Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Zjistěte, které z následujících podmínek nejsou ekvivalentní podmínce $A \subseteq B$. Pokuste se ji upravit tak, aby ekvivalence platila a to pokud možno co nejmenším zásahem.

a)$A \setminus B = \emptyset$

b)$A \cup B = B$

c)$A \cap B = A$

d)$\overline{A} \setminus B \subseteq \overline{B}$

e)$A \cap \overline{B} = \emptyset$

f)$\overline{A} \subseteq \overline{B}$

Úloha 2: Dokažte, pro n-prvkovou množinu se počet jejích podmnožin sudé velikosti rovná počtu podmnožin liché velikosti.

Úloha 3: Dokažte matematickou indukcí:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}(n^2 + n).$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2.$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 4i + 5 = 2n^2 + 7n.$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$

e) $\displaystyle\prod_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}.$

Úloha 4: Matematickou indukcí dokažte, že pro konečné množiny X a Y platí:

a) Existuje-li prosté zobrazení z X do množiny Y, potom $|X| \leq |Y|$.

b) Existuje-li zobrazení množiny X na Y, potom $|X| \geq |Y|$.

Úloha 5: Určete maximální možný počet různých množin, které lze získat pomocí operací průniku a sjednocení.

a) ze tří počátečních množin.

b) ze dvou počátečních množin.

Domácí úkol 1

Úloha 1: Vyjádřete $A \cap B$ pouze pomocí opakované aplikace rozdílu množin. (Množinový rodíl značíme jako $X \setminus Y$.) Nepoužívejte ostatní operace (jako průnik, komplementaci, sjednocení a symetrický rozdíl).
(3 body)

Úloha 2: Označme S_n množinu všech celých čísel, která lze zapsat ve tvaru $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \ldots \pm n$ (Tedy jde o součet n čísel, kde každé $\pm$ nahradíme buď znaménkem $+$ nebo $-$ nezávisle na ostatních). Dokažte následující tvrzení:

a) Pro všechna $x \in S_n$ platí: $-\dfrac{n(n+1)}{2} \leq x \leq \dfrac{n(n+1)}{2}$.
(2 body)

b) Všechna čísla v S_n mají stejnou paritu (jsou buď všechna sudá, nebo všechna lichá). Jak tato parita souvisí s hodnotou n?
(2 body)

c) Všechna celá čísla splňující předchozí dvě podmínky leží v množině S_n.
(3 body)