Desáté cvičení ADS 1

Příklad 1 (Bloomův filtr): *Bloomův filtr* je datová struktura pro přibližnou reprezentaci množiny. Skládá se z pole bitů $B[1 \dots m]$ a hešovací funkce h, která prvkům univerza přiřazuje indexy v poli.

- Insert(x) nastaví $B[h(x)] = 1$.
- Member(x) otestuje, zda $B[h(x)] = 1$.

Vložme nyní do filtru nějakou n-prvkovou množinu M. Pokud $x \in M$, Member(x) vždy odpoví správně. Pokud se ale zeptáme na $x \notin M$, může se stát, že $h(x) = h(y)$ pro nějaké $y \in M$, a Member(x) odpoví špatně. Spočítejte, s jakou pravděpodobností se to pro dané m a n stane.

Využijte toho, že $1 + \alpha \leq e^{\alpha}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.

Příklad 2 (optimalizace Bloomova filtru): Spolehlivost Bloomova filtru můžeme zvýšit tak, že si pořídíme k filtrů s různými hešovacími funkcemi. Insertb ude vkládat do všech, Member se zeptá všech a odpoví ano pouze tehdy, když se na tom všechny filtry shodnou. Je-li pravděpodobnost chyby jednoho filtru p, pak kombinace k filtrů chybuje s pravděpodobností pouhých p^k. Vymyslete, jak nastavit m a k pro případ, kdy chceme ukládat 10^6 prvků s pravděpodobností chyby nejvýše 10^{-9}. Minimalizujte spotřebu paměti.

Příklad 3 (vícecestný Mergesort): Vícecestný Mergesort pro k cest dělí posloupnost na k stejně velkých částí, které rekurzivně seřadí, a pak je slije. Nejprve ukažte, jak slévat k sežazených posloupností celkové délky n v čase $O(n \log k)$. Pak zanalyzujte časovou složitost vícecestného Mergesortu. Čemu odpovídá n-cestný Mergesort?

Příklad 4 (rekurence): Vyřešte rekurenci $T(n) = c \cdot T(n/2) + \Theta(n \log n), T(1) = 1$. Jak budou vypadat výsledky pro $c = 1$ a $c = 2$?

Příklad 5 (Šroubky a matičky): Na stole leží n různých šroubků a n matiček. Každá matička pasuje na právě jeden šroub a my chceme zjistit, která na který. Umíme ale pouze porovnávat šroub s matičkou – tím získáme jeden ze tří možných výsledků: matička je příliš velká, příliš malá, nebo správně velká. Jak to udělat efektivně?

Příklad 6 (Mimozemský narozeninový paradox.): Mějme planetu s m dny v roce a skupinu n obyvatel této planety, kteří mají rovnoměrně náhodně narozeniny v tamním roce. Zkuste co nejlépe spočítat pravděpodobnost, že dva mimozemšťané v této skupině mají narozeniny ve stejný den.

Domácí úkol 13 (rekurence, 15 bodů): Vyřešte rekurenci $T(n) = \sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + \Theta(n), T(1) = 1$.

Domácí úkol 14 (kabel, 15 bodů): Mějme dlouhý kabel, z jehož obou konců vystupuje po n drátech. Každý drát na levém konci je propojen s právě jedním na konci druhém a my chceme zjistit, který s kterým. K tomu můžeme používat následující operace: (1) přivést napětí na daný drát na levém konci, (2) odpojit napětí z daného drátu na levém konci, (3) změřit napětí na daném drátu na pravém konci. Navrhněte algoritmus, který pomocí těchto operací zjistí, co je s čím propojeno. Snažte se počet operací minimalizovat.