Požadavky ke zkoušce z DMA005 Diskrétní matematika

Číslování vět odkazuje na učebnici Matoušek, Nešetřil: Kapitoly z diskrétní matematiky, vydání třetí z roku 2007.

Ke složení zkoušky je nutno znát a porozumět všem definicím a pojmům a znát všechny probrané věty a tvrzení. Ke složení zkoušky na výbornou je třeba znát a umět předvést důkazy těchto tvrzení a umět aplikovat nabyté znalosti k řešení jednoduchých příkladů (i důkazového charakteru).

- **Základy teorie množin a výrokové logiky** Operace s množinami a výroky, kvantifikátory, důkazy. Zejména důkaz matematickou indukcí.

- **Relace a zobrazení**

  Definice: Kartézský součin 1.4.1, relace 1.4.2, zobrazení 1.5.1, skládání relací str. 38, skládání zobrazení (funkcí) 1.5.2, vlastnosti funkcí (prostá, na, vzájemně jednoznačná) 1.5.3, vlastnosti relací (reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitviní) 1.6.1, ekvivalence 1.6.2.

  Tvrzení a věty: O vlastnostech složeného zobrazení 1.5.4, o ekvivalencích (rozklad množiny na třídy ekvivalence) 1.6.3.

- **Uspořádání**

  Definice: (Částečné) uspořádání 1.6.2, lineární uspořádání (jako speciální případ částečného uspořádání) 1.6.2, bezprostřední předchůdce str. 54, minimální a maximální prvky 2.2.2, nejmenší a největší prvek 2.2.4, vnoření čum 2.3.1, nezávislá množina 2.4.1, řetězec 2.4.3.

  Příklady: Uspořádání čísel podle velikosti, uspořádání přirozených čísel dělitelností, uspořádání množin inkluzí.

  Tvrzení a věty: Řetězec bezprostředních předchůdců v konečném uspořádání 2.1.4, existence minimálních a maximálních prvků v konečných uspořádáních 2.2.3, rozšíření konečného částečného uspořádání na lineární 2.2.1, vnoření částečného uspořádání do uspořádání inkluzí 2.3.2, Věta o Dlouhém a Širokém 2.4.5, Erdős-Szekerésova věta o monotonních podposloupnostech 2.4.6.

- **Kombinatorické počítání**

  Definice a značení: Symbol $\binom{X}{k}$ pro množinu všech k-prvkových podmnožin množiny X, funkce faktoriál $n!$, kombinační čísla $\binom{n}{k}$.

Tvrzení a věty: Počet zobrazení n-prvkové množiny do m-prvkové 3.1.1, počet podmnožin n-prvkové množiny 3.1.2, počet podmnožin sudé či liché velikosti 3.1.3, počet prostých obrazení n-prvkové množiny do m-prvkové 3.1.4, počet vzájemně jednoznačných zobrazení mezi stejně velkými množinami - faktoriál kapitola 3.2, počet k-prvkových podmnožin 3.3.2, Pascalův trojúhelník str. 79, binomická věta str. 79, odhady pro faktoriál $n^{n/2} \leq n! \leq (\frac{n+1}{2})^n$ - Věta 3.4.1, lepší odhad $e(\frac{n}{e})^n \leq n! \leq en(\frac{n}{e})^n$ - Věta 3.4.4, Stirlingova formule (bez důkazu) na str. 92, odhad pro kombinační čísla $\binom{n}{k} \leq (\frac{en}{k})^k$ - Věta 3.5.1.

- **Princip Inkluze a Exkluze**

  Věta 3.6.2 (formulace PIE - vzorec pro výpočet mohutnosti sjednocení n množin jako kombinace velikostí částečných průniků). Aplikace na problém šatnářky - počet permutací bez pevného bodu Kapitola 3.7.

- **Grafy**

  Definice: (Neorientovaný) graf 4.1.1, úplné grafy, cesty, cykly str. 113, izomorfismus grafů 4.1.2, podgrafy 4.2.1, souvislost a komponenty souvislosti 4.2.2, vzdálenost v grafu str. 121, cesty, tahy, sledy str. 122, stupeň vrcholu a skóre grafu str. 129.

  Tvrzení a věty: Kreslení grafů jedním tahem 4.5.1, princip sudosti 4.4.1, věta o skóre 4.4.3.

- **Stromy**

  Definice: Strom jako souvislý acyklický graf 5.1.1, kostra grafu 5.3.1.

  Tvrzení a věty: Lemma o existenci listů 5.1.2, ekvivalentní charakterizace stromů 5.1.4, centrum stromu 5.2.1, izomorfismus stromů přes 0-1 kódování - kapitola 5.2, hladový algoritmus pro hledání minimální kostry 5.3.3 a jeho správnost 5.3.5, počet stromů na n-prvkové množině je n^{n-2} - Věta 8.1.1 s aspoň jedním důkazem (na přednáškách jsme si ukázali důkaz podle kapitoly 8.3).

- **Rovinné grafy**

  Definice: Nekřížící se rovinné nakreslení 6.1.1., stěny nakreslení str. 189, dělení grafu 4.7.2, barevnost grafu 6.4.1.

Tvrzení a věty: Jordanova věta o kružnici (bez důkazu) 6.2.1, K_5 není rovinný graf 6.2.2, Kuratowského věta 6.2.4, Eulerův vztah 6.3.1, pravidelné mnohostěny str. 202, maximální počet hran rovinného grafu o n vrcholech je $3n - 6$ - Tvrzení 6.3.3, každý rovinný graf má vrchol stupně nejvýše 5 - důsledek na str. 207, každý rovinný graf lze obarvit pomocí 5 barev - Věta 6.4.3.