Tečné a normálové kužele

Milan Hladík
Charles University, Faculty of Mathematics and Physics,
Malostranské nám. 25, 118 00, Prague, Czech Republic,
e-mail: milan.hladik@matfyz.cz.

28. června 2010

Abstrakt

Tato práce vznikla jako podklad pro zkoušku z předmětu *Pokročilé partie optimalizace a konvexní analýzy 2* (EKN028). Uvádíme v ní několik základních druhů tečných a normálových kuželů včetně jejich mnoha vlastností a příkladů. Tečné resp. normálové kužele nám popisují určitým způsobem chování množiny na její hranici. Proto hrají tak důležitou roli ve variační geometrii při testování podmínek optimality, v určování stability apod. V této práci vycházíme především z [2].

1 Úvod

Než budeme hovořit o tečných a normálovích kuželých, definujeme si některé pojmy, které budeme potřebovat.

Nechť $S : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, potom definujeme

$$\limsup_{x\to\bar{x}} S(x) \equiv \{u \in \mathbb{R}^m \mid \exists x^i \to \bar{x},\ \exists u^i \to u\ : u^i \in S(x^i)\ \forall i\},$$
$$\liminf_{x\to\bar{x}} S(x) \equiv \{u \in \mathbb{R}^m \mid \forall x^i \to \bar{x}\ \exists u^i \to u,\ \exists i_0 : u^i \in S(x^i)\ \forall i > i_0\}.$$

Výraz $x \xrightarrow{C} \bar{x}$ používáme pro konvergenci v množině C, výraz $\tau \searrow 0$ znamená $\tau \xrightarrow{(0,\infty)} 0$. Pro klasický limes superior a inferior budeme používat symbol $\operatorname{Lim\,sup}$ a $\operatorname{Lim\,inf}$. Výrazy $cl\,C,\ int\,C,\ conv\,C$ značí uzávěr, vnitřek a konvexní obal množiny C. Nechť $C, C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Potom

$$x + C \equiv \{x + y \mid y \in C\}, \quad \alpha.C \equiv \{\alpha.y \mid y \in C\}, \quad C_1 + C_2 \equiv \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}.$$

Projekce bodu $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ na množinu $C \subseteq \mathbb{R}^n$: $P_C(\bar{x}) \equiv \{x \in C \mid \|x - \bar{x}\| = \min_{y\in C} \|y - \bar{x}\|\}$. *Vzdálenost* bodu $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ od množiny $C \subseteq \mathbb{R}^n$: $d_C(\bar{x}) \equiv \inf\{\|\bar{x} - x\| \mid x \in C\}$. Množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *lokálně uzavřená* v bodě $\bar{x} \in C$, pokud je uzavřená množina $C \cap O$ pro nějaké uzavřené okolí O bodu $\bar{x}$.

Je-li $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ spojitě diferencovatelná funkce, potom *jacobián* v bodě $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ je matice

$$\nabla F(\bar{x}) \equiv \left(\frac{\partial F_i(\bar{x})}{\partial x_j}\right)_{i,j} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Clarkova směrová derivace funkce $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ v bodě $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ a ve směru $u \in \mathbb{R}^n$:

$$f^\circ(\bar{x}, u) \equiv \operatorname*{Lim\,sup}_{x\to\bar{x},\ \tau\searrow 0} \frac{f(x + \tau u) - f(x)}{\tau}.$$

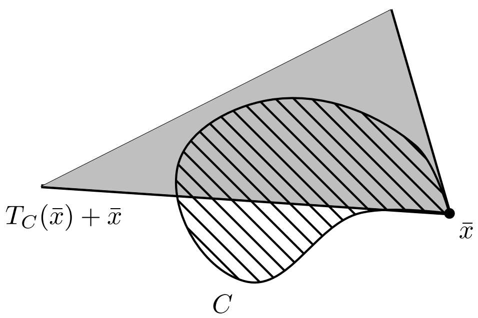
2 Tečné a normálové kužele

V následující tabulce definujeme základní typy tečných kuželů v bodě $\bar{x}$ k množině C.

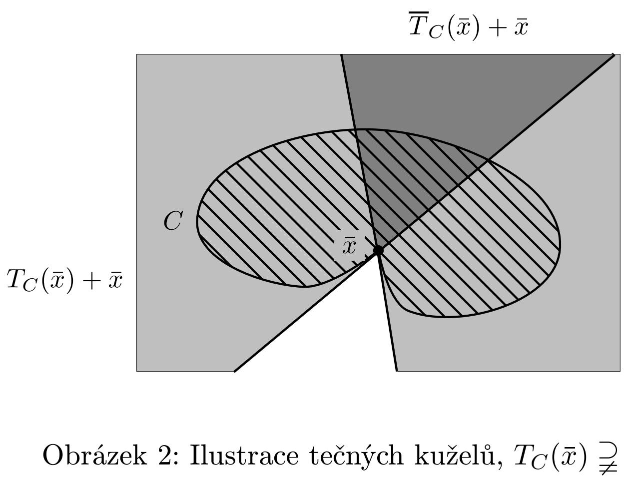
tečný kužel v bodě $\bar{x}$ k množině C	definice
kontingenční (Bouligandův) kužel	$T_C(\bar{x}) = \limsup_{\tau \searrow 0} \frac{C - \bar{x}}{\tau}$
Clarkův tečný kužel	$\overline{T}_C(\bar{x}) = \liminf_{x \xrightarrow{C} \bar{x},\ \tau \searrow 0} \frac{C - x}{\tau}$

Ekvivalentně můžeme definovat tečné kužele takto:

$$
\begin{aligned}
T_C(\bar{x}) &= \{u \in \mathbb{R}^n \mid \exists \tau^i \searrow 0,\ \exists u^i \to u\ : \bar{x} + \tau^i u^i \in C\ \forall i\} \\
&\overset{[1]}{=} \{u \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname*{Lim\,inf}_{\tau \searrow 0} \frac{d_C(\bar{x} + \tau u)}{\tau} = 0\}, \\
\overline{T}_C(\bar{x}) &= \{u \in \mathbb{R}^n \mid \forall x^i \xrightarrow{C} \bar{x}\ \forall \tau^i \searrow 0\ \exists u^i \to u : x^i + \tau^i u^i \in C\ \forall i\} \\
&\overset{[1]}{=} \{u \in \mathbb{R}^n \mid d_C^\circ(\bar{x}, u) = 0\}.
\end{aligned}
$$



Obrázek 1: Ilustrace tečných kuželů, $T_C(\bar{x}) = \overline{T}_C(\bar{x})$.



Obrázek 2: Ilustrace tečných kuželů, $T_C(\bar{x}) \supsetneq \overline{T}_C(\bar{x})$.

Ve vnitřních bodech množiny jsou tečné kužele rovny celému prostoru $\mathbb{R}^n$, proto jsou zajímavé pouze hraniční body množiny. Obrázky 1 – 2 ilustrují několik případů. Vždy platí: $\overline{T}_C(\bar{x}) \subseteq T_C(\bar{x})$, oba tečné kužele jsou uzavřené, Clarkův navíc konvexní.

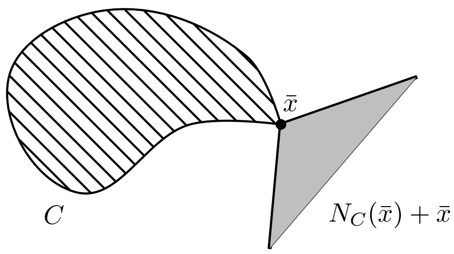
Normálové kužele úzce souvisejí s tzv. polárními kužely. Nechť $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kužel, *polární kužel* ke kuželi K je definován jako

$$K^* \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle \leq 0 \ \forall y \in K\}.$$

Polární kužel je vždy uzavřený a konvexní a platí $(K^*)^* = \mathit{cl\,conv}\, K$. V následující tabulce definujeme základní typy normálových kuželů v bodě $\bar{x}$ k množině C.

normálový kužel v bodě $\bar{x}$ k množině C	definice
regulární (Fréchetův) normálový kužel	$N_C(\bar{x}) = T_C^*(\bar{x})$
Clarkův normálový kužel	$\overline{N}_C(\bar{x}) = \overline{T}_C^*(\bar{x})$
projekční normálový kužel	$\widetilde{N}_C(\bar{x}) = \{\lambda(x - \bar{x}) \mid \lambda \geq 0, \bar{x} \in P_C(x)\}$
limiting (Mordukhovichův) normálový kužel	$\widehat{N}_C(\bar{x}) = \limsup\limits_{x \xrightarrow{C} \bar{x}} N_C(x) = \limsup\limits_{x \xrightarrow{C} \bar{x}} \widetilde{N}_C(x)$

Následující obrázky 3 – 6 ilustrují normálové kužele. Vždy platí: $\overline{N}_C(\bar{x}) = \mathit{cl\,conv}\, \widehat{N}_C(\bar{x})$, $\widetilde{N}_C(\bar{x}) \subseteq N_C(\bar{x}) \subseteq \widehat{N}_C(\bar{x}) \subseteq \overline{N}_C(\bar{x})$. Pokud C je uzavřená množina, pak kužele $\overline{T}_C(\bar{x})$, $\overline{N}_C(\bar{x})$ jsou navzájem polární a stejně tak kužele $\mathit{cl\,conv}\, T_C(\bar{x})$ a $N_C(\bar{x})$. Projekční kužel je konvexní, ale nemusí být uzavřený, regulární i Clarkův kužel je z definice uzavřený a konvexní, Mordukhovichův kužel je uzavřený, ale obecně ne konvexní.



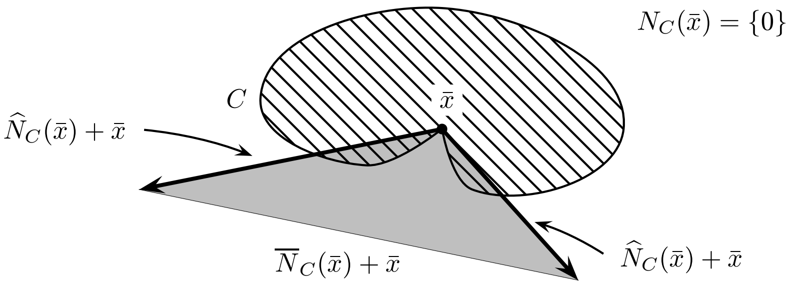
Obrázek 3: Ilustrace normálových kuželů, $\widetilde{N}_C(\bar{x}) = N_C(\bar{x}) = \overline{N}_C(\bar{x}) = \widehat{N}_C(\bar{x})$.

Definice 2.1 (Clarkova regularita)
Množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *regulární* v bodě $\bar{x} \in C$, pokud je v $\bar{x}$ lokálně uzavřená a $N_C(\bar{x}) = \widehat{N}_C(\bar{x})$.

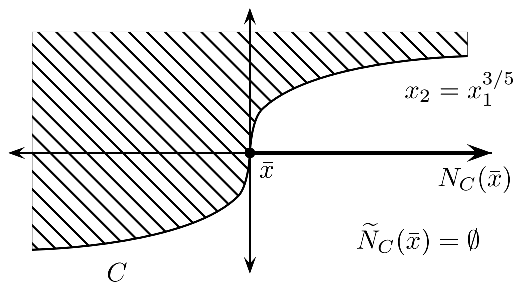
Věta 2.2 (Charakterizace regularity)
Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je lokálně uzavřená množina v bodě $\bar{x} \in C$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní s regularitou C v bodě $\bar{x}$:

(1) $N_C(\bar{x}) = \widehat{N}_C(\bar{x})$;

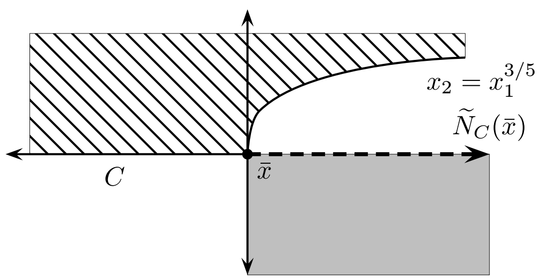
(2) $T_C(\bar{x}) = \overline{T}_C(\bar{x})$;



Obrázek 4: Ilustrace normálových kuželů, $N_C(\bar{x}) \subsetneqq \widehat{N}_C(\bar{x}) \subsetneqq \overline{N}_C(\bar{x})$.



Obrázek 5: Ilustrace případu, kdy $cl\,\widetilde{N}_C(\bar{x}) \subsetneqq N_C(\bar{x})$.



Obrázek 6: Ilustrace případu, kdy $\widetilde{N}_C(\bar{x})$ není uzavřený, ale $cl\,\widetilde{N}_C(\bar{x}) = N_C(\bar{x})$.

(3) $\widehat{N}_C(\bar{x}) = T_C^*(\bar{x})$;

(4) $T_C(\bar{x}) = \widehat{N}_C^*(\bar{x})$;

(5) Pokud $x_i \xrightarrow{C} \bar{x}$, $u^i \in \widehat{N}_C(x^i)$ *a* $u^i \to u$, *potom* $u \in \widehat{N}_C(\bar{x})$;

(6) Pokud $u \in T_C(\bar{x})$, *potom* $\forall x_i \xrightarrow{C} \bar{x}\ \exists u^i \to u$, $\exists i_0 \in \mathbb{N}$: $u^i \in T_C(x^i)\ \forall i > i_0$. □

Věta 2.3
Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *je lokálně uzavřené v bodě* $\bar{x} \in C$. *Potom*

$$\overline{T}_C(\bar{x}) = \liminf_{x \xrightarrow{C} \bar{x}} T_C(x).$$

□

Věta 2.4 (Tečné a normálové kužele ke konvexní množině)
Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *je konvexní množina,* $\bar{x} \in C$. *Potom*

$$T_C(\bar{x}) = \overline{T}_C(\bar{x}) = cl\,\{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda > 0 : \bar{x} + \lambda.y \in C\},$$
$$\widetilde{N}_C(\bar{x}) = N_C(\bar{x}) = \widehat{N}_C(\bar{x}) = \overline{N}_C(\bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x - \bar{x}\rangle \le 0\ \forall x \in C\}.$$

Je-li C *lokálně uzavřené v* $\bar{x}$, *potom je v bodě* $\bar{x}$ *regulární.* □

Pro konvexní množinu máme i následující tvrzení. Nechť $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená konvexní množina. Potom C je rovna průniku tečných poloprostorů k množině C.

Věta 2.5
Nechť $x_i \xrightarrow{C} \bar{x} \in C \subseteq \mathbb{R}^n$, $u^i \in \widehat{N}_C(x^i)$ *a* $u^i \to u$. *Potom* $u \in \widehat{N}_C(\bar{x})$. □

Věta 2.6
Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená množina, $\bar{x} \in C$. Potom $\bar{x} \in int\, C$ právě tehdy, když $\widehat{N}_C(\bar{x}) = \{0\}$.
□

Věta 2.7 (Tečné a normálové kužele pro konvexní polyedry)
Mějme konvexní polyedr $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \leq b_i \ \forall i = 1, \ldots, m\}$, mějme $\bar{x} \in C$ a uvažujme množinu aktivních podmínek $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid a_i^T \bar{x} = b_i\}$. Potom tečný i normálový kužel představuje konvexní polyedrický kužel s popisem

$$T_C(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \leq 0 \ \forall i \in I(\bar{x})\},$$
$$N_C(\bar{x}) = \{y_1 a_1 + \ldots + y_m a_m \in \mathbb{R}^n \mid y_i \geq 0 \ \forall i \in I(\bar{x}), \ y_i = 0 \ \forall i \notin I(\bar{x})\}.$$

□

3 Operace s kuželi

V této sekci uvádíme vztahy popisující tečné a normálové kužele pro průnik, součet, kartézský součin množin, obraz a vzor množin při hladkých zobrazeních

Věta 3.1 (Tečné a normálové kužele pro vzor množiny při hladkém zobrazení)
Mějme $D \subseteq \mathbb{R}^m$, spojitě diferencovatelnou funkci $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. Nechť $C = F^{-1}(D)$ a nechť $\nabla F(\bar{x})$ má plnou hodnost pro bod $\bar{x} \in C$. Potom platí

$$T_C(\bar{x}) = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \nabla F(\bar{x})w \in T_D(F(\bar{x}))\},$$
$$\overline{T}_C(\bar{x}) = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \nabla F(\bar{x})w \in \overline{T}_D(F(\bar{x}))\},$$
$$N_C(\bar{x}) = \{\nabla F(\bar{x})^T y \mid y \in N_D(F(\bar{x}))\},$$
$$\widehat{N}_C(\bar{x}) = \{\nabla F(\bar{x})^T y \mid y \in \widehat{N}_D(F(\bar{x}))\}.$$

□

Věta 3.2 (Tečné a normálové kužele pro množinu popsanou omezeními)
Mějme uzavřené množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n, \ D \subseteq \mathbb{R}^m$, spojitě diferencovatelnou funkci $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. Nechť $C = \{x \in X \mid F(x) \in D\}$ a $\bar{x} \in C$. Potom:

$$T_C(\bar{x}) \subseteq \{w \in T_X(\bar{x}) \mid \nabla F(\bar{x})w \in T_D(F(\bar{x}))\}, \tag{3.1}$$
$$N_C(\bar{x}) \supseteq \{\nabla F(\bar{x})^T y + w \mid y \in N_D(F(\bar{x})), \ w \in N_X(\bar{x})\}. \tag{3.2}$$

Za podmínky, že jediný vektor $y \in \widehat{N}_D(F(\bar{x}))$ splňující $-\nabla F(\bar{x})^T y \in \widehat{N}_X(\bar{x})$ je $y = 0$, potom platí:

$$\overline{T}_C(\bar{x}) \supseteq \{w \in \overline{T}_X(\bar{x}) \mid \nabla F(\bar{x})w \in \overline{T}_D(F(\bar{x}))\},$$
$$\widehat{N}_C(\bar{x}) \subseteq \{\nabla F(\bar{x})^T y + w \mid y \in \widehat{N}_D(F(\bar{x})), \ w \in \widehat{N}_X(\bar{x})\}.$$

Pokud navíc množina X je regulární v $\bar{x}$ a D je regulární v $F(\bar{x})$, potom C je regulární v $\bar{x}$ a platí:

$$T_C(\bar{x}) = \overline{T}_C(\bar{x}) = \{w \in T_X(\bar{x}) \mid \nabla F(\bar{x})w \in T_D(F(\bar{x}))\},$$
$$\widehat{N}_C(\bar{x}) = \{\nabla F(\bar{x})^T y + w \mid y \in \widehat{N}_D(F(\bar{x})), \ w \in \widehat{N}_X(\bar{x})\}.$$

□

Ostrá inkluze v (3.1) nastane např. v následující situaci. Nechť $n = 2$, $F : (x_1, x_2) \mapsto (x_1^3, x_2^3)$, $D = \langle 0, \infty)^2$, $\bar{x} = (0, 0)$. Pak $C = \langle 0, \infty)^2$ a tečný kužel $T_C(\bar{x}) = \langle 0, \infty)^2$. Dále máme $T_D(F(\bar{x})) = T_D(0,0) = \langle 0, \infty)^2$, jacobián $\nabla F(\bar{x})$ je nulová matice a tedy pravá strana ve výrazu (3.1) je rovna $\mathbb{R}^2$.

Má-li množina C popis $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$, kde $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ je libovolná funkce, potom podle [1] platí $T_C(\bar{x}) \supseteq \{u \in \mathbb{R}^n \mid f^\circ(\bar{x}, u) \leq 0\}$.

Věta 3.3 (Tečné a normálové kužele pro kartézský součin)
Nechť $C = C_1 \times \ldots \times C_m$, kde $C_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ jsou uzavřené množiny, a nechť $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$, kde $\bar{x}_i \in C_i$. Potom platí:

$$T_C(\bar{x}) \subseteq T_{C_1}(\bar{x}_1) \times \ldots \times T_{C_m}(\bar{x}_m), \tag{3.3}$$

$$\overline{T}_C(\bar{x}) = \overline{T}_{C_1}(\bar{x}_1) \times \ldots \times \overline{T}_{C_m}(\bar{x}_m), \tag{3.4}$$

$$N_C(\bar{x}) = N_{C_1}(\bar{x}_1) \times \ldots \times N_{C_m}(\bar{x}_m), \tag{3.5}$$

$$\widehat{N}_C(\bar{x}) = \widehat{N}_{C_1}(\bar{x}_1) \times \ldots \times \widehat{N}_{C_m}(\bar{x}_m). \tag{3.6}$$

Navíc, množina C je regulární v $\bar{x}$ právě tehdy, když jsou všechny C_i regulární v $\bar{x}_i$. $\square$

Příklad, kdy ve výrazu (3.3) nastane ostrá inkluze, je následující: $C = C_1 \times C_2$, $C_1 = C_2 = \{0\} \cup \{2^{-k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ a uvažujme bod $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$. Potom $T_{C_1}(\bar{x}_1) \times T_{C_2}(\bar{x}_2) = \langle 0, \infty)^2$, ale vektor $(w_1, w_2) \in \langle 0, \infty)^2$ padne do $T_C(\bar{x})$ jenom pokud podíl w_1/w_2 je celočíselná mocnina čísla 2.

Věta 3.4 (Tečné a normálové kužele pro průnik množin)
Nechť $C = C_1 \cap \ldots \cap C_m$, kde $C_i \in \mathbb{R}^n$ jsou uzavřené množiny, a nechť $\bar{x} \in C$. Potom:

$$T_C(\bar{x}) \subseteq T_{C_1}(\bar{x}) \cap \ldots \cap T_{C_m}(\bar{x}), \tag{3.7}$$

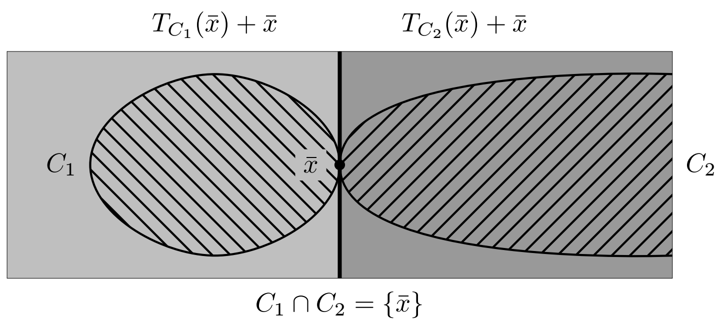
$$N_C(\bar{x}) \supseteq N_{C_1}(\bar{x}) + \ldots + N_{C_m}(\bar{x}). \tag{3.8}$$

Za podmínky, že kombinace vektorů $v_i \in \widehat{N}_{C_i}(\bar{x})$ splňující $v_1 + \ldots + v_m = 0$ je pouze $v_1 = \ldots = v_m = 0$, platí i následující vztahy

$$\overline{T}_C(\bar{x}) \supseteq \overline{T}_{C_1}(\bar{x}) \cap \ldots \cap \overline{T}_{C_m}(\bar{x}), \tag{3.9}$$

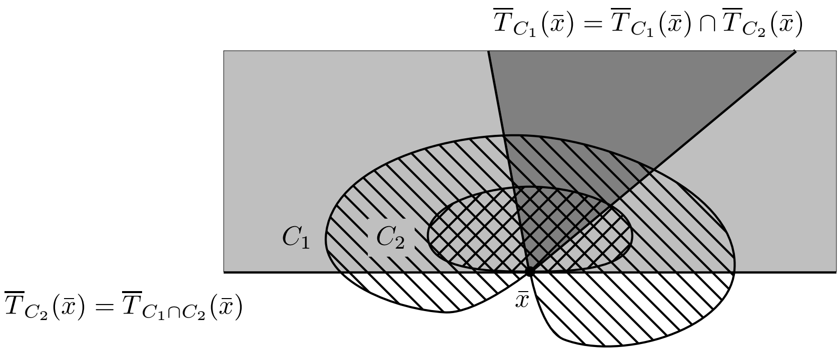
$$\widehat{N}_C(\bar{x}) \subseteq \widehat{N}_{C_1}(\bar{x}) + \ldots + \widehat{N}_{C_m}(\bar{x}). \tag{3.10}$$

Pokud navíc jsou všechny C_i regulární v bodě $\bar{x}$, potom rovněž C je regulární v $\bar{x}$ a inkluze (3.7), (3.10) se stanou rovnostmi. $\square$



Obrázek 7: Ilustrace případu, kdy $T_{C_1 \cap C_2}(\bar{x}) \subsetneq T_{C_1}(\bar{x}) \cap T_{C_2}(\bar{x})$.

Případ, kdy ve vztazích (3.7) – (3.8) nastane ostrá inkluze a vztahy (3.9) – (3.10) nebudou splněny, ilustruje obrázek 7. Případ, kdy ve vztazích (3.9) – (3.10) nastane ostrá inkluze, ilustruje obrázek 8.



Obrázek 8: Ilustrace případu, kdy $\overline{T}_{C_1 \cap C_2}(\bar{x}) \supsetneqq \overline{T}_{C_1}(\bar{x}) \cap \overline{T}_{C_2}(\bar{x})$.

Věta 3.5 (Tečné a normálové kužele pro obraz hladkých funkcí)
Mějme $C \subseteq \mathbb{R}^n$, spojitě diferencovatelnou funkci $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. Nechť $D = F(C)$ a $\bar{y} \in D$. Potom:

$$T_D(\bar{y}) \supseteq \bigcup_{\bar{x} \in F^{-1}(\bar{y}) \cap C} \{\nabla F(\bar{x}) w \mid w \in T_C(\bar{x})\}, \tag{3.11}$$

$$N_D(\bar{y}) \subseteq \bigcap_{\bar{x} \in F^{-1}(\bar{y}) \cap C} \{y \in \mathbb{R}^m \mid \nabla F(\bar{x})^T y \in N_C(\bar{x})\}. \tag{3.12}$$

Pokud existuje O okolí bodu $\bar{y}$ takové, že množina $F^{-1}(O) \cap C$ je omezená, potom platí:

$$\overline{T}_D(\bar{y}) \supseteq \bigcap_{\bar{x} \in F^{-1}(\bar{y}) \cap C} \{\nabla F(\bar{x}) w \mid w \in \overline{T}_C(\bar{x})\}, \tag{3.13}$$

$$\widehat{N}_D(\bar{y}) \subseteq \bigcup_{\bar{x} \in F^{-1}(\bar{y}) \cap C} \{y \in \mathbb{R}^m \mid \nabla F(\bar{x})^T y \in \widehat{N}_C(\bar{x})\}. \tag{3.14}$$

Pokud C je konvexní množina a F lineární funkce tvaru $F(x) = Ax$ pro jistou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, potom pro všechna $\bar{x} \in F^{-1}(\bar{y}) \cap C$ dostáváme

$$T_D(\bar{y}) = \overline{T}_D(\bar{y}) = cl\,\{Aw \mid w \in T_C(\bar{x})\},$$
$$N_D(\bar{y}) = \widehat{N}_D(\bar{y}) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^T y \in \widehat{N}_C(\bar{x})\}.$$

$\square$

Případ, kdy ve výrazu (3.11) nastane ostrá inlkuze, je např. následující. Nechť $C = \langle -1, 1 \rangle$, $F : x \mapsto x^2$, $D = \langle 0, 1 \rangle$ a $\bar{y} = 0$. Potom $T_D(\bar{y}) = \langle 0, \infty)$, $F^{-1}(\bar{y}) = 0$, $\nabla F(0) = 0$, a tedy pravá strana ve vztahu (3.11) je rovna $\{0\}$.

Věta 3.6 (Tečné a normálové kužele pro součet množin)
Nechť $C = C_1 + \ldots + C_m$, kde $C_i \in \mathbb{R}^n$ jsou uzavřené množiny, a nechť $\bar{x} \in C$. Potom:

$$T_C(\bar{x}) \supseteq \bigcup_{\bar{x}_1 + \ldots + \bar{x}_m = \bar{x},\ \bar{x}_i \in C_i} \Big(T_{C_1}(\bar{x}_1) + \ldots + T_{C_m}(\bar{x}_m)\Big), \tag{3.15}$$

$$N_C(\bar{x}) \subseteq \bigcap_{\bar{x}_1 + \ldots + \bar{x}_m = \bar{x},\ \bar{x}_i \in C_i} \Big(N_{C_1}(\bar{x}_1) \cap \ldots \cap N_{C_m}(\bar{x}_m)\Big). \tag{3.16}$$

Pokud existuje O okolí bodu $\bar{x}$ takové, že množina $\{(x_1, \ldots, x_m) \in C_1 \times \ldots \times C_m \mid x_1 + \ldots +$

$x_m \in O\}$ *je omezená, potom platí:*

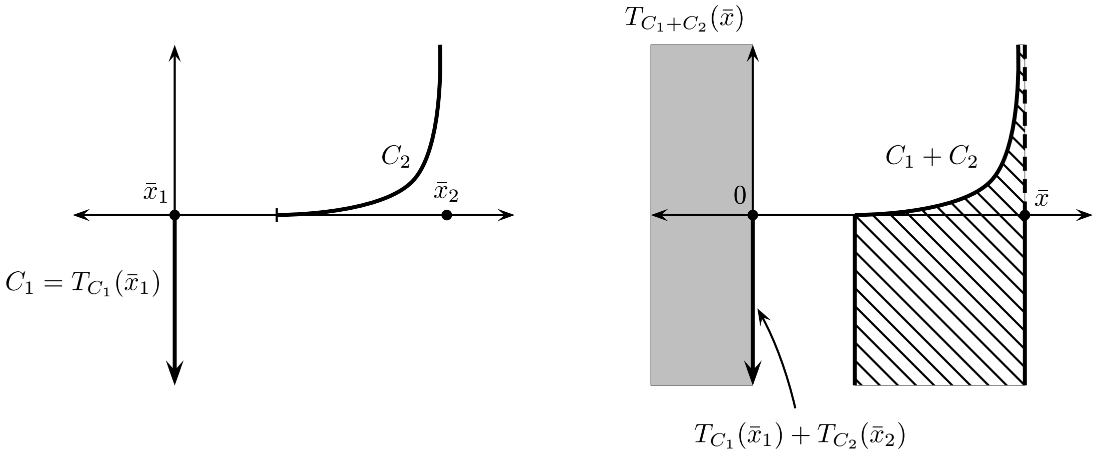
$$\overline{T}_C(\bar{x}) \supseteq \bigcap_{\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_m=\bar{x},\ \bar{x}_i\in C_i} \Big(\overline{T}_{C_1}(\bar{x}_1) + \ldots + \overline{T}_{C_m}(\bar{x}_m)\Big),$$
$$\widehat{N}_C(\bar{x}) \subseteq \bigcup_{\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_m=\bar{x},\ \bar{x}_i\in C_i} \Big(\widehat{N}_{C_1}(\bar{x}_1) \cap \ldots \cap \widehat{N}_{C_m}(\bar{x}_m)\Big).$$

Pokud všechna C_i *jsou konvexní, potom pro libovolný výběr* $\bar{x}_i \in C_i$ *s vlastností* $\bar{x}_1 + \ldots \bar{x}_m = \bar{x}$ *dostáváme*

$$T_C(\bar{x}) = cl\Big(T_{C_1}(\bar{x}_1) + \ldots + T_{C_m}(\bar{x}_m)\Big),$$
$$\widehat{N}_C(\bar{x}) = \widehat{N}_{C_1}(\bar{x}_1) \cap \ldots \cap \widehat{N}_{C_m}(\bar{x}_m).$$

□

Případ, kdy ve výrazu (3.15) nastane ostrá inkluze, ilustruje obrázek 9.



Obrázek 9: Ilustrace případu, kdy $T_{C_1+C_2}(\bar{x}) \supsetneqq T_{C_1}(\bar{x}_1) + T_{C_2}(\bar{x}_2)$.

Závěrem

Definovali jsme různé typy tečných a normálových kuželů, uvedli jejich základní vlastnosti a jak se zachovávají při množinových operacích. Vše jsme osvětlili na příkladech a obrázcích. Kde nebylo řečeno jinak, čerpali jsme z [2].

Reference

[1] Clarke, F. H.; Ledyaev, Yu. S.; Stern, R. J.; Wolenski, P. R. (1998): Nonsmooth analysis and control theory, *Springer*, New York.

[2] Rockafellar, R. T.; Wets, R. J.-B. (2004): Variational analysis, corr. 2nd print., *Springer*, Berlin.