První série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II

Jméno:

Nick:

Příklad 1, 1 bod: Nalezněte kubický graf bez mostů, který obsahuje dvě nesousední hrany e_1, e_2 takové, že neexistuje perfektní párování M obsahující e_1 i e_2.

Příklad 2, 1 bod: Podle Petersenovy věty ma každý 2-souvislý, 3-regulární graf perfektní párování. Najděte příklad grafu, který je 3-regulární, není 2-souvislý a nemá perfektní párování.

Příklad 3, 1 bod: Kolik perfektních párování má graf vzniklý z úplného bipartitního grafu $K_{n,n}$ odebráním jedné hrany?

Příklad 4, 1 bod: Dokažte, že každý strom má nejvýš jedno perfektní párování.

Příklad 5, 2 body: Graf $G_{n,a,b}$ pro přirozená čísla $a, b \leq n$, $a \neq b$ je definován:
$V(G_{n,a,b}) = \{X : X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}, |X| \in \{a, b\}\}$,
$E(G_{n,a,b}) = \{XY : X \subset Y\}$.
V závislosti na a, b a n určete velikost největšího párování tohoto grafu.

Příklad 6, 2 body: Nechť $G = (V, E)$ je graf a nechť $\mu(G)$ označuje velikost největšího párování v grafu G. Řekneme, že párování M grafu G je *maximální*, pokud pro každou nepárovací hranu $e \in E \setminus M$ platí, že $M \cup \{e\}$ není párování. Dokažte, že každé maximální párování grafu G má aspoň $\frac{1}{2}\mu(G)$ hran.

Příklad 7, 3 body: Nechť $G = (V, E)$ je 3-regulární 2-souvislý graf a nechť $e \in E$ je libovolná jeho hrana. Dokažte, že graf G má perfektní párování, které neobsahuje hranu e.

Vyřešené příklady odevzdávejte buď e-mailem se subjektem obsahujícím **KG-II** na adresu **hubicka@kam.mff.cuni.cz** nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději v neděli 28. října.