Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Strom na 4152 vrcholech má pouze vrcholy stupně 1 a 3. Kolik minimálně a maximálně může mít listů?

Úloha 2: Ukažte, že graf na n vrcholech s k komponentami souvislosti je lesem právě tehdy, když má $n-k$ hran.

Úloha 3: Dokažte, že dva grafy jsou izomorfní právě tehdy, když jsou izomorfní jejich doplňky.

Úloha 4: Nechť G je graf bez trojúhelníků a A jeho matice sousednosti. Jaké prvky má na hlavní diagonále A^3, tj. třetí mocnina A?

Úloha 5: Uvažte množinu vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$ a určete, kolik je na této množině různých (ale vzájemně izomorfních):

a) úplných grafů K_n,

b) cest P_n,

c) cyklů C_n,

d) úplných bipartitních grafů $K_{k,n-k}$ v závislosti na k,

e) disjunktních sjednocení dvou úplných grafů $K_k \cup K_{n-k}$ v závislosti na k,

f) grafů, v nichž každý vrchol má stupeň 1.

Úloha 6: Pro každá dvě přirozená čísla k, n taková, že $k < n$ a $2|kn$, najděte příklad k-regulárního grafu na n vrcholech.

Úloha 7: Dokažte, že pokud v konečném stromu existuje vrchol stupně k, tak potom strom má alespoň k listů.

Domácí úkol 4

Úloha 1: V šachovnici $m \times m$ je $2m$ políček obarveno modře. Na jedno z políček umístíme věž. Věží budeme pohybovat z modrého políčka opět na modré políčko, přičemž se budeme chtít pohybovat střídavě vodorovně a svisle. Dokažte, že je možné věž umístit tak, že když s ní budeme vhodně pohybovat, nikdy nepřestaneme mít možnost udělat další tah. (10 bodů)

Úloha 2: Najděte všechny stromy T, jejichž doplňkem je také strom. Zdůvodněte, že jste na žádný nezapomněli. (5 bodů)

Úloha 3: Jsou všechny $(n-2)$-regulární grafy (tedy grafy mající všechny vrcholy stupně $n-2$) na n vrcholech izomorfní? (5 bodů)