Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Uvažme relaci „x je dělitelem čísla y“ na množině $\{1, \ldots, n\}$.

a) Dokažte, že tato relace je (neostré) uspořádání.

b) Má toto uspořádání nějaký největší a nejmenší prvek?

c) Má toto uspořádání nějaký minimální a maximální prvek?

d) Čemu v tomto uspořádání odpovídá infimum a supremum neprázdné podmnožiny?

Úloha 2: Na vhodné množině najděte uspořádání s danou vlastností, či ukažte, že takové neexistuje:

a) bez největšího prvku,

b) bez největšího i nejmenšího prvku,

c) bez největšího prvku ale s maximálním prvkem,

d) bez maximálního prvku ale s největším prvkem,

e) na nekonečné množině bez nekonečného řetezce.

Úloha 3: Nechť $\leq_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, jsou uspořádání na nějaké množině X. Ukažte, že $\cap_{i=1}^{k} \leq_i$ je opět uspořádání. (Uvědomte si, že každé $\leq_i$ je relace a tedy podmnožina $X \times X$.)

Úloha 4: Kolik existuje ekvivalencí na čtyřprvkové množině? Kolik na n-pvkové?

Úloha 5: Matematickou indukcí dokažte, že pro konečné množiny X a Y platí:

a) Existuje-li prosté zobrazení z X do množiny Y, potom $|X| \leq |Y|$.

b) Existuje-li zobrazení množiny X na Y, potom $|X| \geq |Y|$.

Úloha 6: Určete maximální možný počet různých množin, které lze získat pomocí operací průniku a sjednocení.

a) ze tří počátečních množin.

b) ze dvou počátečních množin.

Domácí úkol 2

Úloha 1: Dokažte, že relace R na množině X je tranzitivní právě tehdy, když $R \circ R \subseteq R$.
(5 bodů)

Úloha 2: Najděte bijekci mezi množinou $\mathbb{Z}$ (všech celých čísel) a $\mathbb{N}$ (všech přirozených čísel).
(5 bodů)

Úloha 3: Dokažte, že každé lineární částečné uspořádání $\leq$ na konečné množině X se dá vyjádřit jako průnik konečně mnoha lineárních uspořádání (na stejné množině X).
(5 bodů)