Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Máme 9 mincí a rovnoramenné váhy. Jedna z mincí je ale falešná, což se pozná podle toho, že váží méně než ostatní. Jak na co nejmenší počet vážení zjistit, která to je? A jak to dopadne pro n mincí?

Úloha 2: Na šachovnici $2^n \times 2^n$ jedno náhodně vybrané políčko chybí. Ukažte, že zbylou plochu lze vydláždit dlaždicemi, která mají tvar „L“ a přitom zabírají tři políčka.

Úloha 3: Uvažte tabulku čokolády o $m \times n$ dílcích. Určete, kolikrát budete muset nějakou část čokolády rozlomit na dvě menší části než dostanete mn jednotlivých dílků.

Závisí výsledný počet lámání na zvoleném postupu?

Úloha 4: Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.

Úloha 5: Dokažte, pro n-prvkovou množinu se počet jejích podmnožin sudé velikosti rovná počtu podmnožin liché velikosti.

Úloha 6: Dokažte matematickou indukcí:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}(n^2 + n)$.

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$.

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 4i + 5 = 2n^2 + 7n$.

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

e) $\displaystyle\prod_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$.

Úloha 7: Matematickou indukcí dokažte, že pro konečné množiny X a Y platí:

a) Existuje-li prosté zobrazení z X do množiny Y, potom $|X| \leq |Y|$.

b) Existuje-li zobrazení množiny X na Y, potom $|X| \geq |Y|$.

Úloha 8: Určete maximální možný počet různých množin, které lze získat pomocí operací průniku a sjednocení.

a) ze dvou počátečních množin

b) ze tří počátečních množin