Neexaktní lineární programování, lineární semi-infinitní programování – stručný přehled výsledků

Milan Hladík
Charles University, Faculty of Mathematics and Physics,
Malostranské nám. 25, 118 00, Prague, Czech Republic,
e-mail: milan.hladik@matfyz.cz.

28. června 2010

Abstrakt

Uvádíme zde stručný přehled výsledků (bez důkazů) z neexaktního lineárního programování a lineárního semi-infinitního programování. Jedná se o úlohy lineárního programování ve kterých vstupní data nejsou známa přesně, ale nabývají hodnot z daných množin. Některé typy úloh lze převést na obyčejnou úlohu lineárního programování. Uvádíme několik poznatků a referencí týkající se duality a podmínek optimality. Předkládáme základní myšlenky různých typů numerických metod řešení.

1 Úvod

V běžné úloze lineárního programování se předpokládá, že koeficienty v omezeních jsou pevně dány. V praxi se tento předpoklad nemusí vždy naplnit. "Nejistotě" ve vstupních datech se věnuje např. "fuzzy" programování, stochastické programování nebo analýza citlivosti (která poskytuje informaci o lokálním chování blízko předpokládaných hodnot koeficientů). V této práci se ale zabýváme situací, kdy koeficienty v omezeních úlohy sice neznáme přesně, ale víme, že náleží do nějakých předem známých množin. Takto zadanou úlohu nazveme úlohou *neexaktního lineárního programování*. Speciálně, představují-li dané množiny zobecněné intervaly (srovnej s (2.6)), potom se jedná o úlohu intervalové analýzy. Dalším speciálním typem úloh s nepřesnými daty jsou úlohy *lineárního semi-infinitního programování*, ve kterých se vyskytuje konečný počet proměnných, ale nekonečný počet lineárních omezení (viz úloha (XV)). Lineární semi-infinitní programování zaznamenalo za posledních několik desetiletí prudký vývoj a na toto téma bylo napsáno přes tisíc článků.

Historie neexaktního lineárního programování počíná v sedmdesátých letech dvacátého století. Mezi první práce na toto téma můžeme zařadit např. [12], [13], [14], [17].

Sekce 2 se věnuje nejjednodušším případům, kdy lze danou úlohu neexaktního programování výrazně zjednodušit, popřípadě převést na obyčejnou úlohu lineárního programování (podobnými tématy se zabývá "robustní optimalizace" – viz [1]). Uvádíme dualitní vztah mezi některými typy úloh. Čerpáme zejména z článků [11], [16].

Sekce 3 dává základní teoretické poznatky o lineárním semi-infinitním programování – zejména podmínky optimality, geometrické vlastnosti, dualitu. Více o podmínkách optimality prvního a druhého řádu, geometrických vlastnostech, ale také o stabilitě, kvalifikacích omezení (které kvalifikují např. to, že daná podmínka je nutnou či postačující podmínkou optimality) viz [4], [5], [6], [7], [15].

Sekce 4 se zabývá numerickým řešením úloh lineárního semi-infinitního programování – viz např. [2], [3], [7], [8], [9], [15], [16], [18].

Dvě aplikace lineárního semi-infinitního programování z [7], [15] uvádíme v sekci 5.

Používáme následující značení:

Symbol	Význam
$\mathbf{0}$	vektor $(0,\ldots,0)^T$
$\mathbf{1}$	vektor $(1,\ldots,1)^T$
$\boldsymbol{A}_{i,\cdot}$	i-tý řádek matice $\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{A}_{\cdot,j}$	j-tý sloupec matice $\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{B}$	nerovnost matic (a vektorů) složkách, tj. $\boldsymbol{A}_{ij} \geq \boldsymbol{B}_{ij}\ \forall i, j$
$\boldsymbol{A} \succeq 0$	matice $\boldsymbol{A}$ je positivně semidefinitní
$conv\,cone(\mathcal{M})$	nejmenší konvexní kužel (s vrcholem v počátku) obsahující množinu $\mathcal{M}$
$span(\mathcal{M})$	lineární obal množiny $\mathcal{M}$
$int\,\mathcal{M}$	vnitřek množiny $\mathcal{M}$
$rbd\,\mathcal{M}$	relativní hranice množiny $\mathcal{M}$
$cl\,\mathcal{M}$	uzávěr množiny $\mathcal{M}$
$\mathcal{M}^+$	pozitivní polára množiny $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$, tj. $\mathcal{M}^+ = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \geq 0\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{M}\}$
$v(P)$	optimální hodnota úlohy P

Připomeňme též, že úloha P se nazývá *nepřípustná*, pokud nemá přípustné řešení (tj. žádný bod nevyhovuje omezením úlohy).

2 Úlohy a dualita v neexaktním lineárním programování

2.1 Čtyři základní úlohy

Mějme dány neprázdné množiny $\mathcal{Q}_j \subset \mathbb{R}^m,\ j \in \{1,\ldots,n\}$, a $\mathcal{P}_i \subset \mathbb{R}^n,\ i \in \{1,\ldots,m\}$. Uvažujme následující čtyři třídy úloh neexaktního lineárního programování. V prvních dvou úlohách nějaký bod patří do množiny přípustných řešení, pokud splňuje omezení pro všechny realizace koeficientů (tzv. *konzervativní* či *pesimistický* přístup):

$$\max\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^I\right\}, \qquad \mathcal{X}^I = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\ \forall \boldsymbol{A}_{i,\cdot} \in \mathcal{P}_i,\ i = 1,\ldots,m\}, \tag{I}$$
$$\max\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^{II}\right\}, \qquad \mathcal{X}^{II} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\ \forall \boldsymbol{A}_{\cdot,j} \in \mathcal{Q}_j,\ j = 1,\ldots,n\}. \tag{II}$$

V dalších dvou úlohách naopak nějaký bod patří do množiny přípustných řešení, pokud splňuje omezení pro alespoň jednu realizaci koeficientů (tzv. *optimistický* přístup):

$$\min\left\{\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y};\ \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^I\right\}, \tag{III}$$

kde

$$\mathcal{Y}^I = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0},\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c} \text{ pro nějaké } \boldsymbol{A}_{i,\cdot} \in \mathcal{P}_i,\ i = 1,\ldots,m\}. \tag{2.1}$$

a

$$\min\left\{\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y};\ \boldsymbol{y}\in\mathcal{Y}^{II}\right\}, \tag{IV}$$

kde

$$\mathcal{Y}^{II}=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}\text{ pro nějaké }\boldsymbol{A}_{\cdot,j}\in\mathcal{Q}_j,\ j=1,\ldots,n\}. \tag{2.2}$$

Množiny přípustných řešení $\mathcal{X}^I$, $\mathcal{X}^{II}$ jsou vždy konvexní. Podle [16] je množina $\mathcal{Y}^I$ konvexní, jsou-li konvexní $\mathcal{P}_i$ pro všechna $i\in\{1,\ldots,m\}$. Množina $\mathcal{Y}^{II}$ není obecně konvexní i když jsou všechny množiny $\mathcal{Q}_j,\ j\in\{1,\ldots,n\}$, konvexní (protipříklad viz [16]).

2.1.1 Úloha (I)

Úloha (I) je speciálním typem úlohy lineárního semi-infinitního programování, kterým se zabýváme v sekci 3. Proto poznatky uvedené v sekci 3 platí také i pro úlohu (I).

Definice 2.1
Úlohu

$$\max\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x}\leq b_i\ \forall i=1,\ldots,m\right\},$$

kde $\boldsymbol{a}_i\in\mathcal{P}_i,\ i\in\{1,\ldots,m\}$ jsou pevné vektory, nazveme *instancí* problému (I).

Platí následující tvrzení z [1], které dává do souvislosti přípustnost úlohy (I) (tj. neprázdnost množiny $\mathcal{X}^I$) s přípustností jejích instancí. Poznamenejme, že bez uvedených předpokladů tvrzení 2.2 výroky *(1), (2)* obecně neplatí.

Tvrzení 2.2
Nechť existuje konvexní kompaktní množina $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^n$ obsahující všechna přípustná řešení všech instancí problému (I). Potom

(1) Úloha (I) je nepřípustná právě tehdy, když je nepřípustná nějaká instance úlohy (I).

(2) Je-li úloha (I) přípustná a v^* její optimální hodnota, potom v^* je rovno supremu optimálních hodnot všech instancí. □

2.1.2 Zjednodušení úlohy (II)

Ukážeme si, jak zjednodušit popis množiny $\mathcal{X}^{II}$ z (II) (pro ostatní úlohy tento postup obecně nelze použít). Předpokládejme, že množiny $\mathcal{Q}_j,\ j\in\{1,\ldots,n\}$, jsou omezné. Definujme

$$\overline{a}_{ij}=\sup\left\{a_{ij};\ (a_{1j},\ldots,a_{mj})^T\in\mathcal{Q}_j\right\},\quad \underline{a}_{ij}=\inf\left\{a_{ij};\ (a_{1j},\ldots,a_{mj})^T\in\mathcal{Q}_j\right\} \tag{2.3}$$

a matice

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a}_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n},\quad \underline{\boldsymbol{A}}=(\underline{a}_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}. \tag{2.4}$$

Pokud $\mathcal{Q}_j,\ j\in\{1,\ldots,n\}$, představují konvexní polyedry, potom výpočet extremálních hodnot $\underline{a}_{ij}$, $\overline{a}_{ij}$ podle (2.3) představuje řešení úloh lineárního programování o počtu $2mn$. Pokud množiny $\mathcal{Q}_j,\ j\in\{1,\ldots,n\}$, představují nadkoule v prostoru $\mathbb{R}^m$, potom extremální hodnoty $\underline{a}_{ij}$, $\overline{a}_{ij}$ můžeme určit snadno a dokonce vyjádřit explicitně. Nechť $\mathcal{Q}_j,\ j\in\{1,\ldots,n\}$, představují nadkoule s popisem $\mathcal{Q}_j=\{\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^m \mid \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{s}_j\|\leq r_j\},\ j\in\{1,\ldots,n\}$, kde $\boldsymbol{s}_j\in\mathbb{R}^m$ jsou jejich středy a $r_j\geq 0$ jejich poloměry. Potom $\overline{\boldsymbol{A}}_{\cdot,j}=\boldsymbol{s}_j+r_j\boldsymbol{1}$, $\underline{\boldsymbol{A}}_{\cdot,j}=\boldsymbol{s}_j-r_j\boldsymbol{1}$. Následující jednoduché tvrzení z [16] říká, že množiny $\mathcal{Q}_j$ z (II) lze nahradit množinami

$$\hat{\mathcal{Q}}_j=\{\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^m \mid \underline{\boldsymbol{A}}_{\cdot,j}\leq\boldsymbol{a}\leq\overline{\boldsymbol{A}}_{\cdot,j}\}. \tag{2.5}$$

Tvrzení 2.3
Nechť množiny $\mathcal{Q}_j,\ j \in \{1,\dots,n\}$, z (II) jsou omezené. Potom platí

$$\mathcal{X}^{II} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\ \forall \boldsymbol{A}_{\cdot,j} \in \hat{\mathcal{Q}}_j,\ j = 1,\dots,n\}.$$

$\square$

Dle tvrzení 2.3 lze tedy množinu $\mathcal{X}^{II}$ přepsat do tvaru

$$\mathcal{X}^{II} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\ \forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}:\ \underline{\boldsymbol{A}} \le \boldsymbol{A} \le \overline{\boldsymbol{A}}\}. \tag{2.6}$$

Množiny $\hat{\mathcal{Q}}_j,\ j \in \{1,\dots,n\}$, z (2.5) představují zobecněné intervaly v prostoru $\mathbb{R}^m$ a tudíž (viz též [16], [17]) je úloha (II) ekvivalentní s obyčejnou úlohou lineárního programování

$$\max\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^+ - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^-;\ (\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{x}^-) \in \mathcal{X}_\pm\right\},$$

kde

$$\mathcal{X}_\pm = \{(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{x}^-) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}^+ - \underline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}^- \le \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}^+ \ge \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}^- \ge \boldsymbol{0}\}.$$

2.1.3 Převody mezi úlohami (I)–(IV)

Nyní se podívejme, jaký je vztah mezi úlohami (I), (II) a mezi úlohami (III), (IV). Nejprve ukážeme, jak můžeme převést úlohu (II) na úlohu (I). Víme, že za předpokladu omezenosti množin $\mathcal{Q}_j,\ j \in \{1,\dots,n\}$, můžeme množinu přípustných řešení úlohy (II) zapsat ve tvaru (2.6). Definujme

$$\mathcal{P}_i \equiv \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{\boldsymbol{A}}_{i,\cdot} \le \boldsymbol{a} \le \overline{\boldsymbol{A}}_{i,\cdot}\},\ i \in \{1,\dots,m\}. \tag{2.7}$$

Potom $\mathcal{X}^I = \mathcal{X}^{II}$, čímž jsme převedli úlohu (II) na úlohu (I). Pokud $\mathcal{Q}_j,\ j \in \{1,\dots,n\}$, představují zobecněné intervaly i v (2.2), lze analogicky převést i úlohu (IV) na úlohu (III) (neboť $\mathcal{Y}^I = \mathcal{Y}^{II}$). Za předpokladu, že množiny $\mathcal{P}_i,\ i \in \{1,\dots,m\}$, představují zobecněné intervaly, tj. jsou tvaru (2.7) pro nějaké matice $\underline{\boldsymbol{A}}$, $\overline{\boldsymbol{A}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, potom lze obdobně převést úlohu (I) na úlohu (II) a úlohu (III) na úlohu (IV). Obecně ale takovéto převody ("nejistotu" danou v řádcích na "nejistotu" ve sloupcích a naopak) provádět nemůžeme (viz [16]).

2.1.4 Zjednodušení úlohy (III)

Nyní se zabývejme zjednodušením úlohy (III). Nechť $\mathcal{P}_i,\ i \in \{1,\dots,m\}$, jsou omezené konvexní polyedry s vrcholy $\boldsymbol{a}_i^1,\dots,\boldsymbol{a}_i^{v_i}$. Potom úloha (III) je ekvivalentní s úlohou (viz [17]):

$$\min\left\{\sum_{i=1}^m b_i \sum_{j=1}^{v_i} y_i^j;\ \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{v_i} y_i^j \boldsymbol{a}_i^j = \boldsymbol{c},\ y_i^j \ge 0\ \forall i,j\right\}. \tag{V}$$

Je-li $\tilde{y}_i^j,\ i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,v_i\}$, optimální řešení úlohy (V), potom $\tilde{y}_i = \sum_{j=1}^{v_i} \tilde{y}_i^j$ je optimální řešení (III) s volbou $\tilde{\boldsymbol{a}}_i \in \mathcal{P}_i$, pro kterou platí:

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{v_i} \frac{\tilde{y}_i^j}{\tilde{y}_i}\boldsymbol{a}_i^j, & \tilde{y}_i \ne 0, \\ \text{libovolné } \boldsymbol{a}_i \in \mathcal{P}_i, & \tilde{y}_i = 0. \end{cases}$$

Úloha (V) je obyčejnou úlohou lineárního programování, ale s velkým počtem proměnných (je jich $\sum_{i=1}^m v_i$). Pokud množiny $\mathcal{P}_i,\ i \in \{1,\dots,m\}$, jsou tvaru (2.7), potom lze úlohu (III) ještě více zjednodušit, neboť množinu $\mathcal{Y}^I$ lze přepsat do tvaru (viz např. [10])

$$\mathcal{Y}^I = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \mid \underline{\boldsymbol{A}}^T\boldsymbol{y} \le \boldsymbol{c} \le \overline{\boldsymbol{A}}^T\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}\}.$$

Poznámka 2.4
Analogickou úvahu jako pro úlohu (III) lze provést i pro následující varianty úlohy (III)

$$\min\left\{\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y};\ \boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}\text{ pro nějaké }\boldsymbol{A}_{i,\cdot}\in\mathcal{P}_i,\ i=1,\ldots,m\right\}, \tag{VI}$$

$$\min\left\{\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y};\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}\text{ pro nějaké }\boldsymbol{A}_{i,\cdot}\in\mathcal{P}_i,\ i=1,\ldots,m\right\}. \tag{VII}$$

Nechť $\mathcal{P}_i,\ i\in\{1,\ldots,m\}$, jsou omezené konvexní polyedry s vrcholy $\boldsymbol{a}_i^1,\ldots,\boldsymbol{a}_i^{v_i}$. Potom úloha (VI) je ekvivalentní s úlohou

$$\min\left\{\sum_{i=1}^m b_i\sum_{j=1}^{v_i}y_i^j;\ \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{v_i}y_i^j\boldsymbol{a}_i^j\leq\boldsymbol{c},\ y_i^j\geq 0\ \forall i,j\right\},$$

a úloha (VII) je ekvivalentní s úlohou

$$\min\left\{\sum_{i=1}^m b_i\sum_{j=1}^{v_i}y_i^j;\ \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{v_i}y_i^j\boldsymbol{a}_i^j\leq\boldsymbol{c}\ \forall i,j\right\}.$$

Pokud množiny $\mathcal{P}_i,\ i\in\{1,\ldots,m\}$, jsou tvaru (2.7), potom lze úlohu (VI) snadno zjednodušit na tvar

$$\min\left\{\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y};\ \boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0},\ \underline{\boldsymbol{A}}^T\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}\right\}.$$

Úlohu (VII) nelze za stejného předpokladu výrazně zjednodušit, neboť je to NP-těžký problém.

2.2 Další úlohy

A. Uvažujme úlohu z [16]:

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}}\min_{\boldsymbol{c}\in\mathcal{C}}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x},\quad \mathcal{X}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mid\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}\ \forall\boldsymbol{A}_{i,\cdot}\in\mathcal{P}_i,\ i=1,\ldots,m\}, \tag{VIII}$$

kde $\mathcal{C}\subset\mathbb{R}^n$ je kompaktní konvexní množina. Jedná se o zobecnění úlohy (I), neboť zde navíc uvažujeme "nejistotu" i ve vektoru cílové funkce. Zajímá nás nejlepší (maximální) hodnota cílové funkce pro nejhorší možnou realizaci vektoru $\boldsymbol{c}\in\mathcal{C}$. Zavedením nové proměnné x_{n+1} můžeme úlohu (VIII) přepsat na

$$\max\left\{x_{n+1};\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}\ \forall\boldsymbol{A}_{i,\cdot}\in\mathcal{P}_i,\ i=1,\ldots,m,\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}-x_{n+1}\geq 0\ \forall\boldsymbol{c}\in\mathcal{C}\right\},$$

což je speciální typ úlohy (I).

B. Uvažujme úlohu z [16]:

$$\max\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{x}\in\mathcal{X}\right\},\quad \mathcal{X}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mid\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}\ \forall\boldsymbol{A}\in\mathcal{M}\}, \tag{IX}$$

kde $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^{m\times n}$ je kompaktní množina matic, $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$. Také tento problém lze převést na úlohu (I). Stačí definovat $\mathcal{P}_i\equiv\{\boldsymbol{A}_{i,\cdot}\in\mathbb{R}^n\mid\boldsymbol{A}\in\mathcal{M}\}$, $i\in\{1,\ldots,m\}$.

C. Uvažujme speciální typ úlohy (II) s přidanými podmínkami nezápornosti proměnných (viz [11], [17]):

$$\max\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{x}\in\mathcal{X}_0\right\},\quad \mathcal{X}_0=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mid\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}\ \forall\boldsymbol{A}_{\cdot,j}\in\mathcal{Q}_j,\ j=1,\ldots,n\}. \tag{X}$$

Díky nezápornosti proměnných lze množinu přípustných řešení $\mathcal{X}_0$ přepsat do tvaru (srovnej s (2.6)):

$$\mathcal{X}_0 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\},$$

kde matice $\overline{\boldsymbol{A}}$ je definována stejně jako v (2.4). V tomto případě můžeme úlohu zobecnit i na případ, kdy množiny $\mathcal{Q}_j,\ j \in \{1,\dots,n\}$, nejsou nutně omezené. Dostaneme-li $\overline{a}_{ij} = \infty$ pro nějaké i, j, potom musí nutně proměnná $x_j = 0$.

D. Uvažujme úlohu (viz [11]):

$$\min\left\{\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y};\ \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}_0\right\}, \tag{XI}$$

kde

$$\mathcal{Y}_0 = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \text{ pro nějaké } \boldsymbol{A}_{\cdot,j} \in \mathcal{Q}_j,\ j = 1,\dots,n\}.$$

Jedná se o speciální typ úlohy (IV), neboť stačí zavést doplňkové proměnné do nerovnic $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$. Předpokládejme, že množiny $\mathcal{Q}_j,\ j \in \{1,\dots,n\}$, jsou konvexní a tzv. “directed to the right”, to znamená $\forall \boldsymbol{a}^1,\ \boldsymbol{a}^2 \in \mathcal{Q}_j$ existuje $\boldsymbol{a}^0 \in \mathcal{Q}_j$ takové, že $\boldsymbol{a}^1 \leq \boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{a}^2 \leq \boldsymbol{a}^0$. Potom množinu přípustných řešení $\mathcal{Y}_0$ lze přepsat do tvaru

$$\mathcal{Y}_0 = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \mid \overline{\boldsymbol{A}}^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\},$$

kde matice $\overline{\boldsymbol{A}}$ je definována stejně jako v (2.4). Potom je také zřejmé, že úlohy (X), (XI) jsou navzájem duální.

E. Uvažujme dle [11] následující zobecnění úlohy (II), kde množina přípustných řešení je tvaru

$$\mathcal{X}_D^{II} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \in \mathcal{Q}(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{b})\ \forall \boldsymbol{A}_{\cdot,j} \in \mathcal{Q}_j,\ j = 1,\dots,n\}, \tag{XII}$$

přičemž $\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{b})$ je konvexní polyedr s popisem ($\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^l$):

$$\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{b}\}.$$

Bod $\boldsymbol{x}$ náleží do $\mathcal{X}_D^{II}$ právě tehdy, když splňuje nerovnost

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \quad \forall \boldsymbol{a}_j \in \mathcal{Q}_j,\ j = 1,\dots,n.$$

Označme $\mathcal{Q}_j^D = \{\boldsymbol{D}\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^l \mid \boldsymbol{a} \in \mathcal{Q}_j\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$. Takto jsme úlohu (XII) převedli na úlohu (II) s popisem množiny přípustných řešení

$$\mathcal{X}_D^{II} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\ \forall \boldsymbol{A}_{\cdot,j} \in \mathcal{Q}_j^D,\ j = 1,\dots,n\}.$$

F. Uvažujme dle [1] speciální typ úlohy (I), kde $\mathcal{P}_i$ jsou tzv. *elipsoidy* s popisem

$$\mathcal{P}_i = \{\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{R}_i\boldsymbol{u};\ \|\boldsymbol{u}\| \leq 1\},\ i = 1,\dots,m$$

pro určité vektory $\boldsymbol{r}_i \in \mathbb{R}^n$ a matice $\boldsymbol{R}_i \in \mathbb{R}^{n\times k},\ i \in \{1,\dots,m\}$. Bod $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je pak přípustný právě tehdy, když pro všechna $i \in \{1,\dots,m\}$ platí

$$b_i \geq \max\left\{\boldsymbol{r}_i^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{R}_i^T\boldsymbol{x};\ \|\boldsymbol{u}\| \leq 1\right\} = \boldsymbol{r}_i^T\boldsymbol{x} + \|\boldsymbol{R}_i^T\boldsymbol{x}\|.$$

Úloha (I) potom přejde v úlohu

$$\max\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{r}_i^T\boldsymbol{x} + \|\boldsymbol{R}_i^T\boldsymbol{x}\| \leq b_i\ i = 1,\dots,m\right\},$$

což je tzv. *kuželová kvadratická* úloha s konečně mnoha omezeními. Tuto úlohu lze řešit v polynomiálním čase tzv. metodou vnitřních bodů. Poznamenejme, že do této podoby lze přepsat i úlohu (I), kde $\mathcal{P}_i$ jsou omezené konvexní polyedry resp. úlohu (IX), kde $\mathcal{M}$ je omezený konvexní polyedr.

2.3 Dualita mezi úlohami (I) a (III)

Budeme se zabývat dualitou mezi úlohami (I) a (III). Opět poznamenejme, že úlohy (I), (III) jsou speciálním typem úloh lineárního semi-infinitního programování (XV), (XVI). Tudíž poznatky uvedené v sekci 3.2 platí i pro úlohy (I), (III). Předpokládejme, že množiny $\mathcal{P}_i,\ i \in \{1,\dots,m\}$, jsou kompaktní. Definujme následující konvexní kužely s vrcholy v počátku (tzv. *první* a *druhý momentový kužel* množiny $\mathcal{X}^I$)

$$\mathcal{M}_n = conv\,cone\Big(\bigcup_{i=1}^{m}\mathcal{P}_i\Big), \tag{2.8}$$

$$\mathcal{M}_{n+1} = conv\,cone\Big(\bigcup_{i=1}^{m}\Big\{\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_i\\ b_i\end{pmatrix} \mid \boldsymbol{a}_i \in \mathcal{P}_i\Big\}\Big). \tag{2.9}$$

Následující věta o dualitě je převzata z [16].

Věta 2.5

(1) Buď $\mathcal{M}_{n+1}$ uzavřená množina. Pokud má úloha (I) optimální řešení nebo úloha (III) je přípustná a $v(III) > -\infty$, potom úloha (III) má optimální řešení a $v(I) = v(III)$.

(2) Nechť $\boldsymbol{c} \in int\,\mathcal{M}_n$ a nechť úloha (I) je přípustná. Potom úloha (I) má optimální řešení a $v(I) = v(III)$. □

Postačující podmínky pro uzavřenost $\mathcal{M}_{n+1}$ jsou např. následující dvě:

- Slaterova podmínka, tj. existuje $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 < \boldsymbol{b}\ \forall \boldsymbol{A}_{i,\cdot} \in \mathcal{P}_i,\ i = 1,\dots,m$.
- existuje konečná podmnožina $\mathcal{S}$ množiny $\bigcup_{i=1}^{m}\big\{\big(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{a}_i\\ b_i\end{smallmatrix}\big) \mid \boldsymbol{a}_i \in \mathcal{P}_i\big\}$, pro níž platí $\mathcal{M}_{n+1} = conv\,cone(\mathcal{S})$.

Následující důsledek udává postačující podmínky pro silnou dualitu úloh (I), (III).

Důsledek 2.6

(1) Nechť $\boldsymbol{c} > \boldsymbol{0}$ a přípustná množina úlohy (I) je omezená. Potom úlohy (I), (III) mají optimální řešení a $v(I) = v(III)$.

(2) Nechť $\mathcal{P}_i,\ i \in \{1,\dots,m\}$, jsou konvexní polyedry. Má-li jedna z úloh (I), (III) optimální řešení, potom i druhá má optimální řešení a $v(I) = v(III)$. □

Dle [17] platí navíc: Jsou-li $\mathcal{P}_i,\ i \in \{1,\dots,m\}$, konvexní polyedry a jedna z úloh (I), (III) je neomezená, potom druhá je nepřípustná.

2.4 Dualita mezi úlohami (XIII) a (XIV)

Buď $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná uzavřená konvexní množina. Uvažujme následující úlohy (viz [13], [14]):

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}}\ \min_{\boldsymbol{c}\in\mathcal{C}}\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, \quad \mathcal{X} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\}, \tag{XIII}$$

$$\min\big\{\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y};\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0} \text{ pro nějaké } \boldsymbol{w} \in \mathcal{C}\big\}, \tag{XIV}$$

kde $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Pro úlohy (XIII), (XIV) platí následující věta o dualitě převzatá z [13], [14].

Věta 2.7

(1) *Jsou-li úlohy* (*XIII*), (*XIV*) *přípustné, pak* $v(XIV) \geq v(XIII)$.

(2) *Je-li* $v(XIII) > -\infty$, *potom úloha* (*XIV*) *má optimální řešení a* $v(XIV) = v(XIII)$.

(3) *Je-li* $\boldsymbol{x}^*$ *optimální řešení úlohy* (*XIII*) *a* $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{w}^*)$ *optimální řešení úlohy* (*XIV*), *potom platí podmínka komplementarity* $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b})^T \boldsymbol{y}^* = 0$.

(4) *Je-li* $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{w}^*)$ *optimální řešení úlohy* (*XIV*), *potom existuje nějaké optimální řešení úlohy* $\max \left\{ \boldsymbol{w}^{*T}\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \right\}$, *které je optimálním řešením úlohy* (*XIII*). $\square$

3 Lineární semi-infinitní programování

Úlohou lineárního semi-infinitního programování rozumíme úlohu:

$$\inf \left\{ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x};\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \right\}, \quad \mathcal{X} = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}_t^T \boldsymbol{x} \geq b_t \ \forall t \in \mathcal{T} \}. \tag{XV}$$

K úloze (XV) uvažujeme duální (tzv. *Haarovu*) úlohu ve tvaru

$$\sup \left\{ \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\lambda};\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{Y} \right\}, \quad \mathcal{Y} = \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{T}|} \mid \sum_{t \in \mathcal{T}} \lambda_t \boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{c} \right\}, \tag{XVI}$$

kde $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} : \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} : \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}$ a $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^m$ kompaktní (obecně nekonečná) množina. Symbol $\mathbb{R}_+^{|\mathcal{T}|}$ z (XVI) značí množinu funkcí $\boldsymbol{\lambda} : \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}_+$, které jsou nenulové (tj. kladné) jen pro konečný počet prvků z $\mathcal{T}$ (potom je výraz $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\lambda} = \sum_{t \in \mathcal{T}} b_t \lambda_t$ dobře definovaný, neboť sčítáme přes konečný počet prvků).

Definice 3.1
Nerovnice $\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \geq b$ se nazývá *lineární důsledek* množiny $\mathcal{X}$, jestliže je splněna pro všechna $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$. Množina $\mathcal{X}$ se nazývá *lokálně Farkas–Minkowská (LFM)*, jestliže každý lineární důsledek $\mathcal{X}$, určující opěrnou nadrovinu $\mathcal{X}$, je zároveň lineárním důsledkem nějakého konečného podsystému $\mathcal{X}$. Dále označme jako $A(\boldsymbol{x}) = \mathit{conv\,cone}\{\boldsymbol{a}_t \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}_t^T \boldsymbol{x} = b_t\}$ tzv. *aktivní kužel*.

Platí následující věta z [6]. Podmínka (2) věty je Karush–Kuhn–Tuckerova podmínka (KKT), podmínka (4) je podmínkou na sedlový bod lagrangeovy funkce $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \sum_{t \in \mathcal{T}} \lambda_t (b_t - \boldsymbol{a}_t^T \boldsymbol{x})$. Poznamenejme, že exituje mnoho variant KKT-podmínek za platnosti různých kvalifikačních podmínek omezení (např. viz [15]), pro ilustraci uvádíme jen jednu.

Věta 3.2
Nechť $\mathcal{X}$ *je (LFM) a nechť* $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{X}$. *Potom následující podmínky jsou ekvivalentní*

(1) $\boldsymbol{x}^*$ *je optimálním řešením úlohy* (*XV*);

(2) $\boldsymbol{c} \in A(\boldsymbol{x}^*)$;

(3) *existuje* $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathcal{Y}$ *takové, že* $\lambda_t^* (\boldsymbol{a}_t^T \boldsymbol{x}^* - b_t) = 0 \ \forall t \in \mathcal{T}$;

(4) *existuje* $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{T}|}$ *takové, že* $L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) \leq L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \leq L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)$ *pro všechna* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *a* $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{T}|}$. $\square$

3.1 Geometrické vlastnosti množiny $\mathcal{X}$

V této sekci uvádíme mj. podmínky, za kterých je množina $\mathcal{X}$ omezená, neprázdná, podmínky určující krajní bod $\mathcal{X}$.

Je-li množina $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^m$, potom je $\mathcal{X}$ vždy uzavřená a konvexní množina (viz [5], [15]). Tvrzení platí i naopak. Každá uzavřená konvexní množina může být reprezentována ve formě $\mathcal{X}$ pro určité $\boldsymbol{a} : \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^n$, $b : \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}$ a $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^m$.

Označme tzv. *referenční kužel* k množině $\mathcal{X}$ jako

$$\mathcal{K} = conv\, cone\Big(\Big\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} \mid t \in \mathcal{T} \Big\} \cup \Big\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ -1 \end{pmatrix} \Big\}\Big). \tag{3.1}$$

Potom dle [6] platí (je-li $\mathcal{X} \neq \emptyset$), že $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geq b$ je lineární důsledek $\mathcal{X}$ právě tehdy, když $\binom{\boldsymbol{a}}{b} \in cl\,\mathcal{K}$. Množina $\mathcal{X}$ představuje konvexní polyedr právě tehdy, když $cl\,\mathcal{K}$ představuje konvexní polyedrický kužel. Následující věta z [4] uvádí ekvivalentní podmínku omezenosti množiny $\mathcal{X}$.

Věta 3.3
Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) *Množina $\mathcal{X}$ je omezená;*

(2) $\{\boldsymbol{a}_t^T\boldsymbol{x} \geq 0 \mid t \in \mathcal{T}\} = \{\boldsymbol{0}\}$;

(3) $\mathcal{M}_n = \mathbb{R}^n$;

(4) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ -1 \end{pmatrix} \in int\,\mathcal{K}$;

(5) *existuje konečná $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ taková, že $\mathcal{X}(\mathcal{T}')$ je omezená množina.* $\square$

Definujme analogicky jako v (2.8) tzv. *první* a *druhý momentový kužel* pro úlohu (XV):

$$\mathcal{M}_n = conv\, cone\{\boldsymbol{a}_t \mid t \in \mathcal{T}\}, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{M}_{n+1} = conv\, cone\Big\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} \mid t \in \mathcal{T} \Big\} \tag{3.3}$$

Z definice množiny $\mathcal{Y}$ přímo plyne, že $\mathcal{Y} \neq \emptyset \Leftrightarrow \boldsymbol{c} \in \mathcal{M}_n$. Následující věta 3.4 z [5] udává zase ekvivalentní podmínky přípustnosti úlohy (XV). Pro $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ značíme symbolem XV($\mathcal{T}'$) úlohu (XV) s indexovou množinou $\mathcal{T}'$ a symbolem $\mathcal{X}(\mathcal{T}')$ množinu přípustných řešení této úlohy.

Věta 3.4
Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $\mathcal{X} \neq \emptyset$;

(2) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl\,\mathcal{M}_{n+1}$;

(3) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl\,\mathcal{K}$;

(4) *Pro každou spočetnou množinu $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ je $\mathcal{X}(\mathcal{T}') \neq \emptyset$;*

(5) *existuje kompaktní množina, která má neprázdný průnik s každým systémem $\mathcal{X}(\mathcal{T}')$ pro všechny konečné $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.* $\square$

Definice 3.5
Označme $D(\mathcal{X}, \boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \varepsilon > 0,\ \boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{d} \in \mathcal{X}\}$ množinu *přípustných směrů* z bodu $\boldsymbol{x}$. Množina $\mathcal{X}$ se nazývá *lokálně polyedrická*, pokud $A(\boldsymbol{x})^+ = D(\mathcal{X}, \boldsymbol{x})$ pro všechna $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$. Označme $L(\boldsymbol{x}) = span\{\boldsymbol{a}_t \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}_t^T\boldsymbol{x} = b_t,\ t \in \mathcal{T}\}$.

Platí následující věta z [6], která charakterizuje krajní bod množiny $\mathcal{X}$ z úlohy (XV) a krajní bod množiny $\mathcal{Y}$ z úlohy (XVI).

Věta 3.6

(1) Je-li $\mathcal{X}$ lokálně polyedrická množina, potom bod $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ je krajní bod $\mathcal{X}$ právě tehdy, když $L(\boldsymbol{x}) = \mathbb{R}^n$.

(2) Bod $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{Y}$ je krajní bod $\mathcal{Y}$ právě tehdy, když vektory $\{\boldsymbol{a}_t \mid \lambda_t > 0\}$ jsou lineárně nezávislé. □

3.2 Dualita

Tato sekce se zabývá dualitou úloh (XV), (XVI) lineárního semi-infinitního programování. Nejprve si ukážeme, jak spočítat optimální hodnotu úlohy (XV) resp. (XVI) pomocí kužele $\mathcal{K}$ resp. $\mathcal{M}_{n+1}$ z (3.1) resp. (3.3). Platí následující rovnost (viz [6])

$$v(\mathrm{XV}) = \max\left\{\alpha \in \mathbb{R};\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \alpha \end{pmatrix} \in cl\,\mathcal{K}\right\}.$$

Pro hodnotu duální úlohy (XVI) podle [7] platí:

$$\begin{aligned} v(\mathrm{XVI}) &= \max\left\{\alpha \in \mathbb{R};\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}\right\} \\ &= \max\left\{\alpha \in \mathbb{R};\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{K}\right\}. \end{aligned}$$

Věty 3.7 a 3.8 čerpáme z [15].

Věta 3.7 (slabá dualita)
Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{Y}$. Potom platí $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\lambda}$. Je-li $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\lambda}$, potom $\boldsymbol{x}$ resp. $\boldsymbol{\lambda}$ je optimální řešení úlohy (XV) resp. (XVI). □

Zavedeme následující kvalifikační podmínky omezení:

- Slaterova podmínka: existuje $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\boldsymbol{a}_t^T\boldsymbol{x}^0 < b_t\ \forall t \in \mathcal{T}$; (3.4)
- duální Slaterova podmínka: $\boldsymbol{c} \in int\,\mathcal{M}_n$. (3.5)

Věta 3.8 (silná dualita)
Nechť platí podmínky (3.4), (3.5). Potom existuje $\boldsymbol{x}^*$ optimální řešení (XV) a $\boldsymbol{\lambda}^*$ optimální řešení (XVI) a $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\lambda}^*$. □

Bez uvedených předpokladů obecně věta 3.8 neplatí. Na rozdíl od lineárního programování, pouhá přípustnost obou duálních úloh (XV), (XVI) neimplikuje existenci jejich optimálních řešení a existence optimálních řešení $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*$ neimplikuje rovnost $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\lambda}^*$ (protipříklad viz [15]). Následující věta z [7] uvádí postačující podmínku pro rovnost $v(\mathrm{XV}) = v(\mathrm{XVI})$ (srovnej s větami 4.4 a 4.6).

Věta 3.9

(1) Nechť $v(XVI) \in \mathbb{R}$ (nemusí se ale nutně nabýt) a $\boldsymbol{c} \in int\,\mathcal{M}_n$. Potom $v(XV) = v(XVI)$ a úloha (XV) má optimální řešení.

(2) Nechť $v(XV) \in \mathbb{R}$ (nemusí se ale nutně nabýt) a $\mathcal{M}_{n+1}$ je uzavřený kužel. Potom $v(XV) = v(XVI)$ a úloha (XVI) má optimální řešení. □

Perfektní dualitou mezi úlohami (XV), (XVI) rozumíme situaci, kdy $v(\text{XV}) = v(\text{XVI})$, anebo $v(\text{XV}) = \infty$ a $v(\text{XVI}) = -\infty$. V lineárním programování je perfektní dualita vždy zaručena. V lineárním semi-infinitním programování platí perfektní dualita pouze za určitých předpokladů. Následující věta z [7] uvádí postačující podmínku pro perfektní dualitu. Využívá se v ní fakt, že je-li množina $\mathcal{M}_{n+1}$ uzavřená, potom je uzavřená i $\mathcal{K}$.

Věta 3.10
Nechť $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Potom $\mathcal{K}$ je uzavřená množina právě tehdy, když úlohy (XV), (XVI) jsou v perfektní dualitě a úloha (XVI) má optimální řešení. $\square$

3.3 Souvislost se semidefinitním programováním

Mějme úlohu semidefinitního programování následujícího typu (viz [15])

$$\min\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x};\ \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{A}_j x_j - \boldsymbol{B} \succeq 0\right\}, \tag{XVII}$$

kde $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ jsou symetrické matice. Obecná symetrická matice $\boldsymbol{M}$ je positivně semidefinitní právě tehdy, když $\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{t} \geq 0\ \forall t : \|\boldsymbol{t}\| = 1$. Tudíž lze úlohu (XVII) přeformulovat jako úlohu lineárního semi-infinitního programování (XV), kde

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{t}} = (\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{t}, \dots, \boldsymbol{t}^T\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{t}), \quad b_{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{t}^T\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{t}, \quad \mathcal{T} = \{\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^k \mid \|\boldsymbol{t}\| = 1\}.$$

Poznamenejme, že z výpočetního hlediska není výhodné úlohu (XVII) převádět na úlohu lineárního semi-infinitního programování, neboť úlohy typu (XVII) lze řešit v polynomiálním čase např. metodou vnitřních bodů či elipsoidovou metodou.

4 Numerické metody řešení

Jak jsme ukázali v sekci 2, v určitých situacích lze převést úlohu neexaktního programování na obyčejnou úlohu lineárního programování. Ovšem i tato úloha může mít veliké rozměry a někdy takováto redukce není vůbec proveditelná. Nezbývá proto než si pomoci numerickými metodami k obecně přibližnému řešení. Numerickými metodami řešení lineárního semi-infinitního programování se věnuje např. [3], [7], [8], [9], [15], [16], [18]. Na prvním místě zmiňme metodu řezů (viz [2], [16], [18]). V [8] autoři studují metody přípusných směrů (včetně rozšíření simplexové metody na řešení lineárního semi-infinitního programování). Numerické metody a geometrické vlastnosti tzv. analytických systémů najdeme v [3]. Perturbační metoda je popsána v [18], logaritmická barierová dekompoziční metoda v [9]. V [15] najdeme metodu přípustných směrů, metodu založenou na KKT-podmínkách a disktretizační metody (nekonečnou množinu indexů nahrazujeme posloupností dostatečně hustých konečných podmnožin). Metoda založená na lokální redukci je popsána v [7].

4.1 Metoda řezů

Uvažujme úlohu (I) ze strany 2. Budeme používat následující značení: $\mathrm{I}(\mathcal{P}_i)$ označuje úlohu (I) se zadanými množinami $\mathcal{P}_i,\ i \in \{1, \dots, m\}$. Metoda řezů dle [16] je založena na následujícím postupu.

Algoritmus 4.1
<u>krok 0</u>. Dány množiny $\mathcal{P}_i,\ i \in \{1, \dots, m\}$. Přiřaď $k = 0$. Vyber konečné podmnožiny $\mathcal{P}_i^k \subset \mathcal{P}_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$. Zvol $\alpha > 0$.

krok k. Vyřeš úlohu lineárního programování $\mathrm{I}(\mathcal{P}_i^k)$, nechť má optimální řešení $\boldsymbol{x}^k$. Dále pro $i = 1, \ldots, m$ řešme následující úlohy obecně nelineárního programování (nechť mají optimální řešení $\boldsymbol{a}_i^k$)

$$\max\left\{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}^k;\ \boldsymbol{a}\in\mathcal{P}_i\right\}$$

a určeme maximum

$$\rho_k = \max\left\{(\boldsymbol{a}_i^k)^T\boldsymbol{x}^k - b_i;\ i=1,\ldots,m\right\}.$$

Je-li $\rho_k < \alpha$, konec. Jinak přiřaď $\mathcal{P}_i^{k+1} = \mathcal{P}_i^k \cup \{\boldsymbol{a}_i^k\},\ i \in \{1,\ldots,m\},\ k = k+1$ a opakuj krok k.

Pro $\mathcal{P}_i,\ i \in \{1,\ldots,m\}$, konvexní polyedry je tato metoda vždy konečná, obecně ale bývá konvergence velmi pomalá. Zrychlením metody řezů se zabývá [2].

4.2 Diskretizační metody

Definujme si některé pojmy týkající se diskretizace úlohy (XV) lineárního semi-infinitního programování. Označme symbolem $\mathcal{S}$ množinu optimálních řešení úlohy (XV). Definujme *vzdálenost* mezi množinami $\mathcal{T}'$ a $\mathcal{T}$ jako $\rho(\mathcal{T}') = \max_{t\in\mathcal{T}} \operatorname{dist}(t,\mathcal{T}')$, kde $\operatorname{dist}(t,\mathcal{T}') = \min_{t'\in\mathcal{T}'} \|t-t'\|$.

Definice 4.2
Úloha (XV) se nazývá *konečně redukovatelná*, pokud existuje konečná množina $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ taková, že $v(\mathrm{XV}) = v(\mathrm{XV}(\mathcal{T}'))$. Úloha (XV) se nazývá *slabě diskretizovatelná*, pokud existuje posloupnost konečných množin $\mathcal{T}_k \subset \mathcal{T},\ k = 1,\ldots$, pro kterou platí $v(\mathrm{XV}(\mathcal{T}_k)) \to v(\mathrm{XV})$ pro $k \to \infty$. Úloha (XV) se nazývá *diskretizovatelná*, pokud pro každou posloupnost konečných množin $\mathcal{T}_k \subset \mathcal{T}$ splňující $\rho(\mathcal{T}_k) \to 0$ existují optimální řešení $\boldsymbol{x}^k$ úloh $\mathrm{XV}(\mathcal{T}_k)$ a platí $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}^k,\mathcal{S}) \to 0$ a $v(\mathrm{XV}(\mathcal{T}_k)) \to v(\mathrm{XV})$.

Platí následující jednoduché vztahy. Je-li $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, potom $v(\mathrm{XV}(\mathcal{T}_1)) \le v(\mathrm{XV}(\mathcal{T}_2))$. Je-li úloha (XV) konečně redukovatelná, potom je i slabě diskretizovatelná. Hlubší výsledky obsahují následující věty 4.3 a 4.4 z [15], věta 4.5 z [7] a věta 4.6 z [5] .

Věta 4.3
Buď $\mathcal{X}$ neprázdná a omezená množina. Potom úloha (XV) je konečně redukovatelná právě tehdy, když je slabě diskretizovatelná a duální úloha (XVI) je přípustná. □

Věta 4.4
Buď $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Potom úloha (XV) je slabě diskretizovatelná právě tehdy, když $v(XV) = v(XVI)$. □

Věta 4.5
Předpokládejme, že platí následující typ Slaterovy podmínky: pro každých $n+1$ bodů $t_0,\ldots,t_n \in \mathcal{T}$ existuje $\boldsymbol{x}^0$ takové, že $\boldsymbol{a}_t^T\boldsymbol{x}^0 > b_t\ \forall t = t_0,\ldots,t_n$. Potom existuje n-prvková množina $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}$, pro kterou platí $v(XV) = v(XV(\mathcal{T}_n))$. □

Věta 4.6
Nechť $\mathcal{X} \neq \emptyset,\ \boldsymbol{c} \notin rbd\,\mathcal{M}_n$. Potom úloha (XV) je slabě diskretizovatelná. □

Následující věty z [15] uvádí postačující podmínky pro diskretizovatelnost.

Věta 4.7
Mějme posloupnost konečných množin $\mathcal{T}_k \subset \mathcal{T},\ k = 1,\ldots$ Nechť $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_k\ \forall k \ge 1$ a nechť $\rho(\mathcal{T}_k) \to 0$ pro $k \to \infty$. Nechť $\mathcal{X}(\mathcal{T}_0)$ je kompaktní množina. Potom úloha (XV) je diskretizovatelná posloupností $\mathcal{T}_k,\ k = 1,\ldots$ □

Věta 4.8
Nechť $\mathcal{X} \neq \emptyset$, $\boldsymbol{c} \in int\, \mathcal{M}_n$. Potom úloha (XV) je diskretizovatelná a množina jejích optimálních řešení $\mathcal{S}$ je neprázdná a omezená. $\square$

Diskretizační metody spočívají na následujícím algoritmickém schematu.

Algoritmus 4.9
krok 0. Vyber konečnou podmožinu $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$, $k = 0$. Zvol $\alpha > 0$.

krok k. Vyřeš úlohu XV($\mathcal{T}_k$), nechť má řešení $\boldsymbol{x}^k$. Je-li $\boldsymbol{a}_t^T \boldsymbol{x}^k \geq b_t - \alpha$ pro všechna $t \in \mathcal{T}$, konec (jsme dostatečně blízko množině přípustných řešení). Jinak vyber "jemnější" diskretizaci $\mathcal{T}_{k+1}$. Přiřaď $k = k + 1$ a opakuj krok k.

Možný způsob jak volit diskretizace je navržený v [7]. Mějme $\boldsymbol{t}^0 \in \mathbb{R}^m$ pevné a $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{h} > \boldsymbol{0}$. Definujme rastr

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{h}} = \{\boldsymbol{t} \in \mathcal{T} \mid t_j = t_j^0 + z_j h_j,\ z_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \dots, m\},$$

který je základem pro následující variantu diskretizační metody.

Algoritmus 4.10
krok 0. Zvol $\boldsymbol{t}^0$, $\boldsymbol{h}^0 \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{h} > \boldsymbol{0}$ a $\alpha > 0$. Přiřaď $k = 1$.

krok k. Přiřaď $\boldsymbol{h}^k = \frac{1}{n_k} \boldsymbol{h}^{k-1}$, kde $n_k \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Vyber $\tilde{\mathcal{T}}_{\boldsymbol{h}^k} \subseteq \mathcal{T}_{\boldsymbol{h}^k}$ (na základě znalosti hodnot $\tilde{\boldsymbol{x}}^{k-1}$, $\tilde{\mathcal{T}}_{\boldsymbol{h}^{k-1}}$). Vyřeš úlohu XV($\tilde{\mathcal{T}}_{\boldsymbol{h}^k}$), nechť má optimální řešení $\tilde{\boldsymbol{x}}^k$. Je-li $\boldsymbol{a}_t^T \tilde{\boldsymbol{x}}^k > b_t - \alpha\ \forall t \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{h}^k}$, konec. Jinak přiřaď $k = k + 1$ a opakuj krok k.

Často se přidává podmínka, aby počet iterací algoritmu byl alespoň k_0, $k_0 \in \mathbb{N}$. Při výběru $\tilde{\mathcal{T}}_{\boldsymbol{h}^k} \subseteq \mathcal{T}_{\boldsymbol{h}^k}$ je vhodné využít maximálně informace z minulých iterací algoritmu. Tento výběr se také doporučuje provést tak, aby platila inkluze

$$\tilde{\mathcal{T}}_{\boldsymbol{h}^k} \supset \{t \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{h}^k} \mid \boldsymbol{a}_t^T \tilde{\boldsymbol{x}}^{k-1} \geq b_t - \gamma\},$$

kde $\gamma > 0$ je pevný práh. Je-li γ "příliš" veliké, vede to k mnoha omezením v úloze XV($\tilde{\mathcal{T}}_{\boldsymbol{h}^k}$), je-li "příliš" malé, může to mít podobný účinek při dalších iteracích algoritmu.

4.3 Výměnná metoda

Uvažujme úlohu (XV). Výměnná metoda je založena na následujícím algoritmickém schematu (viz [7], [15]).

Algoritmus 4.11
krok 0. Vyber konečnou podmožinu $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$, $k = 0$. Zvol $\alpha > 0$.

krok k. Spočítej řešení $\boldsymbol{x}^k$ úlohy XV($\mathcal{T}_k$). Spočítej lokální řešení $t_k^1, \dots, t_k^{v_k}$ úlohy

$$\min \left\{ \boldsymbol{a}_t^T \boldsymbol{x}^k - b_t;\ t \in \mathcal{T} \right\} \tag{4.1}$$

Je-li $\boldsymbol{a}_t^T \boldsymbol{x}^k > b_t - \alpha$ pro všechna $t = t_k^1, \dots, t_k^{v_k}$, konec. Jinak vyber

$$\mathcal{T}_{k+1} \subseteq \mathcal{T}_k \cup \{t_k^1, \dots, t_k^{v_k}\} \tag{4.2}$$

Přiřaď $k = k + 1$ a opakuj krok k.

Tento algoritmus se nazývá *výměnná metoda*, neboť v každé iteraci (4.2) se některé omezení přidají do $\mathcal{X}(\mathcal{T}_k)$ a některé odeberou. Lze uvažovat různé varianty algoritmu. Je-li krok (4.2) nahražen přiřazením $\mathcal{T}_{k+1} = \mathcal{T}_k \cup \{t_k^1, \ldots, t_k^{v_k}\}$, pak se jedná o variantu algoritmu blízkou diskretizačním metodám. Je-li navíc v k. kroku vždy $v_k = 1$ (tj. vybíráme jen jedno lokální řešení úlohy (4.1)), potom se jedná přímo o metodu řezů popsanou v sekci 4.1.

Věta 4.12
Předpokládejme, že v každém kroku algoritmu 4.11 je jedno z $t_k^1, \ldots, t_k^{v_k}$ *zároveň globálním řešením úlohy (4.1). Nechť dále* $\mathcal{X}$ *je omezená množina. Potom algoritmus 4.11 s* $\alpha = 0$ *buď skončí po konečně mnoha krocích v řešení úlohy (XV), nebo každá posloupnost* $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=1}^{\infty}$ *má aspoň jeden hromadný bod a každý hromadný bod této posloupnosti řeší úlohu (XV).* □

4.4 Metoda přípustných směrů

Uvažujme úlohu (XV). Metoda přípustných směrů je založena na následujícím algoritmickém schematu (podrobnější popis jednotlivých kroků viz [15]).

Algoritmus 4.13
krok 0. Vyber počáteční přípustné řešení $\boldsymbol{x}^0$, $k = 0$.

krok k. Je-li $\boldsymbol{x}^k$ lokální minimum úlohy (XV), konec. Jinak vyber směr, ve kterém cílová funkce klesá od bodu $\boldsymbol{x}^k$ a v tomto směru přejdi do přípustného bodu $\boldsymbol{x}^{k+1}$ s minimální hodnotou cílové funkce. Přiřaď $k = k + 1$ a opakuj krok k.

Pododná předchozímu algoritmu je metoda přípustných směrů simplexového typu z [8]. Je založena na následujícím algoritmickém schematu:

Algoritmus 4.14
krok 0. Najdi počáteční přípustné řešení $\boldsymbol{x}^0$ úlohy (XV), $k = 0$. Není-li $\boldsymbol{x}^0$ krajní bod množiny $\mathcal{X}$ (např. podle věty 3.6), potom urči směr a v tomto směru přejdi v krajní bod $\boldsymbol{x}^1$ množiny $\mathcal{X}$ a přiřaď $k = 1$.

krok k. Je-li $\boldsymbol{x}^k$ lokální minimum úlohy (XV), konec. Jinak vyber směr, ve kterém cílová funkce klesá od bodu $\boldsymbol{x}^k$ a v tomto směru přejdi v krajní bod $\boldsymbol{x}^{k+1}$ množiny $\mathcal{X}$. Přiřaď $k = k + 1$ a opakuj krok k.

4.5 Metoda založená na KKT-podmínkách

Definice 4.15
Mějme $\boldsymbol{x}^0 \in \mathcal{X}$ z (XV). *Množina aktivních podmínek* pro bod $\boldsymbol{x}^0$ je definována takto: $\mathcal{I}(\boldsymbol{x}^0) = \{t \in \mathcal{T} \mid \boldsymbol{a}_t^T \boldsymbol{x}^0 = b_t\}$.

Dle [15] je za určitých předpokladů množina aktivních podmínek konečná. Proto i soustava KKT-podmínek je konečněrozměrná a lze ji řešit určitými numerickými metodami (Newtonova, ...).

5 Aplikace

Aplikce lze najít např. v [1], [7], [15].

Příklad 5.1 (minimalizace ceny omezení znečištění vzduchu z [7])
Předpokládejme, že existuje n zdrojů chemicky inertních znečištění vzduchu v kraji, jejichž

emise musí být řízeny tak, aby roční průměr znečištění vzduchu v každém bodě t kraje $\mathcal{T}$ byl pod určitým limitem. Přitom požadujeme, aby hledané řízení bylo co nejlevnější. Nechť a_t^j značí roční průměr koncentrace znečištění v bodě $t \in \mathcal{T}$ zdroje j před řízením a nechť Ψ_t je maximální povolený limit koncentrace znečištění v $t \in \mathcal{T}$. Nechť z_j je zlomek, o který omezíme zdroj j, nesmíme však přesáhnou horní hranici $u_j \in (0, 1)$, tedy $z_j \in \langle 0, u_j \rangle$. Po zahájení řízení bude tedy roční koncentrace znečištění $\sum_{j=1}^{n} (1 - z_j) a_t^j$. Cena za omezení zdroje j o zlomek z_j nechť je lineární $c_j z_j$. Potom program řízení omezení znečištění vzduchu lze formulovat jako úlohu lineárního semi-infinitního programování

$$\min \left\{ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{z};\ (\mathbf{1} - \boldsymbol{z})^T \boldsymbol{a}_t \leq \Psi_t\ \forall t \in \mathcal{T},\ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u} \right\}.$$

Příklad 5.2 (problém portfolia z [15])
Chceme investovat k jednotek peněz mezi n druhů akcií na jedn rok. Do akcie i, $i = 1, \ldots, n$, investujeme x_i jednotek peněz a předpokládáme výdělek z_i jednotek peněz na jednu jednotku vloženou do akcie i. Chceme tedy maximalizovat výdělek $\boldsymbol{z}^T \boldsymbol{x}$, jenomže hodnotu vektoru $\boldsymbol{z}$ dopředu neznáme. Nicméně předpokládáme, že vektor $\boldsymbol{z}$ nabývá hodnot z nějaké kompaktní množiny $\mathcal{Z}$. Problém portfolia můžeme formulovat jako následující úlohu lineárního semi-infinitního programování

$$\max \left\{ v;\ \boldsymbol{z}^T \boldsymbol{x} \geq v\ \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{Z},\ \mathbf{1}^T \boldsymbol{x} = k,\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \right\}.$$

6 Závěr

Lineární semi-infinitní programování je velké odvětví optimalizace a na toto téma bylo napsáno mnoho článků. Není možné zde uvést všechny známé výsledky, ukázali jsme jen ty nejzákladnější z nich. Pěkné přehledy dosavadních výsledků najde čtenář např. v [6], [7], [15].

Reference

[1] A. Ben-Tal, A. Nemirovski (1999): Robust solutions of uncertain linear programs, *Oper. Res. Lett.* **25**, No. 1, 1–13.

[2] B. Betrò (2004): An accelerated central cutting plane algorithm for linear semi-infinite programming, *Math. Program.* **101**, No. 3, 479–495.

[3] M. A. Goberna, V. Jornet, R. Puente, M. I. Todorov (1999): Analytical linear inequality systems and optimization, *J. Optimization Theory Appl.* **103**, No. 1, 95–119.

[4] M. A. Goberna, M. A. López (1988): A theory of linear inequality systems, *Linear Algebra Appl.* **106**, 77–115.

[5] M. A. Goberna, M. A. López (1999): On duality in semi-infinite programming and existence theorems for linear inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* **230**, No. 1, 173–192.

[6] M. A. Goberna, M. A. López (2002): Linear semi-infinite programming theory: An updated survey, *Eur. J. Oper. Res.* **143**, No. 2, 390–405.

[7] R. Hettich, K. O. Kortanek (1993): Semi-infinite programming: Theory, methods, and applications, *SIAM Rev.* **35**, No. 3, 380–429.

[8] T. Leon, S. Sanmatias, E. Vercher (2000): On the numerical treatment of linearly constrained semi-infinite optimization problems, *Eur. J. Oper. Res.* **121**, No. 1, 78–91.

[9] Z.-Q. Luo, C. Roos, T. Terlaky (1999): Complexity analysis of logarithmic barrier decomposition methods for semi-infinite linear programming, *Appl. Numer. Math.* **29**, No. 3, 379–394.

[10] J. Rohn (1976): Systems of linear equations with inexact data (česky), *Ekon.-Mat. Obz.* **12**, 311–315.

[11] I. M. Stancu-Minasian, Ş. Ţigan (1987): Inexact mathematical programming, *Prepr.*, "Babes-Bolyai" Univ., Fac. Math. Phys., Res. Semin. 8, 99–116.

[12] A. L. Soyster (1973): Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming, *Oper. Res.* **21**, 1154–1157.

[13] A. L. Soyster (1974): A duality theory for convex programming with set-inclusive constraints, *Oper. Res.* **22**, 892–898.

[14] A. L. Soyster (1974): Erratum. A duality theory for convex programming with set-inclusive constraints, *Oper. Res.* **22**, 1279–1280.

[15] G. Still (2004): Semi-infinite programming: An introduction "preliminary version", University of Twente, Department of Applied Mathematics, Netherlands, 1–39. (`http://wwwhome.math.utwente.nl/~stillgj/sip.html`)

[16] R. Tichatschke, R. Hettich, G. Still (1989): Connections between generalized, inexact and semi-infinite linear programming, *ZOR Math. Methods Oper. Res.* **33**, No. 6, 367–382.

[17] D. J. Thuente (1980): Duality theory for generalized linear programs with computational methods, *Oper. Res.* **28**, 1005–1011.

[18] M.-H. Wang, Y.-E. Kuo (1999): A perturbation method for solving linear semi-infinite programming problems, *Comput. Math. Appl.* **37**, No. 4–5, 181–198.