Druhá série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II

Jméno:

Nick:

Příklad 1, 2 body: Nechť G je 3-regulární, vrcholově 2-souvislý rovinný graf. Ukažte, že G má hranovou barevnost 3. Smíte bez důkazu použít větu o čtyřech barvách, tj. smíte předpokládat, že každý rovinný graf má vrcholovou barevnost nejvýše 4.

Příklad 2, 2 body: V tomoto příkladu používám konvenci, že dva izomorfní grafy pokládám za totožné. Formálněji řečeno, slovem 'graf' neoznačuji jeden konkrétní graf, ale celou třídu izomorfismu grafů.

Označme $G \preceq_M H$ relaci G *je minor* H. Nechť $\mathcal{F}$ je nějaká množina grafů. Označme $\mathrm{Forb}(\mathcal{F})$ množinu všech těch grafů, které neobsahují žádný graf z množiny $\mathcal{F}$ jako minor (takže například $\mathrm{Forb}(K_5, K_{3,3})$ je přesně množina rovinných grafů, dle Kuratowského–Wagnerovy věty).

Nechť M je libovolná množina grafů. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Množina M je uzavřená vůči minorům, tj. pro každý graf G patřící do M platí, že i každý minor G patří do M.
2. Existuje množina grafů $\mathcal{F}$ (třeba i nekonečná) taková, že $M = \mathrm{Forb}(\mathcal{F})$. (Takové množině $\mathcal{F}$ se obvykle říká množina zakázaných minorů pro M.)

Příklad 3, 2 body: Ukažte, že každý d-degenerovaný graf má průměrný stupeň nejvýše $2d$.

Příklad 4, 2 body: Ukažte, že pro každou plochu existuje jen konečně mnoho neizomorfních 7-regulárních grafů, které lze na tuto plochu nakreslit.

Příklad 5, 2 body: Dokažte, že každý graf, jehož vrcholová barevnost je rovna k, má alespoň $\binom{k}{2}$ hran.

Příklad 6, 3 body: Najděte všechny plochy Γ, pro které existuje nekonečně mnoho neizomorfních 6-regulárních grafů, které lze na Γ nakreslit.

Vyřešené příklady odevzdávejte buď e-mailem se subjektem obsahujícím **KG-II** na adresu **hubicka@kam.mff.cuni.cz** nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději v pondělí 3. prosince.