum z ohodnocení jejich hran. Jak pro zadané dvavrcholy najít cestu, po níž projede co nejvyšší náklad?

Příklad 6 (ucpané křižovatky): Mějme mapu města, na které jsou časem potřebným na průjezd ohodnocené nejen hrany (silnice), ale také vrcholy (křižovatky). Upravte Dijkstrův algoritmus, aby našel nejrychlejší cestu i v tomto případě.

Příklad 7 (polosouvislost): Orientovaný graf G je polosouvislý právě tehdy, když pro každé dva vrcholy u, v existuje orientovaná cesta z u do v nebo z v do u (ne nutně oběma směry). Navrhněte algoritmus, který určí, zda je graf polosouvislý.

Příklad 8 (průměr stromu): Průměr stromu je roven délce nejdelší cesty. Popište algoritmus, který spočítá průměr ohodnoceného stromu. Dokažte jeho správnost.

Domácí úkol 5 (nejkratší sled, 10 bodů): Mějme ohodnocený orientovaný graf. Jsou dány vrcholy u, v a číslo k. Spočítejte, jak dlouhý je nejkratší sled z u do v tvořený právě k hranami. Určete časovou a prostorovou složitost algoritmu.

Domácí úkol 6 (stavba domu, 10 bodů): Stavba domu sestává ze spousty činností, z nichž některé je potřeba provést dříve než jiné. Situaci popíšeme grafem: vrcholy jsou činnosti (ohodnocené tím, jak dlouho trvají), orientované hrany vyjadřují závislosti. Spočítejte, za jakou nejkratší dobu lze postavit celý dům, pokud máme neomezeně mnoho pracovníků vykonávajících všechny činnosti. Jak najít kritické činnosti, tedy ty, jejichž prodloužení by způsobilo zpoždění dokončení celé stavby?

Stanovte časovou a prostorovou složitost zvoleného algoritmu.