**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA**
**Univerzita Karlova**

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Roman Firment

# Vyhodnocení polynomu s intervalovými koeficienty

Katedra aplikované matematiky

| | |
|---|---|
| Vedoucí bakalářské práce: | doc. Mgr. Milan Hladík, Ph.D. |
| Studijní program: | Informatika |
| Studijní obor: | Obecná informatika |

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ........ dne ............ Podpis autora

Týmto sa chcem poďakovať môjmu školiteľovi doc. Mgr. Milanovi Hladíkovi, Ph.D. za jeho ochotu prejavenú pri vedení práci a za možnosť spoznania špecifickej časti matematiky. Ďalej rodine a priateľom za ich podporu pri písaní tejto práce.

Název práce: Vyhodnocení polynomu s intervalovými koeficienty

Autor: Roman Firment

Katedra aplikované matematiky: Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Milan Hladík, Ph.D., Katedra aplikované matematiky

Abstrakt: V práci sa zaoberáme nájdením obálky oboru hodnôt reálneho a intervalového polynómu o jednej premennej nad intervalom. Prezentujeme funkčné formy pre reálne polynómy, ktoré následne implementujeme v prostredí Matlab používajúceho intervalovú aritmetiku toolboxu INTLAB. Tie nám umožňujú efektívne spočítať obálku polynómu. V teoretickej časti je taktiež predstavený prevod umožňujúci použiť ľubovoľnú formu počítajúcu obálku reálneho polynómu na výpočet obálky intervalového polynómu. Súčasťou práce je aj numerické porovnanie jednotlivých metód. Na základe toho sú navrhnuté dve globálne funkcie riešiace náš problém aplikujúce niektorú z foriem. Užívateľ má možnosť nepriamo ovplyvniť voľbu formy nepovinným parametrom špecifikujúci stratégiu výpočtu, ktorá definuje rýchlosť výpočtu a veľkosť výsledného nadhodnocovania.

Klíčová slova: intervalová aritmetika, funkčné formy, obálka oboru hodnôt polynómu, Matlab, INTLAB

Title: Evaluation of interval polynomials

Author: Roman Firment

Department of Applied Mathematics: Department of Applied Mathematics

Supervisor: doc. Mgr. Milan Hladík, Ph.D., Department of Applied Mathematics

Abstract: In this thesis, we deal with the finding of an enclosure of the range of the real and interval polynomials in one variable. There are presented functional forms of the real polynomials which we implemented in the Matlab environment that is using interval arithmetic of the toolbox INTLAB. These forms can be used to effectively evaluate an enclosure of a polynomial. In the theoretical part there is introduced a reduction that makes possible to use an arbitrary functional form computing an enclosure of a real polynomial to evaluate an enclosure of interval polynomial. A numerical comparison is also the part of this thesis. Based on its results we designed two global functions solving our problem that apply one of the forms. A user has a possibility to indirectly influence the choice of the form by non-mandatory parameter that is specifying the strategy of computation. This parameter defines speed of evaluation and the amount of overestimation of the computed interval.

Keywords: interval arithmetic, functional forms, enclosure of range of polynomial, Matlab, INTLAB

# Obsah

# 1. Úvod

Všestrannosť dnešných moderných počítačov je ohromná. Sú prostriedkami vedúce k riešeniam komplexných úloh širokého spektra ľudského poznania. Priamo, či nepriamo nám uľahčujú každodenný život a zefektívňujú výrobne procesy. A-však ich pôvodný zámer, a to vykonávanie aritmetických a logických operácii, je stále zachovaný.

Z princípu konečnosti, hlavným nedostatkom počítačovej aritmetiky, je jej neschopnosť reprezentovať všetky reálne čísla. Ďalší problém, ktorý štandardná implementácia čísiel s desatinnou čiarkou zavádza, je vznik zaokrúhľovacích chyb. Vo výpočtoch vyžadujúce rigorózne výsledky, typicky vedeckých, takýto efekt použitia počítačovej aritmetiky nie je akceptovateľný. Tieto nedostatky môžeme čiastočné vyriešiť aplikovaním časti teórie numerickej matematiky. Konkrétne teórie intervalovej aritmetiky, z ktorej vychádza gro našej práce.

Korene intervalovej aritmetiky siahajú na prelom 50. a 60. rokoch 20. storočia. Za otca tejto časti matematiky sa pokladá R. E. Moore, ktorý v roku 1959 publikoval článok *Automatic error analysis in digital computation* (Moore, 1959), zaoberajúci sa možnosťami implementácie intervalovej aritmetiky v počítači. Neskôr, v roku 1966, sú základy intervalovej aritmetiky predstavené v jeho knihe s názvom *Interval Analysis* (Moore, 1966).

Intervalová aritmetika používa ako základnú entitu interval obsahujúci cielenú hodnotu. Sú na nich zadefinované unárne a binárne aritmetické operácie, ktoré poznáme z telesa reálnych čísiel. Sama však teleso netvorí. Výsledok takýchto operácii závisí iba na hôrnych a dolných hraniciach vstupných intervalov. Ich výpočtový čas, resp. počet inštrukcii, je konštanta krát horší ako v prípade reálnej verzie počítačovej aritmetiky. V bežných implementáciách je táto konštanta rozumná, čo nám umožňuje relatívne rýchlo vykonávať aritmetické operácie bez straty skutočnej výslednej hodnoty. Výsledný interval operácie intervalovej aritmetiky zachytáva všetky možné výsledky, ktoré môžu vzniknúť aplikovaním operácie na vstupné hodnoty z intervalov.

Mohlo by sa zdať, že priamočiarym nahradením reálnej počítačovej aritmetiky za intervalovú dosiahneme vytúženého efektu. Takouto priamou aplikáciou dostaneme reprezentáciu, ktorá myšlienkovo obsahuje skutočnú hodnotu, ale výsledok môže byť viac obecný ako sme chceli. Šírka výsledného intervalu môže byť veľká, a teda aj neurčitosť skutočnej hodnoty. Odbor *intervalová analýza* študuje pravé efektívnejšie použitie intervalovej aritmetiky.

Jednou z otázok intervalovej analýzy je nájdenie aproximácie oboru hodnôt polynómu nad uzavretým intervalom. Problém vyhodnotenia polynómu nad intervalom pre variabilný počet premenných je NP-ťažký (Gaganov (1981), Gaganov (1985)), zatiaľ čo pre pevný počet premenných sa jedna o polynomiálny problém (Grigoryev a Vorobjov, 1988). V práci sa zaoberáme priamo aplikáciou intervalovej aritmetiky na výpočet odhadu hornej a dolej hranice oború hodnôt polynómov o jednej premennej nad intervalom. Koeficienty uvažovaných polynómov sú reálne i intervalové.

## 1.1 Ciele práce

- predstavenie metód hľadajúce obálku reálneho polynómu nad intervalovým vstupom
- zovšeobecnenie metód pre intervalové polynómy
- implentacia zmienených metód v prostredí Matlab/INTLAB, prípadne pridanie podpory pre prostredie Octave/*interval*.
- numerické porovnanie implementovaných metód

Ďalším cieľom práce je, aby formálna úprava implementácii sa zhodovala so štandardom používajúci v projekte LIME, vyvíjajúci sa na našej fakulte, pre ich prípadnú jednoduchšiu integrovateľnosť do projektu. Primárnym bodom záujmu toolboxu LIME je aplikácia intervalových metód v prostredí Matlab/INTLAB.

## 1.2 Podobné práce

Súčasťou toolboxu INTLAB je funkcia *polyval* počítajúca obálku reálneho i intervalového polynómu nad intervalom. Pripúšťa polynómy viac premenných. Pri defaultnej konfigurácii vo výpočtu používa Hornerovu schému. Je možné vynútiť, aby výsledok bol súčet mocnín vyhodnotených nad intervalom, prenásobených príslušnými koeficientmi.

V teoretickej častí čerpáme hlavne z práce Stahla (Stahl, 1995). Dôkazy vychádzajúcej z nej sa snažíme konštruovať pochopiteľnejšie za cenu väčšej výrečnosti. Prinášame redukciu výpočtu obalu intervalového polynómu na výpočty obalov reálnych polynómov, ako aj detailnejšie popisy subpolynómov vyskytujúce sa vo výpočtoch. Implementácie funkčných foriem polynómu sú založené na pseudokódu taktiež od Stahla. Naša implementácia je slobodná a snaží sa zaviesť prvky paralelizmus vo funkciách pracujúce s intervalovými polynómami. Na základe numerického porovnania ponúkame globálne funkcie riešiace definovaný problém.

## 1.3 Štruktúra práce

Druhá a tretia kapitola pokrýva základnú teóriu, od ktorej sa odrážajú implementácie jednotlivých metód. V závere tretej kapitoly je predstavený prevod umožňujúci použiť ľubovoľnú metódu hľadajúci obálku reálneho polynómu na nájdenie obálky intervalového polynómu. Jednotlivé tvrdenia a ich dôkazy môžu byť použite ako dokumentačné referencie pri nejasnostiach vzniknuté študovaním zdrojového kódu.

Vo štvrtej a piatej kapitole nájdeme užívateľskú a programátorskú dokumentáciu popisujúcu typické úkony spojene s inštaláciou, používaním softwaru, ako aj popis štruktúry a logiky súborov výslednej implementácie. Alternatívne za zdroj dokumentácie je možné považovať okomentované zdrojové súbory, z ktorých sa generuje dokumentácia vo formáte *html* v priečinkoch *doc*.

V šiestej kapitole nájdeme numerické porovnanie veľkosti nadhodnocovania a runtimu jednotlivých metód počítajúce obálku polynómu. Dáta, z ktorých sme vychádzali sú v prílohe.

Súčasťou práce je aj CD obsahujúce našu implementáciu a vygenerované dáta, na ktorých je možné urobiť ďalšie numerické porovnanie jednotlivých metód.

# 2. Základné pojmy

V tejto kapitole definujeme základné pojmy a značenia, ktoré nás budú sprevádzať zvyškom práce.

## 2.1 Interval a intervalová aritmetika

**Definícia 1** (Interval)**.** Intervalom $\boldsymbol{a}$ *nazveme množinu definovanú ako*

$$\boldsymbol{a} := [\underline{a},\overline{a}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{a} \leq x \leq \overline{a}\},$$

hornú hranicu *značíme* $\overline{a}$*,* dolnú hranicu $\underline{a}$*.*

O intervale, pre ktorý platí $\overline{a} = \underline{a}$ hovoríme, že je *degenerovaný*. Interval je *symetrický*, ak $\overline{a} = -\underline{a}$. Množinu všetkých reálnych intervalov označujeme $\mathbb{IR}$. Viacrozmerným intervalom (vektorom z $\mathbb{IR}^n$) hovoríme *boxy*.

**Definícia 2** (Intervalová aritmetika)**.** *Majme* $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}$*. Definujeme operácie sčítania, odčítania, násobenia a delenia na* $\mathbb{IR}$ *nasledovne:*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &:= [\underline{a} + \underline{b},\overline{a} + \overline{b}] \\
\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} &:= [\underline{a} - \overline{b},\overline{a} - \underline{b}] \\
\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &:= [min(R), max(R)] \qquad kde \qquad R := \{\overline{a} \cdot \overline{b}, \underline{a} \cdot \overline{b}, \underline{a} \cdot \underline{b}, \overline{a} \cdot \underline{b}\} \\
\boldsymbol{a}/\boldsymbol{b} &:= [min(R'), max(R')] \qquad kde \qquad R' := \{\overline{a}/\overline{b}, \underline{a}/\overline{b}, \underline{a}/\underline{b}, \overline{a}/\underline{b}\}, 0 \notin \boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

Úlohou intervalovej aritmetiky je nájsť všetky možné hodnoty výpočtu, ku ktorým by sme dospeli zvolením ľubovoľných hodnôt zo vstupných intervalov, t.j. nájsť množinu $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = \{a \circ b : a \in \boldsymbol{a}, b \in \boldsymbol{b}\}$, kde $\circ$ je príslušnou operáciou.

Existuje aj rozšírená intervalová aritmetika, ktorá pripúšťa a pracuje s nekonečnom (viď Popova (1994)).

*Poznámka.* Pre operácie $+$ a $\cdot$ platí asociativita a komutativita. Neutrálne prvky sú $\mathbf{0} = [0,0]$ a $\mathbf{1} = [1,1]$. Avšak, nie každý prvok z $\mathbb{IR}$ má inverz.

Pre intervaly neplatí distributivita ako ju poznáme pre reálne čísla. Platí však *subdistributivita*:

$$\forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in \mathbb{IR} : \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \subseteq \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}$$

Príklad:

$$[2,3] * ([-1,0] + [4,5]) = [2,3] * ([3,5]) = [6,15]$$
$$[2,3] * [-1,0] + [2,3] * [4,5] = [-3,0] + [8,15] = [5,16]$$

Príčinou tohto javu je skutočnosť, že výraz po roznásobení nezachytáva pôvodnú závislosť $\boldsymbol{a}$ a výrazu $(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$. Ide o tzv. *dependency problem.*

**Definícia 3** (Obálka a obal)**.** Obálka množiny $M \subseteq \mathbb{R}$ *je ľubovoľný interval* $H$*, pre ktorý platí* $M \subseteq H$*. Značíme* $[H]$*. Najmenšia možná obálka, vzhľadom na inklúziu, je* obal.

Ďalšie značenia:

| | |
|---|---|
| $w(\boldsymbol{a}) := \overline{a} - \underline{a}$ | šírka intervalu |
| $rad(\boldsymbol{a}) := (\overline{a} - \underline{a})/2$ | polomer intervalu |
| $mid(\boldsymbol{a}) := (\overline{a} + \underline{a})/2$ | stred intervalu |
| $int(\boldsymbol{a}) := \boldsymbol{a} \setminus \{\overline{a}, \underline{a}\}$ | vnútro intervalu |
| $mag(\boldsymbol{a}) := \max\{\lvert x\rvert : x \in \boldsymbol{a}\}$ | magnitúda intervalu |
| $mig(\boldsymbol{a}) := \min\{\lvert x\rvert : x \in \boldsymbol{a}\}$ | mignitúda intervalu |

## 2.2 Intervalové rozšírenie a monotónnosť

Jadrom záujmu tejto práce sú najmä intervalové rozšírenia polynómov. Ich predpisy nám umožnia efektívne nájsť obálku oboru hodnôt polynómov nad ľubovoľným intervalom.

**Definícia 4** (Intervalové rozšírenie)**.** *Majme funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{IR}$. Funkcia $F : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ je jej* intervalovým rozšírením*, ak platí $f(x) = F(x)$ pre $\forall x \in \mathbb{R}$ a $f(\boldsymbol{x}) \subseteq F(\boldsymbol{x})$ pre $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}$.*

Definícia pripúšťa ľubovolnú reálnu funkciu. My sa však zameriame len na polynómy. Na reálne, tak aj na intervalové. Z definície ľubovoľný polynóm môže mať viacero intervalových rozšírení. Tie budú typicky rôzne nadhodnocovať a to v závislosti od faktoru šírky intervalu, prítomnosti 0 v intervale a ďalších faktorov.

**Definícia 5** (Monotónnosť vzhľadom na inklúziu)**.** *Funkcia $F : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ je monotónna vzhľadom na inklúziu, ak pre $\forall \boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y} \in \mathbb{IR}$ platí $F(\boldsymbol{x}) \subseteq F(\boldsymbol{y})$.*

Táto vlasnosť nám zaručuje, že pri zmenšovaní šírky pôvodného intervalu sa šírka oboru hodnôt nezväčší. Ďalej nám umožňuje rozdeliť vstupný interval na viacero intervalov, spočítať intervalové rozšírenie nad nimi a zjednotiť ich výsledky bez pridaného nadhodnocovania. Formálne:

$$\boldsymbol{y} = \bigcup_{i \in I} \boldsymbol{x}_i \qquad \Rightarrow \qquad \bigcup_{i \in I} F(\boldsymbol{x}_i) \subseteq F(\boldsymbol{y})$$

V nasledujúcej kapitole prezentujeme rôzné funkčné formy, ktoré sú intervalovými rozšíreniami. Všetky, až na Slope formu, su monotónne vzhľadom na inklúziu.

# 3. Intervalové formy

V tejto kapitole popisujeme intervalové formy pre reálne polynómy. Dokážeme, že takto definované predpisy sú intervalové rozšírenia reálneho polynómu. Ďalej ukážeme monotónnosť vzhľadom na inklúziu niektorých foriem, optimálnosť volieb istých parametrov a predpisy pomocných polynómov použitých v implementácii.

V poslednej podkapitole predstavíme prevod intervalového polynómu na dva až štyri reálne polynómy. Ich koeficienty budú hranice koeficientov intervalového polynómu. To nám umožní použiť ľubovoľnú formu pre reálny polynóm na výpočet obálky intervalového polynómu.

V ďalších podkapitolách, pokiaľ na začiatku neuvedieme inak, používame reálny polynóm $p$ :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad a_i \in \mathbb{R}, i = n \dots 0$$

## 3.1 Hornerova forma

Hornerova forma je najpriamočiarenejším spôsobom výpočtu obálky hodnôt polynómu nad intervalom používajúcim intervalovú aritmetiku. Je založený na prepise polynómu do ekvivalentného tvaru, ktorý znižuje počet operácií násobenia. Tento prepis poznáme aj pod pojmom Hornerova schéma. Ostatné formy budú často používať práve Hornerovu formu istých polynómov pre jej jednoduchosť a rýchlosť.

**Definícia 6** (Hornerova forma)**.** *Hornerova forma $HF_p : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ pre polynóm $p$ je definovaná:*

$$HF_p(\boldsymbol{x}) := \Big( \dots \Big( (a_n \boldsymbol{x} + a_{n-1}) \boldsymbol{x} + a_{n-2} \Big) \boldsymbol{x} + \cdots + a_1 \Big) \boldsymbol{x} + a_0.$$

Hornerova forma polynómu $p$ je intervalové rozšírenie $p$, podľa princípu fungovania intervalovej aritmetiky. Monotónnosť vzhľadom na inklúziu platí vďaka tomu, že operácie intervalového sčítania a násobenia majú túto vlastnosť ako aj skladanie funkcií, ktoré sú monotónne vzhľadom na inklúziu.

### 3.1.1 Nenadhodnocovanie Hornerovej formy

V tejto sekcii popisujeme postačujúcu podmienku určujúcu nenadhodnocovanie Hornerovej formy. Charakterizácia celej triedy polynómov, ktorých Hornerova forma nenadhodnocuje, nie je známa. Vo všeobecnosti platí, že ak sú hodnoty vo vstupnom intervale dostatočne vzdialené od nuly, t.j. $mig(\boldsymbol{x}) \geq b$ pre isté $b$, tak je Horner presný. Horner je zrejme presný vtedy, keď je polynóm iba konštanta. Na presnosť nemá vplyv ani prenásobenie celého polynómu $-1$. Aditívna konštanta v polynóme tiež nemá vplyv. Tá len celý takmer výsledok posúva o konštantu. Preto budeme v tejto sekcii bez ujmy na všeobecnosti pracovať s polynómom v tvare:

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad n \geq 2, a_n > 0, a_0 = 0$$

.

Vezmime do úvahy rekurzívne definované subpolynómy $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: popisujúce priebeh Hornerovej schémy v bode $x$:

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= & & a_n \\
p_{n-1}(x) &= p_n(x) \cdot x & + \quad & a_{n-1} \\
p_{n-2}(x) &= p_{n-1}(x) \cdot x & + \quad & a_{n-2} \\
&\vdots & & \\
p_0 &= p_1(x) \cdot x & + \quad & a_0
\end{aligned}$$

Zrejme $p_0(x) = p(x)$. Obal koreňov týchto polynómov tvorí *Overestimation interval*. Prázdnota prieniku tohto intervalu s vnútrom vstupného intervalu nám zaručuje nenadhodnocovanie Hornerovej formy.

**Definícia 7** (Overestimation interval)**.** *Overestimation interval* $\boldsymbol{e}_p$ *polynómu* $p$ *je interval tvaru:*

$$\boldsymbol{e}_p := [\{x \in \mathbb{R} : \exists i \quad 0 \leq i \leq n \text{ pre ktoré } p_i(x) = 0\}].$$

Tento interval obsahuje 0 vďaka tvaru polynómu, ktorý sme uviedli na začiatku sekcie ($p_0(0) = 0$), teda platí $\underline{e} \leq 0 \leq \overline{e}$. Pre lepšiu čitateľnosť budeme spodný index v zápise $\boldsymbol{e}_p$ vynechávať.

**Veta 1** (Stahl (1995), veta 3.1.12, Postačujúca podmienka)**.** *Pre* $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{IR} \setminus \mathbb{R}$ *platí:*

$$int(\boldsymbol{x}) \cap \boldsymbol{e}_p = \emptyset \quad \Rightarrow \quad HF_p(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x}).$$

Táto podmienka, žiaľ, necharakterizuje triedy polynómov, pre ktoré je Horner presný. Existujú prípady, kedy táto podmienka neplatí a Hornerova forma nenadhodnocuje. Napríklad: $p(x) = 2 \cdot x$ má $\boldsymbol{e} = [0{,}0]$ a pre ľubovoľný interval $\boldsymbol{x}$ taký, že $0 \in int(\boldsymbol{x})$ platí $p(\boldsymbol{x}) = HF_p(\boldsymbol{x})$.

V dôkaze využijeme skutočnosť, že pre hodnoty mimo Overestimation intervalu sú subpolynómy $p_i$ monotónne. Nestačí, aby bol len $p$ monotónny. Napríklad $p(x) = x^2 - 2x$ je na intervale $\boldsymbol{x} = [1{,}2]$ monotónna funkcia a $p(\boldsymbol{x}) = [-1{,}0] \neq HF_p(\boldsymbol{x}) = [-2{,}0]$. Monotónnosť subpolynómov $p_i$ je ukázaná v lemme 2. Cieľom lemmy 3 je ukázať, že maximum i minimum Hornerovej formy pre intervaly $\boldsymbol{x}$, ktoré majú prázdny prienik s Overestimation intervalom, sa nadobúda v koncových bodoch intervalu $\boldsymbol{x}$. Priamym dôsledkom týchto dvoch lemm je táto veta 1 o postačujúcej podmienke pre presnosť Hornerovej formy.

**Lemma 2** (Monotónnosť subpolynómov)**.** *Definujme* $s_n := 1$, $s_{i-1} := (-1)s_i$ *pre* $i = n-1 \dots 1$. *Potom pre* $x_1, x_2 : x_1 \leq \underline{e} \leq \overline{e} \leq x_2$ *platí:*

$$\begin{aligned}
0 &\leq p_i(x_2) \\
0 &\leq p_i'(x_2) \\
0 &\leq s_i p_i(x_1) \\
0 &\geq s_i p_i'(x_1)
\end{aligned}$$

*kde* $i = n \dots 0$.

*Dôkaz.* (Stahl (1995, strana 44)) Prvé dve nerovnosti budú platiť, ak pre $\overline{e} \leq y \leq z, i = 0 \ldots n$ dokážeme:

$$\begin{aligned} 0 &\leq p_i(y) \qquad (3.1) \\ p_i(y) &\leq p_i(z). \end{aligned}$$

To ukážeme indukciou. Pre $i = n$ máme $p_n(y) = a_n \geq 0$, konštantnú funkciu, pre ktorú tvrdenie zrejme platí. Indukčný krok: $p_{i-1}(z) = p_i(z)z + a_{i-1} \geq p_i(y)y + a_{i-1} = p_i(y)$. Nerovnosť platí z IP, nezápornosti a usporiadania $y$ a $z$. Pre spor, v dôkaze (3.1) predpokladajme $p_{i-1}(z) < 0$. Polynóm $p_{i-1}(x)$ nie je konštanta. Je to rastúca funkcia pre $x \geq \overline{e}$. Zo spojitosti existuje $h : h > z \geq \overline{e}$ kde sa nadobudne nula: $p_{i-1}(h) = 0$. To je spor s $\overline{e}$ (horná hranica intervalu $\boldsymbol{e}$ je najväčšie číslo, kde niektorý zo subpolynómov nadobudne nulovú hodnotu).

Podobne posledné dve nerovnosti z lemmy budú platiť, ak pre $y \leq z \leq \overline{e}, i = 0 \ldots n$ platí:

$$\begin{aligned} 0 &\leq s_i p_i(y) \qquad (3.2) \\ s_i p_i(z) &\leq s_i p_i(y). \end{aligned}$$

Opäť, pre $i = n$ máme $p_n(y)$ konštantnú funkciu. Indukčný krok:

$$\begin{aligned} s_{i-1}p_{i-1}(y) = s_{i-1}p_i(y)y + s_{i-1}a_{i-1} &= -s_i p_i(y)y + s_{i-1}a_{i-1} \\ &\geq -s_i p_i(z)z + s_{i-1}a_{i-1} = s_{i-1}p_i(z)z + s_{i-1}a_{i-1} \\ &= s_{i-1}p_{i-1}(z). \end{aligned}$$

Nerovnosť platí vďaka IP, nekladnosti a usporiadaniu $y$ a $z$.

Nerovnosť (3.2): pre spor predpokladajme $0 > s_{i-1}p_{i-1}(z)$. Funkcia $s_{i-1}p_{i-1}(x)$ nie je konštanta, ale je klesajúca pre $x \leq \underline{e}$. Zo spojitosti existuje $d : d < z \leq \underline{e}$ kde sa nadobudne nula: $p_{i-1}(d) = 0$. To je spor s dolnou hranicou intervalu $\boldsymbol{e}$ ($d$ by musela byť tou hranicou).

□

Na polynóm sa môžeme pozerať z Hornerovho pohľadu ako na funkciu o viacerých premenných. Je to zapríčinené tým, že intervalová aritmetika v schéme nepracuje s premennou ako celkom počas celého výpočtu. Každý výskyt v zápise polynómu pre ňu znamená novú premennú. Horner je potom obal takejto funkcie o viacerých premenných. Reálne maximum a minimum pôvodného polynómu sa nachádza na uhlopriečke boxu $\boldsymbol{x} \times \cdots \times \boldsymbol{x}$ spájajúcej body $(\underline{x}, \cdots, \underline{x})$ a $(\overline{x}, \cdots, \overline{x})$, t.j. v bode tvaru $(m, \cdots, m)$, kde $m \in \boldsymbol{x}$.

Ďalej zavedieme rekurzívne definované subpolynómy o viacerých premenných, ktoré reprezentujú čiastočné mezdivýsledky pri použití Hornerovej schémy. Pre $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ bude $\vec{x}_i$ vektor posledných $n - i$ prvkov: $\vec{x}_i := (x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $i = 0 \ldots n$, ďalej $h_i : \mathbb{R}^{n-i} \to \mathbb{R}$ subpolynómy:

$$\begin{aligned} h_n(\vec{x}_n) &:= a_n \\ h_{j-1}(\vec{x}_{j-1}) &:= h_j(\vec{x}_j)x + a_{j-1} \qquad \text{pre } j = n \ldots 1. \\ h(\vec{x}_0) &:= h_0(\vec{x}_0) \end{aligned}$$

Špeciálne dostávame $HF_p(\boldsymbol{y}) = \{h(\vec{y}) : \vec{y} \in \underbrace{\boldsymbol{y} \times \cdots \times \boldsymbol{y}}_{n-krát}\}$.

**Lemma 3.** *Majme $s_i$ definované ako v lemme 2. Pre všetky $\vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ spĺňajúce $\overline{e} \leq y_1 \leq z_1 , \ldots , \overline{e} \leq y_n \leq z_n$ platí:*

$$0 \leq h(\vec{y})$$
$$h(\vec{y}) \leq h(\vec{z}),$$

*a pre $\vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n : y_1 \leq z_1 \leq \underline{e} , \ldots , y_n \leq z_n \leq \underline{e}$ :*

$$0 \leq s_0 h(\vec{y})$$
$$s_0 h(\vec{z}) \leq s_0 h(\vec{y}).$$

*Dôkaz.* (Stahl (1995, strana 45)) Prvé dve nerovnosti sú špeciálnym prípadom, kedy $i = 0$ v nasledujúcich nerovnostiach:

$$0 \leq h_i(\vec{y_i}) \qquad\qquad h_i(\vec{y_i}) \leq h_i(\vec{z_i}), \tag{3.3}$$

kde $i = n \ldots 0$, $\vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n : \overline{e} \leq y_{i+1} \leq z_{i+1} , \ldots , \overline{e} \leq y_n \leq z_n$. Ich platnosť ukážeme indukciou. Pre $i = n$ máme nezapornú konštantnú funkciu. Nech (3.3) platí pre $i \geq 1$. Potom $h_{i-1}(\vec{z}_{i-1}) = h_i(\vec{z_i})z_i + a_{i-1} \geq h_i(\vec{y_i})y_i + a_{i-1} = h_{i-1}(\vec{y}_{i-1})$. Nerovnosť platí z IP, nezápornosti a usporiadania $y_i$ a $z_i$. Nezápornosť $h_i(\vec{y_i})$ plynie zo zvolenia vektoru pozostavajúceho z hodnôt $\overline{e}$ za $\vec{y}$: $h_{i-1}(\vec{z}_{i-1}) = h_i(\vec{z_i})z_i + a_{i-1} \geq h_i(\overline{e}, \ldots, \overline{e})\overline{e} + a_{i-1} = p_i(\overline{e})\overline{e} + a_{i-1} = p_{i-1}(\overline{e}) \overset{2}{\geq} 0$.

Podobne druhá polovica lemmy plynie z nerovností:

$$0 \leq s_i h_i(\vec{y_i}) \qquad\qquad s_i h_i(\vec{z_i}) \leq s_i h_i(\vec{y_i}), \tag{3.4}$$

kde $i = n \ldots 0$ , $\vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n : y_1 \leq z_1 \leq \underline{e} , \ldots , y_n \leq z_n \leq \underline{e}$. Pre $i = n$ tvrdenia platia. Nech (3.4) platí pre $i \geq 1$. Potom $s_{i-1}h_{i-1}(\vec{y}_{i-1}) = s_{i-1}h_i(\vec{y_i})y_i + s_{i-1}a_{i-1} = -s_i h_i(\vec{y_i})y_i + s_{i-1}a_{i-1} \geq -s_i h_i(\vec{z_i})z_i + s_{i-1}a_{i-1} = s_{i-1}h_{i-1}(\vec{z}_{i-1})$. Indukčný predpoklad bol použitý v nerovnosti. Ak za $\vec{y}$ vezmeme vektor s hodnotami $\underline{e}$ dostávame: $s_{i-1}h_{i-1}(\vec{y}_{i-1}) = s_{i-1}h_i(\vec{y_i})y_i + s_{i-1}a_{i-1} = -s_i h_i(\vec{y_i})y_i + s_{i-1}a_{i-1} \geq -s_i h_i(\underline{e}, \ldots, \underline{e})\underline{e} + s_{i-1}a_{i-1} = s_{i-1}p_i(\underline{e})\underline{e} + s_{i-1}a_{i-1} = s_{i-1}p_{i-1}(\underline{e}) \overset{2}{\geq} 0$.

□

Platnosť vety 1 o postačujúcej podmienke pre presnosť Hornerovej formy ľahko dokážeme z práve ukázaných lemm.

*Dôkaz.* [Vety 1 ] Majme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR} : int(\boldsymbol{x}) \cap \boldsymbol{e}_p = \emptyset$. Pre koncové body intervalu potom musí nastať $\overline{e} \leq \underline{x}$ alebo $\overline{x} \leq \underline{e}$. Z lemmy 2 je polynóm $p$ monotónny na $\boldsymbol{x}$, má maximum i minimum v koncových bodoch: $p(\boldsymbol{x}) = [\{p(\underline{x}), p(\overline{x})\}]$. Z lemmy 3 polynóm $h$ nadobúda maximum a minimum na $\boldsymbol{x} \times \cdots \times \boldsymbol{x}$ na vektore obsahujúcom len jeden z koncových bodov $\boldsymbol{x}$: $[\{h(\vec{x}) : \vec{x} \in \boldsymbol{x} \times \cdots \times \boldsymbol{x}\}] = [\{h(\underline{x}, \ldots, \underline{x}), h(\overline{x}, \ldots, \overline{x})\}]$. Pre koncové body a polynóm $h$ máme $p(\underline{x}) = h(\underline{x}, \ldots, \underline{x})$ a $p(\overline{x}) = h(\overline{x}, \ldots, \overline{x})$. To nám dáva $HF_p(\boldsymbol{x}) = [\{h(\vec{x}) : \vec{x} \in \boldsymbol{x} \times \cdots \times \boldsymbol{x}\}] = [\{h(\underline{x}, \ldots, \underline{x}), h(\overline{x}, \ldots, \overline{x})\}] = [\{p(\underline{x}), p(\overline{x})\}] = p(\boldsymbol{x})$.

□

Skonštruovať interval $\boldsymbol{e}_p$ podľa definície je náročné. Avšak, je možné ľahko algoritmicky rozhodnúť o prázdnosti prieniku $\boldsymbol{e}_p$ a vnútra intervalu $\boldsymbol{x}$. O tom pojednávajú nasledujúce dve vety.

**Veta 4** (Stahl (1995), veta 3.1.21, Ekvivalentná podmienka)**.** *Nech* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR} \setminus \mathbb{R}$. *Potom*

$$
\begin{aligned}
&int(\boldsymbol{x}) \cap \boldsymbol{e}_p = \emptyset \\
&\qquad\Longleftrightarrow \\
&\qquad\qquad 0 \le \underline{x} \text{ a platí } 0 \le p_i(\underline{x}) \qquad\qquad \text{pre } i = n \dots 0 \\
&\qquad \text{alebo} \\
&\qquad\qquad 0 \ge \overline{x} \text{ a plati } 0 \le s_i p_i(\overline{x}) \qquad\qquad \text{pre } i = n \dots 0 \\
&\text{kde } s_n = 1, s_{i-1} = (-1) \cdot s_i \text{ pre } i = n \dots 0
\end{aligned}
$$

*Poznámka.* Stále pracujeme s $p$ v tvare definovaným na začiatku sekcie. Stačilo by vziať do úvahy iba indexy $i = n \dots 1$, vďaka rekurzívne definovaným subpolynómom a kladnosti/zápornosti $\underline{x}$, resp. $\overline{x}$, vyplývajúcej z predpokladu.

*Dôkaz.* (Stahl (1995, strana 50))

"$\Rightarrow$": Predpokladajme $int(\boldsymbol{x}) \cap \boldsymbol{e}_p = \emptyset$, t.j. $\overline{x} \le \underline{e}$ alebo $\overline{e} \le \underline{x}$. Potom pravá strana ekvivalencie vyplýva z lemmy 2.

"$\Leftarrow$": Túto časť dokážeme pomocnými tvrdeniami:

$$0 \le y \text{ a } 0 \le p_i(y) \qquad \text{pre } \forall i = n \dots 0 \qquad \Rightarrow \quad \overline{e} \le y \tag{3.5}$$

$$y \le 0 \text{ a } 0 \le s_i p_i(y) \qquad \text{pre } \forall i = n \dots 0 \qquad \Rightarrow \quad y \le \underline{e} \tag{3.6}$$

Inak povedané (3.5), chceme, aby pre $z > y$ platilo $p_i(z) \ne 0$. Majme $z : z > y$. Pre $i = n, n-1$ je $p_n(z) = a_n > 0, \quad p_{n-1}(z) = a_n z + a_{n-1} > a_n y + a_{n-1} = p_{n-1}(y)$. Pre indexy $i = n-1 \dots 0$ ukážeme $p_i(z) > p_i(y)$ indukciou: $p_{i-1}(z) = p_i(z)z + a_{i-1} > p_i(y)y + a_{i-1} = p_{i-1}(y)$. Z predpokladov máme $0 \le p_i(y)$ pre $i = n \dots 0$, ukázali sme $p_i(y) < p_i(z)$ $(i \ne n)$, čo nám spolu dáva $p_i(z) \ne 0$ pre $i = n \dots 0$.

Podobne (3.6). Potrebujeme, aby pre $z < y$ platilo $p_i(z) \ne 0$. Uvážme $z : z < y$. Pre $i = n, n-1$ je $s_n p_n(z) = a_n > 0, \quad s_{n-1}p_{n-1}(z) = -a_n z - a_{n-1} > -a_n y - a_{n-1} = p_{n-1}(y)$. Pre ďalšie indexy $i = n-1 \dots 0$ ukážeme $s_i p_i(z) > s_i p_i(y)$ indukciou: $s_{i-1}p_{i-1}(z) = -s_i p_i(z)z + s_{i-1}a_{i-1} > -s_i p_i(y)y + s_{i-1}a_{i-1} = s_{i-1}p_{i-1}(y)$. V predpokladoch máme $0 \le s_i p_i(y)$ pre $i = n \dots 0$, ukázali sme $s_i p_i(y) < s_i p_i(z)$ $(i \ne n)$, z čoho dostávame $p_i(z) \ne 0$ pre $i = n \dots 0$.

Pokiaľ je splnená jedna podmienka pravej časti ekvivalencie vety, tak použitím (3.5) alebo (3.6) dosadením $\underline{x}$ resp. $\overline{x}$ za $y$ dokončíme dôkaz.

□

Platnosť postačujúcej podmienky teda vieme overiť skúmaním subpolynómov $p_i$ v koncových bodov vstupného intervalu. Nasledujúca veta je kľúčová pre konkrétnu implementáciu Hornerovej formy s overovaním postačujúcej podmienky. Ukazuje, že je možné použiť Hornerovu formu jednotlivých subpolynómov v overovaní postačujúcej podmienky.

**Veta 5** (Stahl (1995), veta 3.1.22, Algoritmický test)**.** *Nech* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR} \setminus \mathbb{R}$. *Potom*

$$
\begin{aligned}
& int(\boldsymbol{x}) \cap \boldsymbol{e}_p = \emptyset \\
& \qquad \Longleftrightarrow \\
& \qquad\qquad 0 \le \underline{x} \text{ a platí } 0 \le \underline{HF_{p_i}(\boldsymbol{x})} \qquad\qquad \text{pre } i = n \dots 0 \\
& \qquad \text{alebo} \\
& \qquad\qquad 0 \ge \overline{x} \text{ a platí } 0 \le \underline{s_i \cdot HF_{p_i}(\boldsymbol{x})} \qquad \text{pre } i = n \dots 0 \\
& \text{kde } s_n = 1, s_{i-1} = (-1) \cdot s_i \text{ pre } i = n \dots 1
\end{aligned}
$$

*Dôkaz.* (Stahl (1995, strana 50))

"⇒": Nech platí predpoklad. Potom buď $\overline{x} \le \underline{e}$ alebo $\overline{e} \le \underline{x}$. Keďže pre $i = n \dots 0$ z definície Overestimation intervalu platí $\boldsymbol{e}_{p_i} \subseteq \boldsymbol{e}_p$, tak postačujúca podmienka je splnená aj pre subpolynómy a Horner na nich nenadhodnocuje: $HF_{p_i}(\boldsymbol{x}) = p_i(\boldsymbol{x})$. Ak $\overline{e} \le \underline{x}$, tak zrejme $0 \le \underline{x}$. Z vety 4 dostaneme $0 \le p_i(\underline{x})$ a z lemmy 2 o monotónnosti: $p_i(\underline{x}) = \underline{p_i(\boldsymbol{x})}$. Konečné $0 \le \underline{p_i(\boldsymbol{x})} = \underline{HF_{p_i}(\boldsymbol{x})}$.

Pre prípad $\overline{x} \le \underline{e}$, mame $0 \le \underline{x}$. Opäť použitím vety 4 a lemmy 2 dôjdeme k: $0 \le s_i p_i(\overline{x}) = \underline{s_i p_i(\boldsymbol{x})} = \underline{s_i \cdot HF_{p_i}(\boldsymbol{x})}$.

"⇐": Hornerova forma je extenzia, čiže $p_i(\boldsymbol{x}) \subseteq HF_{p_i}(\boldsymbol{x})$, teda $\underline{HF_{p_i}(\boldsymbol{x})} \le \underline{p_i(\boldsymbol{x})}$ a $\overline{p_i(\boldsymbol{x})} \le \overline{HF_{p_i}(\boldsymbol{x})}$. Ak platia podmienky operujúce s $s_i$, tak si musíme uvedomiť, že aj po vynásobení $-1$ sa vzťah inklúzie zachová: $-p_i(\boldsymbol{x}) \subseteq -HF_{p_i}(\boldsymbol{x})$. ďalej už len stačí použiť vzťahy $\underline{p_i(\boldsymbol{x})} \le p_i(\underline{x})$, $p_i(\overline{x}) \le \overline{p_i(\boldsymbol{x})}$ a vetu 4.

□

### 3.1.2 Horner pre intervaly so stredom v 0

Pokiaľ je stred vstupného intervalu 0, tak Horner spočítaný na intervaloch $[\underline{x}, 0]$ a $[0, \overline{x}]$ zmenší výsledné nadhodnotenie aspoň o polovicu chyby z Hornera nad intervalom $\boldsymbol{x}$. O tom hovorí nasledujúca veta. Jej dôkaz je možné nájsť v Stahlovi (Stahl (1995, strana 44)).

**Veta 6.** *Nech* $mid(\boldsymbol{x}) = 0$ *a* $HFBZ_p(\boldsymbol{x}) := HF_p([\underline{x}, 0]) \cup HF_p[0, \overline{x}]$, *potom*

$$
\begin{aligned}
\overline{HFBZ_p(\boldsymbol{x})} - \overline{p(\boldsymbol{x})} &\le (\overline{HF_p(\boldsymbol{x})} - \overline{p(\boldsymbol{x})})/2 \\
\underline{p(\boldsymbol{x})} - \underline{HFBZ_p(\boldsymbol{x})} &\le (\underline{p(\boldsymbol{x})} - \underline{HF_p(\boldsymbol{x})})/2
\end{aligned}
$$

## 3.2 Taylorova forma

Táto forma využíva fakt, že polynóm je možne vyjadriť Taylorovým rozvojom v ľubovolnom bode s konečným počtom členov. Pre ľubovoľnú hodnotu $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(c)}{i!} (x - c)^i.$$

**Definícia 8** (Taylorova forma)**.** *Taylorova forma* $TF_p : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ *pre polynóm* $p$ *je definovaná:*

$$TF_p(\boldsymbol{x}) := HF_{t_c}(\boldsymbol{x} - c) = p(c) + HF_{g_c}(\boldsymbol{x} - c) \cdot (\boldsymbol{x} - c)$$

*kde* $c = mid(\boldsymbol{x})$ *a*

$$t_c(y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(c)}{i!} y^i, \quad g_c(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{p^{(i+1)}(c)}{(i+1)!} y^i.$$

Z prvej definície, ktorá používa iba Hornerovu schému, vyplýva, že Taylorova forma je intervalovým rozšírením polynómu $p$. V tejto sekcii budeme používať tvar definície $p(c) + HF_{g_c}(\boldsymbol{x} - c) \cdot (\boldsymbol{x} - c)$. Voľba $c = mid(\boldsymbol{x})$ nám dáva symetrický interval $(\boldsymbol{x} - c) = [-r,r]$, $r = rad(\boldsymbol{x})$, s ktorým sa nám bude lepšie počítať. Nasledujúca lemma ukazuje, že hodnota $HF_{g_c}(\boldsymbol{x} - c) \cdot (\boldsymbol{x} - c)$ je symetrický interval, a ako je možné spočítať ho použitím magnitúd čiastočných subpolynómov. Z tejto lemmy priamo vychádza implementácia.

**Lemma 7.** *Nech*

$$\hat{g}_c(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{p^{(i+1)}(c)}{(i+1)!} \right| y^i,$$

$r = rad(\boldsymbol{x})$*, potom* $HF_{g_c}(\boldsymbol{x} - c) \cdot (\boldsymbol{x} - c) = \hat{g}_c(r) \cdot [-r,r]$.

*Dôkaz.* (Stahl (1995, strana 84)) Keďže je $(\boldsymbol{x} - c) = [-r,r]$ symetrický interval a $HF_{g_c}(\boldsymbol{x} - c) \cdot (\boldsymbol{x} - c) = mag(HF_{g_c}(\boldsymbol{x} - c)) \cdot [-r,r]$, stačí ukázať $\hat{g}_c(x) = mag(HF_{g_c}(\boldsymbol{x} - c))$. Definujme pre $i = 0 \ldots n-2$:

$$p_{n-1}(\boldsymbol{x} - c) = \frac{p^{(n)}(c)}{n!} \qquad \hat{p}_{n-1}(x) = \left| \frac{p^{(n)}(c)}{n!} \right|$$

$$p_i(\boldsymbol{x} - c) = p_{i+1}(\boldsymbol{x} - c) \cdot (\boldsymbol{x} - c) + \frac{p^{(i+1)}(c)}{(i+1)!} \quad \hat{p}_i(x) = \hat{p}_{i+1}(x) \cdot x + \left| \frac{p^{(i+1)}(c)}{(i+1)!} \right|$$

Zrejme $p_0(\boldsymbol{x} - c) = HF_{g_c}(\boldsymbol{x} - c)$ a $\hat{p}_0(r) = \hat{g}_c(r)$. Indukciou ukážeme

$$mag(p_i(\boldsymbol{x} - c)) = \hat{p}_i(r) \quad i = n-1 \ldots 0$$

Ak $i = n-1$, tak to platí. Indukčný krok:

$$\begin{aligned} mag(p_i(\boldsymbol{x} - c)) &= mag\Big(p_{i+1}(\boldsymbol{x} - c) \cdot (\boldsymbol{x} - c) + \frac{p^{(i+1)}}{(i+1)!}(c)\Big) \\ &= mag(p_{i+1}(\boldsymbol{x} - c) \cdot r) + \left| \frac{p^{(i+1)}}{(i+1)!}(c) \right| \\ &\overset{\text{IP}}{=} \hat{p}_{i+1}(r) + \left| \frac{p^{(i+1)}}{(i+1)!}(c) \right| = \hat{p}_i(r) \end{aligned}$$

Pre $i = 0$ potom $mag(HF_{g_c}(\boldsymbol{x} - c)) = mag(p_0(\boldsymbol{x} - c)) = \hat{p}_0(r) = \hat{g}_c(r)$.

□

Tak, ako aj Hornerova forma, aj Taylorova forma je monotónna v inklúzii. Túto vlastnosť nie je jednoduché vidieť priamo z definície. V nasledujúcej lemme ukážeme, že ju má aj Taylorova forma.

**Lemma 8.** *Taylorova forma je monotónna v inklúzii.*

*Dôkaz.* (Stahl (1995, strana 84)) Nech $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y}$ a $c_x$,$c_y$,$r_x$,$r_y$ sú príslušné stredové body a polomery intervalov $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$. Chceme ukázať $TF_p(\boldsymbol{x}) \subseteq TF_p(\boldsymbol{y})$. Ekvivalentne použitím lemmy 7:

$$p(c_x) + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{p^{(i)}(c_x)}{i!} \right| r_x^i \cdot [-1,1] \subseteq p(c_y) + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{p^{(i)}(c_y)}{i!} \right| r_y^i \cdot [-1,1] \tag{3.7}$$

V nasledujúcich nerovnostiach budeme používať vzťah

$$|c_x - c_y| \leq r_y - r_x. \tag{3.8}$$

Jeho platnosť dokážeme sporom. Pre spor predpokladajme $|c_x - c_y| > r_y - r_x$. Ďalej predpokladajme $|c_x - c_y| = c_y - c_x$. Hornú a dolnú hranicu intervalov $\boldsymbol{y}$,$\boldsymbol{x}$ vyjadríme v tvare $\overline{y} = c_y + r_y$ a $\underline{x} = c_x - r_x$. Potom $\overline{y} - \underline{x} = c_y + r_y - (c_x - r_x) = (c_y - c_x) + r_y + r_x > (r_y - r_x) + r_y + r_x = 2r_y$. Spor nastáva s predpokladom $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y}$. Ak by $|c_x - c_y| = c_x - c_y$, tak podobne skúmaním $\overline{x} - \underline{y}$ dôjdeme k podobnému sporu.

Použitím absolútnej hodnoty na Taylorov rozvoj $i$-tej derivácie v bode $c_y$ a (3.8) získame horný odhad:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{\left|p^{(i)}(c_x)\right|}{i!} r_x^i &\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{\left|p^{(j)}(c_y)(c_x - c_y)^{j-i}\right|}{i!(j-i)!} r_x^i \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{\left|p^{(j)}(c_y)\right|}{i!(j-i)!} (r_y - r_x)^{j-i} r_x^i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{\left|p^{(j)}(c_y)\right|}{i!(j-i)!} \frac{j!}{j!} (r_y - r_x)^{j-i} r_x^i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\left|p^{(j)}(c_y)\right|}{j!} \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} (r_y - r_x)^{j-i} r_x^i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\left|p^{(j)}(c_y)\right|}{j!} ((r_y - r_x + r_x)^j - (r_y - r_x)^{j-0} r_x^0) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\left|p^{(j)}(c_y)\right|}{j!} r_y^j - \sum_{j=1}^{n} \frac{\left|p^{(j)}(c_y)\right|}{j!} (r_y - r_x)^j \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\left|p^{(j)}(c_y)\right|}{j!} r_y^j - \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{p^{(j)}(c_y)}{j!} (c_x - c_y)^j \right| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\left|p^{(j)}(c_y)\right|}{j!} r_y^j - |p(c_x) - p(c_y)| \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Z vlastnosti absolútnej hodnoty: $|p(c_x) - p(c_y)| \geq p(c_x) - p(c_y), p(c_y) - p(c_x)$. Použitím týchto odhadov v (3.9) dostaneme nerovnosti ekvivalentné (3.7):

$$\begin{aligned}
p(c_x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\left|p^{(i)}(c_x)\right|}{i!} r_x^i &\leq p(c_y) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\left|p^{(i)}(c_y)\right|}{i!} r_y^i \\
p(c_x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left|p^{(i)}(c_x)\right|}{i!} r_x^i &\geq p(c_y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left|p^{(i)}(c_y)\right|}{i!} r_y^i
\end{aligned}$$

□

### 3.2.1 Taylorova forma so sekciou v 0

**Definícia 9.** *Taylorova forma so sekciou v 0 pre polynóm p je definovaná ako funkcia* $TFBM_p : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$*:*

$$TFBM_p(\boldsymbol{x}) := HFBZ_{t_c}(\boldsymbol{x} - mid(\boldsymbol{x})). \tag{3.10}$$

*Poznámka.* Keďže interval $(\boldsymbol{x} - mid(\boldsymbol{x}))$ je symetrický, t.j. $mid(\boldsymbol{x}) = 0$, tak podľa vety o Hornerovi 6 dostávame, že veľkosť chyby oproti $TF_p$ je polovičná.

## 3.3 Mean value forma

Mean value forma je založená na Lagrangeovej vete o strednej hodnote. Keďže polynómy sú spojité funkcie a majú v každom bode deriváciu, môžeme na ne aplikovať Langrageovu vetu. Pre ľubovoľné hodnoty $a$ a $b$ platí, že existuje $c$ medzi hodnotami $a$ a $b$ t.ž.:

$$p'(c) = \frac{p(a) - p(b)}{a - b}.$$

Nech $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}$. Pre $a,b \in \boldsymbol{x}$ z Lagrangea $\exists c$ t.ž. $p(a) = p(b) + p'(c)(a - b)$. Keďže aj $c$ je z $\boldsymbol{x}$, tak pre $\forall a,b \in \boldsymbol{x}$ platí $p(a) \in p(b) + p'(\boldsymbol{x})(a - b)$. Pre $\forall b \in \boldsymbol{x}$ potom platí $p(\boldsymbol{x}) \subseteq p(b) + p'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - b)$.

Voľbou $b$ a intervalovým rozšírením $p'$ dostávame celú triedu intervalových rozšírení polynómu $p$ : $P(\boldsymbol{x}) := p(b) + P'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - b)$.

Mean value forma je špeciálny prípad, kde sa za $b$ zvolí $mid(\boldsymbol{x})$, stred intervalu, a za intervalové rozšírenie $P'$ Hornerova forma $p'$.

**Definícia 10** (Mean value forma)**.** *Mean value forma* $MVF_p : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ *pre polynóm p je definovaná:*

$$MVF_p(\boldsymbol{x}) := p(mid(\boldsymbol{x})) + HF_{p'}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - mid(\boldsymbol{x})).$$

*Poznámka.* Mean value forma používa hodnotu polynómu $p$ v strede vstupného polynómu a interval vyprodukovaný Hornerovou formou derivácie vynásobený symetrickým intervalom. Symetrický interval nám umožňuje zapísať intervalovú formu v tvare: $MVF_p(\boldsymbol{x}) = p(c) + HF_{p'}(\boldsymbol{x})[-r,r]$, pre $r = rad(\boldsymbol{x})$. Potom hranice intervalu, ktorý dostaneme z Mean value formy majú hodnoty:

$$\overline{MVF_p(\boldsymbol{x})} = p(c) + mag(HF_{p'}(\boldsymbol{x})) \cdot r$$
$$\underline{MVF_p(\boldsymbol{x})} = p(c) - mag(HF_{p'}(\boldsymbol{x})) \cdot r$$

Monotónnosť tejto formy, resp. verzie pre viacrozmerné funkcie, je predstavená v článku Capela a Madenu (Caprani a Madsen, 1980). Dôkaz z nasledujúcej lemmy o monotónnosti Mean value formy pre polynómy je prevzatý zo Stahla (Stahl, 1995, Veta 3.2.3).

**Lemma 9** (Monotónnosť Mean value formy)**.** *Nech* $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{IR}$ *a* $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y}$*, potom* $MVF_p(\boldsymbol{x}) \subseteq MVF_p(\boldsymbol{y})$*.*

*Dôkaz.* (Stahl (1995, strany 69–70)) Podľa predchadzajúcej poznámky stačí ukázať

$$p(c_x) + mag(HF_{p'}(\boldsymbol{x})) \cdot r_x \leq p(c_y) + mag(HF_{p'}(\boldsymbol{y})) \cdot r_y$$
$$p(c_x) - mag(HF_{p'}(\boldsymbol{x})) \cdot r_x \geq p(c_y) - mag(HF_{p'}(\boldsymbol{y})) \cdot r_y$$

Z predpokladu $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y}$ a z monotónnosti Hornera máme $HF_{p'}(\boldsymbol{x}) \subseteq HF_{p'}(\boldsymbol{y})$, podobne platí aj pre ich magnitúdy. Z Lagrangea existuje $\mu$ medzi hodnotami $c_x$,$c_y$, $\mu \in \boldsymbol{y}$, ktoré spĺňa $p(c_x) = p(c_y) + p'(\mu) \cdot (c_x - c_y)$. Ďalej použijeme odhad vzdialenosti stredov $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$ z (3.8): $|c_x - c_y| \leq r_y - r_x$.

$$\begin{aligned} p(c_x) + mag(HF_{p'}(\boldsymbol{x}))r_x &= p(c_y) + p'(\mu) \cdot (c_x - x_y) + mag(HF_{p'}(\boldsymbol{x}))r_x \\ &\leq p(c_y) + |p'(\mu)| \cdot |(c_x - x_y)| + mag(HF_{p'}(\boldsymbol{y}))r_x \\ &\leq p(c_y) + mag(HF_{p'}(\boldsymbol{y})) \cdot (r_y - r_x) + mag(HF_{p'}(\boldsymbol{y}))r_x \\ &= p(c_y) + mag(HF_{p'}(\boldsymbol{y}))r_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(c_x) - mag(HF_{p'}(\boldsymbol{x}))r_x &= p(c_y) + p'(\mu) \cdot (c_x - x_y) - mag(HF_{p'}(\boldsymbol{x}))r_x \\ &\geq p(c_y) - |p'(\mu)| \cdot |(c_x - x_y)| - mag(HF_{p'}(\boldsymbol{y}))r_x \\ &\geq p(c_y) - mag(HF_{p'}(\boldsymbol{y})) \cdot (r_y - r_x) - mag(HF_{p'}(\boldsymbol{y}))r_x \\ &= p(c_y) - mag(HF_{p'}(\boldsymbol{y}))r_y \end{aligned}$$

□

### 3.3.1 Bicentred mean value forma

Základnou myšlienkou tejto formy je spočítanie dvoch Mean value foriem používajúce body $c_1$ a $c_2$ namiesto $mid(\boldsymbol{x})$. Tieto body sú volené tak, aby minimalizovali hornú hranicu obalu, resp. maximalizovali dolnú hranicu výsledného obalu. Ich optimálnosť v tomto zmysle je ukázaná vo vete 11.

Zaveďme $MVF_p(\boldsymbol{x}, d) = p(d) + HF_{p'}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - d)$. Z odvodenia Mean value formy ide o intervalovú extenziu. V prípade Mean value formy je $d = mid(\boldsymbol{x})$. V nasledujúcom texte označme interval $\boldsymbol{h'} := HF_{p'}(\boldsymbol{x})$.

**Definícia 11** (Bicentred Mean value forma)**.** *Bicentred Mean value forma pre polynóm $p$ je definovaná ako $MVFBC_p : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$:*

$$MVFBC_p(\boldsymbol{x}) := [\underline{MVF_p(\boldsymbol{x}, c_1)}, \overline{MVF_p(\boldsymbol{x}, c_2)}]$$

*kde*

$$c_1 = \begin{cases} \underline{x} & ak\ \underline{h'} \geq 0 \\ \overline{x} & ak\ \overline{h'} \leq 0 \\ (\underline{x}\overline{h'} - \overline{x}\underline{h'})/w(\boldsymbol{h'}) & inak \end{cases} \quad c_2 = \begin{cases} \overline{x} & ak\ \underline{h'} \geq 0 \\ \underline{x} & ak\ \overline{h'} \leq 0 \\ (\overline{x}\overline{h'} - \underline{x}\underline{h'})/w(\boldsymbol{h'}) & inak \end{cases}$$

Z tejto definície nie je úplne jasné usporiadanie $\underline{MVF_p(\boldsymbol{x},c_1)}$ a $\overline{MVF_p(\boldsymbol{x},c_2)}$, a teda správnosť definície. To vyplynie z vety 11 o optimálnosti voľby $c_1$ a $c_2$.

Pokiaľ $\boldsymbol{h'}$ obsahuje len nezáporné alebo nekladné hodnoty, polynóm $p$ je na intervale $\boldsymbol{x}$ monotónny, tak body $c_1,c_2$ sú hranice $\boldsymbol{x}$. V opačnom prípade je definícia komplikovanejšia. Všeobecne sú centrálne body $c_1,c_2$ konvexnou kombináciou hraníc intervalu $\boldsymbol{x}$, t.j. $c_1,c_2 \in \boldsymbol{x}$. Ďalej $MVF_p(\boldsymbol{x},d)$ je intervalové rozšírenie pre všetky $d \in \boldsymbol{x}$. Takže platí $p(\boldsymbol{x}) \subseteq MVF_p(\boldsymbol{x},c_1) \cap MVF_p(\boldsymbol{x},c_2)$. Z definície $MVF_p(\boldsymbol{x},c_1) \cap MVF_p(\boldsymbol{x},c_2) \subseteq MVFBC_p(\boldsymbol{x})$. Z toho vyplýva, že $MVFBC_p(\boldsymbol{x})$ je tiež intervalové rozšírenie pre polynóm $p$.

Čo sa týka usporiadania bodov $c_1$ a $c_2$ pre prípad, kedy $0 \in \boldsymbol{h'}$, tak musí nastať jedna zo situácií:

$$\begin{aligned} mag(\boldsymbol{h'}) = \overline{h'} \quad &\Rightarrow \quad c_1 \le c_2 \\ mag(\boldsymbol{h'}) = \underline{h'} \quad &\Rightarrow \quad c_2 \le c_1 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Pokiaľ $mag(\boldsymbol{h'}) = \overline{h'}$, tak $(\overline{x} - \underline{x})(\overline{h'} + \underline{h'}) \ge 0$. Potom $\overline{x}\overline{h'} - \underline{xh'} \ge \overline{x}\overline{h'} - \underline{xh'} - (\overline{x} - \underline{x})(\overline{h'} + \underline{h'}) = \underline{x}\overline{h'} - \overline{x}\underline{h'}$. Z čoho $c_2 \ge c_1$. Podobne pre $mag(\boldsymbol{h'}) = \underline{h'}$ máme $(\overline{x} - \underline{x})(\overline{h'} + \underline{h'}) \le 0$ a $\overline{x}\overline{h'} - \underline{xh'} \le \overline{x}\overline{h'} - \underline{xh'} - (\overline{x} - \underline{x})(\overline{h'} + \underline{h'}) = \underline{x}\overline{h'} - \overline{x}\underline{h'}$. Konečne $c_2 \le c_1$.

Pokiaľ nám Horner derivácie polynómu vráti interval nezáporných, resp nekladných hodnôt, tak je funkcia monotónna. Potom maximum a minimun polynómu je v hraniciach $\boldsymbol{x}$. Nasledujúca veta ukazuje, ze Bicentred mean value forma v tomto prípade nenadhodnocuje.

**Veta 10.** *Ak $0 \le \underline{h'}$ alebo $\overline{h'} \le 0$, potom $MVFBC_p(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x})$.*

*Dôkaz.* (Stahl (1995, strana 76)) Využijeme, že ak nastane jeden z predpokladov, tak hodnoty v $\boldsymbol{h'}$ sú nezáporné, resp. nekladné, a tak je polynóm $p$ monotónny. Všimnime si $(\boldsymbol{x} - \underline{x}) = [0,w]$ a $(\boldsymbol{x} - \overline{x}) = [-w,0]$, kde $w = w(\boldsymbol{x})$.

Pre prípad $0 \le \underline{h'}$ dostávame z definície pre $c_1,c_2$:

$$\begin{aligned} MVFBC_p(\boldsymbol{x}) &= [\underline{MVF_p(\boldsymbol{x},\underline{x})}, \overline{MVF_p(\boldsymbol{x},\overline{x})}] \\ &= [\underline{p(\underline{x}) + \boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - \underline{x})}, \overline{p(\overline{x}) + \boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - \overline{x})}] \\ &= [p(\underline{x}) + \underline{\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - \underline{x})}, p(\overline{x}) + \overline{\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - \overline{x})}] \\ &= [p(\underline{x}), p(\overline{x})] = p(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

Podobne ak $\overline{h'} \le 0$:

$$\begin{aligned} MVFBC_p(\boldsymbol{x}) &= [\underline{MVF_p(\boldsymbol{x},\overline{x})}, \overline{MVF_p(\boldsymbol{x},\underline{x})}] \\ &= [\underline{p(\overline{x}) + \boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - \overline{x})}, \overline{p(\underline{x}) + \boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - \underline{x})}] \\ &= [p(\overline{x}) + \underline{\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - \overline{x})}, p(\underline{x}) + \overline{\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - \underline{x})}] \\ &= [p(\overline{x}), p(\underline{x})] = p(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

□

**Veta 11** (Baumann (1988), Optimálnosť voľby $c_1$ a $c_2$). *Pre všetky $y \in \boldsymbol{x}$ platí*

$$\overline{MVF_p(\boldsymbol{x}, c_2)} \leq \overline{MVF_p(\boldsymbol{x}, y)} \tag{3.12}$$
$$\underline{MVF_p(\boldsymbol{x}, y)} \leq \underline{MVF_p(\boldsymbol{x}, c_1)}$$

*Dôkaz.* (Stahl (1995, strana 77)) Dôkaz predvedieme iba pre nerovnosť (3.12). Druhú je možné dokázať podobne. Ak $0 \leq \underline{h'}$ alebo $\overline{h'} \leq 0$, tak z predchádzajúcej vety $MVFBC_p(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x})$, a keďže $MVF_p(\boldsymbol{x}, y)$ je intervalové rozšírenie polynómu $p$ pre všetky $y \in \boldsymbol{x}$, tak dokazované nerovnosti musia platiť. Predpokladajme $0 \in \boldsymbol{h'}$. Pre hranice potom platí $\underline{h'} \leq 0 \leq \overline{h'}$. Nech $y \in \boldsymbol{x}$ je pevné. Z Taylorovho rozvoja $p$ v bode $c_2$ dostávame:

$$p(y) = p(c_2) + p'(\mu)(y - c_2) \geq p(c_2) + \underline{\boldsymbol{h'}(y - c_2)}$$

kde $\mu$ je medzi $y$ a $c_2$. Z definície $MVF_p(\boldsymbol{x}, y)$ a predchádzajúcej nerovnosti máme:

$$\overline{MVF_p(\boldsymbol{x}, y)} = p(y) + \overline{\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - y)} \geq p(c_2) + \underline{\boldsymbol{h'}(y - c_2)} + \overline{\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - y)}$$

Keďže $\overline{MVF_p(\boldsymbol{x}, c_2)} = p(c_2) + \overline{\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - c_2)}$, tak stačí ukázať:

$$\overline{\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - c_2)} = \underline{\boldsymbol{h'}(y - c_2)} + \overline{\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - y)}$$

Vlastnosť, že oba intervaly $(\boldsymbol{x} - y)$ a $\boldsymbol{h'}$ obsahujú nulu, nám umožňuje lepšie odhadnúť hornú hranicu ich súčinu: $\overline{\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - y)} = \max\{\underline{h'}(\underline{x} - y), \overline{h'}(\overline{x} - y)\}$. Podobne platí aj pre $c_2$. Preň vieme hodnotu $\overline{\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - c_2)}$ nájsť presne a to vďaka tomu, že $\underline{h'}(\underline{x} - c_2) = \overline{h'}(\overline{x} - c_2)$, čo ukážeme ďalej. Potom dostaneme:

$$\overline{\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - c_2)} = \underline{h'}(\underline{x} - c_2) = \overline{h'}(\overline{x} - c_2) \tag{3.13}$$

V našom prípade je $c_2 = (\overline{x}\overline{h'} - \underline{x}\underline{h'})/w(\boldsymbol{h'})$.

$$\begin{aligned}
\underline{h'}(\underline{x} - c_2) &= \underline{h'}\underline{x} - \underline{h'}(\overline{x}\overline{h'} - \underline{x}\underline{h'})/(\overline{h'} - \underline{h'}) \\
&= (\underline{h'}\underline{x}\overline{h'} - \underline{h'}\underline{x}\underline{h'} - \underline{h'}\overline{x}\overline{h'} + \underline{h'}\underline{x}\underline{h'})/(\overline{h'} - \underline{h'}) \\
&= (\underline{h'}\underline{x}\overline{h'} - \underline{h'}\overline{x}\overline{h'})/(\overline{h'} - \underline{h'}) \\
\overline{h'}(\overline{x} - c_2) &= \overline{h'}\overline{x} - \overline{h'}(\overline{x}\overline{h'} - \underline{x}\underline{h'})/(\overline{h'} - \underline{h'}) \\
&= (\overline{h'}\overline{x}\overline{h'} - \overline{h'}\overline{x}\underline{h'} - \overline{h'}\overline{x}\overline{h'} + \overline{h'}\underline{x}\underline{h'})/(\overline{h'} - \underline{h'}) \\
&= (\underline{h'}\underline{x}\overline{h'} - \underline{h'}\overline{x}\overline{h'})/(\overline{h'} - \underline{h'})
\end{aligned}$$

Pre prípad $c_2 \leq y$ potom platí:

$$\overline{h'}(\overline{x} - y) \leq \overline{h'}(\overline{x} - c_2) = \underline{h'}(\underline{x} - c_2) \leq \underline{h'}(\underline{x} - y)$$

To nám dáva $\overline{\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - y)} = \underline{h'}(\underline{x} - y)$. Konečne:

$$\underline{\boldsymbol{h'}(y - c_2)} + \overline{\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - y)} = \underline{h'}(y - c_2) + \underline{h'}(\underline{x} - y) = \underline{h'}(\underline{x} - c_2) = \overline{\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - c_2)}$$

Podobne pre $y < c_2$:

$$\begin{aligned}
&\underline{h'}(\underline{x} - y) \leq \underline{h'}(\underline{x} - c_2) = \overline{h'}(\overline{x} - c_2) \leq \overline{h'}(\overline{x} - y) \\
&\underline{\boldsymbol{h'}(y - c_2)} + \overline{\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - y)} = \overline{h'}(y - c_2) + \overline{h'}(\overline{x} - y) = \overline{h'}(\overline{x} - c_2) = \overline{\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - c_2)} \quad \square
\end{aligned}$$

**Veta 12.** *Bicentred mean value forma je monotónna vzhľadom na inklúziu.*

*Dôkaz.* (Stahl (1995, strany 77–78)) Nech $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y} \in \mathbb{IR}$, ${}^{x}c_1, {}^{x}c_2$ sú optimálne centrá pre $\boldsymbol{x}$, ${}^{y}c_1, {}^{y}c_2$ optimálne centrá pre $\boldsymbol{y}$, ${}^{x}\boldsymbol{h'} = HF_{p'}(\boldsymbol{x})$ a ${}^{y}\boldsymbol{h'} = HF_{p'}(\boldsymbol{y})$. Ekvivalentne chceme ukázať:

$$\underline{MVF_p(\boldsymbol{y}, {}^{y}c_1)} \leq \underline{MVF_p(\boldsymbol{x}, {}^{x}c_1)} \qquad \text{a} \qquad \overline{MVF_p(\boldsymbol{x}, {}^{x}c_2)} \leq \overline{MVF_p(\boldsymbol{y}, {}^{y}c_2)}$$

Ukážeme iba druhú nerovnosť. Prvú je možné dokázať podobne. Pokiaľ $\overline{{}^{x}h'} \leq 0$ alebo $0 \leq \underline{{}^{x}h'}$, tak Bicentred mean value forma je presná z vety 10 na $\boldsymbol{x}$. Bicentred mean value forma je intervalovým rozšírením $p$. To nám spolu dava:

$$MVFBC_p(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x}) \subseteq p(\boldsymbol{y}) \subseteq MVFBC_p(\boldsymbol{y})$$

Ďalej predpokladajme $0 \in int({}^{x}\boldsymbol{h'})$, t.j. $\underline{{}^{x}h'} < 0 < \overline{{}^{x}h'}$. Hornerova forma $p'$ je monotónna v inklúzii a máme $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y}$. Z toho $0 \in int({}^{y}\boldsymbol{h'})$, resp $\underline{{}^{y}h'} < 0 < \overline{{}^{y}h'}$. Rozlíšime dva možné prípady:

Ak ${}^{y}c_2 \leq {}^{x}c_2$, tak z Taylorovho rozvoju v bode ${}^{y}c_2$ existuje $\mu$ medzi ${}^{y}c_2$ a ${}^{x}c_2$, ktoré spĺňa:

$$p({}^{x}c_2) = p({}^{y}c_2) + p'(\mu)({}^{x}c_2 - {}^{y}c_2) \leq p({}^{y}c_2) + \overline{{}^{y}h'}({}^{x}c_2 - {}^{y}c_2)$$

Používaním (3.13) a predchádzajúcej nerovnosti:

$$\begin{aligned}
\overline{MVF_p(\boldsymbol{x}, {}^{x}c_2)} &= p({}^{x}c_2) + \overline{{}^{x}\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - {}^{x}c_2)} \overset{(3.13)}{=} p({}^{x}c_2) + \overline{{}^{x}h'}(\overline{x} - {}^{x}c_2) \\
&\leq p({}^{y}c_2) + \overline{{}^{y}h'}({}^{x}c_2 - {}^{y}c_2) + \overline{{}^{x}h'}(\overline{x} - {}^{x}c_2) \\
&\leq p({}^{y}c_2) + \overline{{}^{y}h'}({}^{x}c_2 - {}^{y}c_2) + \overline{{}^{y}h'}(\overline{y} - {}^{x}c_2) \\
&= p({}^{y}c_2) + \overline{{}^{y}h'}(\overline{y} - {}^{y}c_2) \overset{(3.13)}{=} p({}^{y}c_2) + \overline{{}^{y}\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{y} - {}^{y}c_2)} \\
&= \overline{MVF_p(\boldsymbol{y}, {}^{y}c_2)}
\end{aligned}$$

Ak ${}^{x}c_2 < {}^{y}c_2$, tak podobne z Taylorovho rozvoja:

$$p({}^{x}c_2) = p({}^{y}c_2) + p'(\mu)({}^{x}c_2 - {}^{y}c_2) \leq p({}^{y}c_2) + \underline{{}^{y}h'}({}^{x}c_2 - {}^{y}c_2)$$

Opäť používaním (3.13) a predchádzajúcej nerovnosti:

$$\begin{aligned}
\overline{MVF_p(\boldsymbol{x}, {}^{x}c_2)} &= p({}^{x}c_2) + \overline{{}^{x}\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{x} - {}^{x}c_2)} \overset{(3.13)}{=} p({}^{x}c_2) + \underline{{}^{x}h'}(\underline{x} - {}^{x}c_2) \\
&\leq p({}^{y}c_2) + \underline{{}^{y}h'}({}^{x}c_2 - {}^{y}c_2) + \underline{{}^{x}h'}(\underline{x} - {}^{x}c_2) \\
&\leq p({}^{y}c_2) + \underline{{}^{y}h'}({}^{x}c_2 - {}^{y}c_2) + \underline{{}^{y}h'}(\underline{y} - {}^{x}c_2) \\
&= p({}^{y}c_2) + \underline{{}^{y}h'}(\underline{y} - {}^{y}c_2) \overset{(3.13)}{=} p({}^{y}c_2) + \overline{{}^{y}\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{y} - {}^{y}c_2)} \\
&= \overline{MVF_p(\boldsymbol{y}, {}^{y}c_2)}
\end{aligned}$$

□

## 3.4 Slope forma

Táto forma je podobná Mean value forme. Vychádza zo skutočnosti, že pre každé $c \in \mathbb{R}$ existuje reálny polynóm $g_c$ taký, že: $p(x) = p(c) + g_c(x)(x - c)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Celá trieda intervalových rozšírení je potom daná: $P(\boldsymbol{x}) := p(c) + G_c(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - c)$, kde $G_c$ je intervalové rozšírenie polynomu $g_c$.

Slope forma je špeciálny prípad, kde $c$ je $mid(\boldsymbol{x})$ a ako intervalové rozšírenie $G_c$ sa vezme Hornerova forma $g_c$.

**Definícia 12** (Slope forma)**.** *Slope forma $SF_p : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ pre polynóm $p$ je definovaná:*

$$SF_p(\boldsymbol{x}) := p(c) + HF_{g_c}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - c)$$

*kde $c = mid(\boldsymbol{x})$ a $g_c$ je jedinečne definovaný polynóm, pre ktorý platí $p(x) = p(c) + g_c(x)(x - c)$.*

*Poznámka.* Z odvodenia ide o intervalové rozšírenie polynómu $p$. Avšak, táto forma nie je monotónna vzhľadom na inklúziu. Teda neplatí ak $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y} \in \mathbb{IR}$, $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y}$, tak $SP_p(\boldsymbol{x}) \subseteq SP_p(\boldsymbol{y})$. Príkladom, kedy to neplatí, je polynóm $p(x) = -3x^3 + 3x^2 + 8x$ a intervaly $\boldsymbol{x} = [0,1]$, $\boldsymbol{y} = [0,2]$. Slope forma pre polynóm $p$ dáva intervaly: $SP_p(\boldsymbol{x}) = [-0.75,9.5]$ a $SP_p(\boldsymbol{y}) = [0,16]$, teda $SP_p(\boldsymbol{x}) \not\subseteq SP_p(\boldsymbol{y})$.

**Lemma 13** (Krawczyk a Neumaier (1985), Predpis $g_c$)**.** *Definujme polynómy*

$$\begin{aligned} h_n(x) &= a_n \\ h_i(x) &= h_{i+1}(x)x + a_i \quad i = n-1\dots 1 \end{aligned}$$

*potom*

$$g_c(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(c)x^{i-1}$$

*je polynóm, ktorý spĺňa $p(x) = p(c) + g_c(x)(x - c)$.*

*Dôkaz.* (Krawczyk a Neumaier (1985, strany 612–613)) Všimneme si

$$h_{i+1}(c)c = h_i(c) - a_i \tag{3.14}$$

$$h_1(c)c = p(c) - a_0 \tag{3.15}$$

Potom

$$\begin{aligned} p(c) + g_c(x)(x - c) &= p(c) + \sum_{i=1}^{n} h_i(c)x^{i-1}(x - c) \\ &= p(c) + \sum_{i=1}^{n} h_i(c)x^i - \sum_{i=0}^{n-1} h_{i+1}(c)x^i c \\ &\overset{(3.14)}{=} p(c) + h_n(c)x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \Big(h_i(c) - (h_i(c) - a_i)\Big)x^i - h_1(c)c \\ &\overset{(3.15)}{=} p(c) + \sum_{i=1}^{n} a_i x^i - (p(c) - a_0) = p(x) \end{aligned}$$

□

## 3.5 Interpolačná forma

Hlavnou myšlienkou tejto formy je rozloženie polynómu $p$ na súčet dvoch polynómov $g$ a $p-g$. Polynóm $g$ v našom prípade bude parabola. Jej obal vieme jednoducho spočítať. Obálku zvyškového polynómu $p-g$ nájdeme použitím Hornera a využívaním symetrických intervaloch, ktoré nám uľahčujú výpočet.

Pre $x, c \in \mathbb{R}$ nám Taylorova veta s Langrangeovym zvyškom zaručuje existenciu $\mu$ medzi $x$ a $c$ t.ž.

$$p(x) = p(c) + p'(c)(x-c) + \frac{p''(\mu)(x-c)^2}{2}. \tag{3.16}$$

Odvodíme celú triedu intervalových rozšíreni polynómu $p$. Pre ľubovoľné $m \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned} p(x) &= p(c) + p'(c)(x-c) + \frac{p''(\mu)(x-c)^2}{2} + \frac{m}{2}(x-c)^2 - \frac{m}{2}(x-c)^2 \\ &= \underbrace{p(c) + p'(c)(x-c) + \frac{m}{2}(x-c)^2}_{g_{c,m}(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}(p''(\mu) - m))(x-c)^2}_{r_{c,m}(x)} \end{aligned}$$

Polynóm $g_{c,m}(x)$ je parabola, čo nám umožňuje presne spočítať jej obal. Adeptmi na hranice obalu paraboly sú hodnoty v koncových bodov $\boldsymbol{x}$ a vrchol paraboly. Takto dostaneme celú triedu intervalových rozšírení:

$$g_{c,m}(\boldsymbol{x}) + R_{c,m}(\boldsymbol{x}) \supseteq p(\boldsymbol{x}),$$

kde $R_{c,m}(x)$ je intervalovým rozšírením $r_{c,m}(x)$. Interpolačná forma je prvkom tejto triedy.

**Definícia 13** (Interpolačná forma)**.** *Interpolačná forma $IF_p : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ pre polynóm $p$ je definovaná:*

$$IF_p(\boldsymbol{x}) := g_{c,m}(\boldsymbol{x}) + 1/2 \cdot (HF_{p''}(\boldsymbol{x}) - m))(\boldsymbol{x} - c)^2,$$

*kde* $c = mid(\boldsymbol{x}),\ g_{c,m}(x) = p(c) + p'(c)(x-c) + \frac{m}{2}(x-c)^2,\ m = mid(HF_{p''}(\boldsymbol{x}))$*.*

Z odvodenia ide o intervalové rozšírenie $p$. Vlastnosť monotónnosti v inklúzii ostáva však otázna. Ďalej je predstavená Interpolačná forma 2, ktorá nie je horšia ako Interpolačná forma. Vychádza priamo zo vzťahu (3.16).

**Definícia 14** (Interpolačná forma 2)**.** *Interpolačná forma $IF2_p : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ pre polynóm $p$ je definovaná:*

$$\begin{aligned} IF2_p(\boldsymbol{x}) &= [\underline{down_c(\boldsymbol{x})}, \overline{up_c(\boldsymbol{x})}] \\ up_c(x) &= p(c) + p'(c)(x-c) + \frac{1}{2} \cdot \overline{HF_{p''}(\boldsymbol{x})}(x-c)^2 \\ down_c(x) &= p(c) + p'(c)(x-c) + \frac{1}{2} \cdot \underline{HF_{p''}(\boldsymbol{x})}(x-c)^2 \end{aligned}$$

Zrejme ide o intervalové rozšírenie. Namiesto konkrétneho $\mu$ z (3.16) operuje s hranicami $HF_{p''}(\boldsymbol{x})$, ktoré sa nachádzajú pred nezápornou funkciou, mocninou dvojky. Na spočítanie Interpolačnej formy 2 potrebujeme Hornera pre $p''$ a následne vyhodnotenie dvoch parabol. Ich obal vieme nájsť efektívne. Runtime implementácie tejto formy bol o niečo malo väčší ako u Interpolačnéj formy.

**Veta 14** (Vzťah Interpolačnej a Interpolačnej formy 2)**.**

$$IF2_p(\boldsymbol{x}) \subseteq IF_p(\boldsymbol{x}).$$

*Dôkaz.* (Stahl (1995, strany 115–116)) Pre $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}$ majme $m = mid(\underline{HF_{p''}(\boldsymbol{x})})$ a $c = mid(\boldsymbol{x})$. Ekvivalentne chceme ukázať $\underline{IF_p(\boldsymbol{x})} \leq \underline{down_c(\boldsymbol{x})}$ a $\overline{up_c(\boldsymbol{x})} \leq \overline{IF_p(\boldsymbol{x})}$.

Nech polynómy $up_c$ a $g_{c,m}$ nadobudnú maximum nad intervalom $\boldsymbol{x}$ v bodoch $u$ a $v$. Potom:

$$\begin{aligned}
\overline{up_c(\boldsymbol{x})} = up_c(u) &= p(c) + p'(c)(u-c) + \frac{1}{2} \cdot \overline{HF_{p''}(\boldsymbol{x})}(u-c)^2 \\
&= p(c) + p'(c)(u-c) + \frac{1}{2} \cdot (m + rad(HF_{p''}(\boldsymbol{x}))) \cdot (u-c)^2 \\
&= g_{c,m}(u) + \frac{1}{2} \cdot rad(HF_{p''}(\boldsymbol{x})) \cdot (u-c)^2 \\
&\leq g_{c,m}(v) + \frac{1}{2} \cdot rad(HF_{p''}(\boldsymbol{x})) \cdot (\boldsymbol{x}-c)^2 = \overline{IF_p(\boldsymbol{x})}
\end{aligned}$$

Podobne pre dolnú hranicu. Nech v bodoch $u$ a $v$ nadobudnú minimum $g_{c,m}$ a $down_c$ nad intervalom $\boldsymbol{x}$. Potom:

$$\begin{aligned}
\underline{down_c(\boldsymbol{x})} = down_c(v) &= p(c) + p'(c)(v-c) + \frac{1}{2} \cdot \underline{HF_{p''}(\boldsymbol{x})}(v-c)^2 \\
&= p(c) + p'(c)(v-c) + \frac{1}{2} \cdot (m - rad(HF_{p''}(\boldsymbol{x}))) \cdot (v-c)^2 \\
&= g_{c,m}(v) - \frac{1}{2} \cdot rad(HF_{p''}(\boldsymbol{x})) \cdot (v-c)^2 \\
&\geq g_{c,m}(u) - \frac{1}{2} \cdot rad(HF_{p''}(\boldsymbol{x})) \cdot (\boldsymbol{x}-c)^2 = \underline{IF_p(\boldsymbol{x})}
\end{aligned}$$

□

Nasledujúca forma vychádza z Interpolačnej formy 2, kde namiesto derivácie používa jedinečne definovaný polynóm $g_c$, ktorým vieme vyjadriť hodnotu $p$ v bode $x$ ako $p(x) = p(c) + p'(c)(x-c) + g_c(x)(x-c)^2$.

**Definícia 15** (Interpolačná slope forma )**.** *Interpolačná slope forma* $ISF_p : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ *pre polynóm* $p$ *je definovaná:*

$$\begin{aligned}
ISF_p(\boldsymbol{x}) &= [\underline{down_c(\boldsymbol{x})}, \overline{up_c(\boldsymbol{x})}] \\
up_c(x) &= p(c) + p'(c)(x-c) + \overline{HF_{g_c}(\boldsymbol{x})}(x-c)^2 \\
down_c(x) &= p(c) + p'(c)(x-c) + \underline{HF_{g_c}(\boldsymbol{x})}(x-c)^2
\end{aligned}$$

*kde* $g_c$ *je jedinečne definovaný polynóm t.ž.* $p(x) = p(c)+p'(c)(x-c)+g_c(x)(x-c)^2$.

Na spočítanie Interpolačnej slope formy potrebujeme vyhodnotiť Hornera, ale tentokrát polynómu $g_c$, a následne spočítať obálky dvoch parabol.

**Veta 15** (Predpis $g_c$)**.** *Definujme* $b_1 = a_1$, $b_k = \sum_{i=1}^{k}(k-i+1)a_i c^{k-i}$ *a* $h_r(x) = \sum_{i=1}^{r} b_i x^{r-i}$. *Potom* $g_c(x) = h_{n-2}(x)$, *t.j. polynómon, ktorý spĺňa* $p(x) = p(c) + p'(c)(x-c) + g_c(x)(x-c)^2$.

*Dôkaz.* Nasledujúci technický dôkaz je náš.

Chceme ukázať

$$p(x) = h_{n-2}(x)(x-c)^2 + p'(c)(x-c) + p(c). \tag{3.17}$$

Majme $p$ tvaru $p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}$. Funkcie na pravej strane prepíšeme do ekvivalentných tvarov:

$$h_{n-2}(x)(x-c)^2 = \sum_{i=1}^{n-2} b_i x^{n-i} - \sum_{i=1}^{n-2} 2cb_i x^{n-1-i} + \sum_{i=1}^{n-2} c^2 b_i x^{n-2-i} \tag{3.18}$$

$$p'(c)(x-c) = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) a_i c^{n-i-1} x - \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) a_i c^{n-i} \tag{3.19}$$

$$p(c) = \sum_{i=1}^{n} a_i c^{n-i} \tag{3.20}$$

Rovnosť polynómov (3.17)dokážeme postupnou komparáciou koeficientov pred mocninami $x$ na pravej a ľavej strane. Na ľavej strane je pred $x^s$ koeficient $a_{n-s}$. Ukážeme, že pre $s = 0 \ldots n-1$ je koeficient $a_{n-s}$ aj na pravej strane.

$s = 0$: $p(c)$ je konštanta, z (3.18) konštanta je $c^2 b_{n-2} = \sum_{i=1}^{n-2} (n-i-1) a_i c^{n-i}$ a z (3.19) máme $-\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) a_i c^{n-i}$:

$$\begin{aligned} \sum &= a_n + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i c^{n-1} - (n-i) a_i c^{n-i} + (n-i-1) a_i c^{n-i}) \\ &\quad - (n-(n-1)-1) a_{n-1} c^{n-(n-1)} \\ &= a_n + \sum_{i=1}^{n-1} (1-n+i+n-i-1) a_i c^{n-i} - 0 = a_n \end{aligned}$$

$s = 1$: z (3.18) sú to členy $-2cb_{n-2}$ a $c^2 b_{n-3}$, z (3.19) $\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) a_i c^{n-i-1}$:

$$\begin{aligned} -2cb_{n-2} &= -2c \sum_{i=1}^{n-2} (n-i-1) a_i c^{n-i-2} = \sum_{i=1}^{n-2} -2(n-i-1) a_i c^{n-i-1} \\ c^2 b_{n-3} &= c^2 \sum_{i=1}^{n-3} (n-i-2) a_i c^{n-i-3} = \sum_{i=1}^{n-3} (n-i-2) a_i c^{n-i-1} \\ \sum &= \sum_{i=1}^{n-3} (-2(n-i-1) + (n-i-2) + n-i) a_i c^{n-i-1} \\ &\quad - 2a_{n-2} c + 2a_{n-2} c + a_{n-1} \\ &= a_{n-1} \end{aligned}$$

$s = 2 \ldots n-3$: členy iba z (3.18) a to $b_{n-s}, 2cb_{n-s-1}, c^2 b_{n-s-2}$:

$$
\begin{aligned}
\sum &= \sum_{i=1}^{n-s} (n-s-i+1) a_i c^{n-s-i} - 2c \sum_{i=1}^{n-s-1} (n-s-i) a_i c^{n-s-i-1} \\
&\quad + c^2 \sum_{i=1}^{n-s-2} (n-s-i-1) a_i c^{n-s-i-2} \\
&= \sum_{i=1}^{n-s} (n-s-i+1) a_i c^{n-s-i} + \sum_{i=1}^{n-s-1} -2(n-s-i) a_i c^{n-s-i} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-s-2} (n-s-i-1) a_i c^{n-s-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-s-2} (n-s-i+1-2(n-s-i)+n-s-i-1) a_i c^{n-s-i} \\
&\quad - 2(n-s-(n-s-1)) a_{n-s-1} c^{n-s-n+s+1} \\
&\quad + (n-s-(n-s-1)+1) a_{n-s-1} c^{n-s-n+s+1} \\
&\quad + (n-s-(n-s)+1) a_{n-s} c^{n-s-n+s} \\
&= -2a_{n-s-1} c + 2a_{n-s-1} c + a_{n-s} = a_{n-s}
\end{aligned}
$$

$s = n-2, n-1$: z (3.18) sú to členy $b_2, -2cb_1$ pre $s = n-2$ a $b_1$ pre $s = n-1$:

$$
\begin{aligned}
b_2 - 2cb_1 &= (2a_1 c + a_2) - 2ca_1 = a_2 \\
b_1 &= a_1
\end{aligned}
$$

□

## 3.6 Bernsteinova forma

Na reálne polynómy sa môžeme pozerať aj ako na vektorový priestor. Každý vektorový priestor má bázu. Pre naše ciele bude vhodné zvoliť za bázu Bernsteinove polynómy. Každý polynóm je potom možné vyjadriť jedinečnou lineárnou kombináciou Bernsteinovych polynómov. Tieto koeficienty nazveme Bernsteinove koeficienty. Bernsteinova forma je potom obálka týchto koeficientov. Zo všetkých skúmaných foriem bola táto forma najpresnejšia, avšak časovo najnáročnejšia.

V tejto sekcii budeme uvažovať nedegenerovaný interval $\boldsymbol{x}$.

**Definícia 16** (Bernsteinov polynóm)**.** *J-ty Bernsteinov polynóm stupňa k nad intervalom $\boldsymbol{x}$ je definovaný:*

$$
p_j^{(k,\boldsymbol{x})}(y) = \binom{k}{j} \frac{(y-\underline{x})^j (\overline{x}-y)^{k-j}}{w(\boldsymbol{x})^k}
$$

Pre $y \in \boldsymbol{x}$ Bernsteinove polynomy splňuju:

$$
\begin{aligned}
p_j^{(k,\boldsymbol{x})}(y) &\geq 0, \\
\sum_{j=0}^{k} p_j^{(k,\boldsymbol{x})}(y) &= \frac{1}{w(\boldsymbol{x})^k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (y-\underline{x})^j (\overline{x}-y)^{k-j} \\
&= \frac{1}{w(\boldsymbol{x})^k} (y-\underline{x}+\overline{x}-y)^k = 1.
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

Ukážeme, že Bernsteinove polynómy tvoria bázu vektorového priestoru polynómov so stupňom $\leq k$. K dosiahnutiu tohto cieľa potrebujeme pomocnú technickú lemmu.

**Lemma 16** (Rokne (1977), lemma)**.** *Pre každé $m : 0 \leq m \leq k$, $y \in \mathbb{R}$ platí:*

$$(y - \underline{x})^m = w(\boldsymbol{x})^m \sum_{j=m}^{k} \frac{\binom{j}{m}}{\binom{k}{m}} p_j^{(k,\boldsymbol{x})}(y).$$

*Dôkaz.* (Rokne (1977, strana 228))

$$\begin{aligned}
(y - \underline{x})^m &= \frac{1}{(\overline{x} - \underline{x})^{k-m}} (y - \underline{x})^m (y - \underline{x} + \overline{x} - y)^{k-m} \\
&= \frac{1}{(\overline{x} - \underline{x})^{k-m}} (y - \underline{x})^m \sum_{j=0}^{k-m} \binom{k-m}{j} (y - \underline{x})^j (\overline{x} - y)^{k-m-j} \\
&= \frac{1}{(\overline{x} - \underline{x})^{k-m}} \sum_{j=m}^{k} \binom{k-m}{j-m} (y - \underline{x})^j (\overline{x} - y)^{k-j} \\
&= (\overline{x} - \underline{x})^m \sum_{j=m}^{k} \frac{\binom{j}{m}}{\binom{k}{m}} \binom{k}{j} \frac{(y - \underline{x})^j (\overline{x} - y)^{k-j}}{(\overline{x} - \underline{x})^k} \\
&= w(\boldsymbol{x})^m \sum_{j=m}^{k} \frac{\binom{j}{m}}{\binom{k}{m}} p_j^{(k,\boldsymbol{x})}(y)
\end{aligned}$$

□

Z Taylorovho rozvoja polynómu $p$ v bode $\underline{x}$ a použitím lemmy 16 odvodíme hľadanú lineárnu kombináciu Bernsteinovych polynomónov.

$$\begin{aligned}
p(y) &= \sum_{m=0}^{n} \frac{p^{(m)}(\underline{x})}{m!} \cdot (y - \underline{x})^m \\
&\stackrel{16}{=} \sum_{m=0}^{n} \frac{p^{(m)}(\underline{x})}{m!} \cdot w(\boldsymbol{x})^m \sum_{j=m}^{k} \frac{\binom{j}{m}}{\binom{k}{m}} p_j^{(k,\boldsymbol{x})}(y) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \sum_{m=0}^{j} \frac{\binom{j}{m}}{\binom{k}{m}} \frac{p^{(m)}(\underline{x})}{m!} w(\boldsymbol{x})^m p_j^{(k,\boldsymbol{x})}(y)
\end{aligned}$$

Koeficienty v takejto linernej kombinácii nazývame Bernsteinove koeficienty.

**Definícia 17** (Bernsteinov koeficient)**.** *J-ty Bernsteinov koeficient polynómu $p$, stupňa $k$ nad intervalom $\boldsymbol{x}$ je definovaný:*

$$b_j^{(k,\boldsymbol{x})} = \sum_{m=0}^{j} \frac{\binom{j}{m}}{\binom{k}{m}} \frac{p^{(m)}(\underline{x})}{m!} \cdot w(\boldsymbol{x})^m$$

Triviálne prípady:

$$b_0^{(k,\boldsymbol{x})} = p(\underline{x})$$
$$b_k^{(k,\boldsymbol{x})} = \sum_{m=0}^{k} \frac{p^{(m)}(\underline{x})}{m!} \cdot (\overline{x} - \underline{x})^m \overset{\text{Taylor}}{=} p(\overline{x})$$

Sú špeciálne v tom, že ich intervalový obal pokrýva maximá a minimá polynómu $p$ nad intervalom $\boldsymbol{x}$, t.j.

$$p(\boldsymbol{x}) \subseteq [\{b_j^{(k,\boldsymbol{x})} : j = 0 \dots k\}] \tag{3.22}$$

Ekvivalentne povedané, najväčší a najmenší Bernsteinov koeficient tvoria obal hodnôt polynómu nad intervalom $\boldsymbol{x}$.

*Dôkaz.*

$$\forall y \in \boldsymbol{x} :$$
$$p(y) = \sum_{j=0}^{k} b_j^{(k,\boldsymbol{x})} p_j^{(k,\boldsymbol{x})}(y) \leq \max_j b_j^{(k,\boldsymbol{x})} \sum_{j=0}^{k} p_j^{(k,\boldsymbol{x})}(y) = \max_j b_j^{(k,\boldsymbol{x})}$$
$$p(y) = \sum_{j=0}^{k} b_j^{(k,\boldsymbol{x})} p_j^{(k,\boldsymbol{x})}(y) \geq \min_j b_j^{(k,\boldsymbol{x})} \sum_{j=0}^{k} p_j^{(k,\boldsymbol{x})}(y) = \min_j b_j^{(k,\boldsymbol{x})}$$

□

**Definícia 18** (Bernsteinova forma)**.** *Bernsteinova forma stupňa $k$ pre polynóm $p$, kde $k \geq$ stupeň polynómu $p$, $BF_p : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ je definovaná ako obal Bernsteinovýchch koeficientov:*

$$BF_p^k(\boldsymbol{x}) := [\{b_j^{(k,\boldsymbol{x})} : j = 0 \dots k\}].$$

Je zrejmé, že $\max_j\{b_j^{(k,\boldsymbol{x})} : j = 0 \dots k\} = \overline{BF_p^k(\boldsymbol{x})}$ a $\min_j\{b_j^{(k,\boldsymbol{x})} : j = 0 \dots k\} = \underline{BF_p^k(\boldsymbol{x})}$.

**Veta 17** (Rokne (1977), veta 1, Nenadhodnocovanie BF)**.** *Charakterizácia presnostosti hornej a dolnej hranice BF je:*

$$\overline{p(\boldsymbol{x})} = \overline{BF_p^k(\boldsymbol{x})} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{BF_p^k(\boldsymbol{x})} \in \{b_0^{(k,\boldsymbol{x})}, b_k^{(k,\boldsymbol{x})}\},$$
$$\underline{p(\boldsymbol{x})} = \underline{BF_p^k(\boldsymbol{x})} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{BF_p^k(\boldsymbol{x})} \in \{b_0^{(k,\boldsymbol{x})}, b_k^{(k,\boldsymbol{x})}\}.$$

*Dôkaz.* (Stahl (1995, strana 95))

Ukážeme iba prvú ekvivaleciu, druhá sa dá odvodiť podobne.

"$\Leftarrow$": Prvý a posledný Bernsteinov koeficient sú hodnoty polynómu v $\underline{x}$ a $\overline{x}$. Teda $b_0^{(k,\boldsymbol{x})} = p(\underline{x})$ a $b_k^{(k,\boldsymbol{x})} = p(\overline{x})$. Pre $\forall x \in \boldsymbol{x}$ platí $p(x) \leq \overline{p(\boldsymbol{x})}$, špeciálne aj pre koncové body $p(\underline{x}),p(\overline{x}) \leq \overline{p(\boldsymbol{x})}$. Z (3.22) $\overline{p(\boldsymbol{x})} \leq \overline{BF_p^k(\boldsymbol{x})}$ ($\in \{p(\underline{x}),p(\overline{x})\}$), teda $\overline{p(\boldsymbol{x})} \leq p(\underline{x})$ alebo $\overline{p(\boldsymbol{x})} \leq p(\overline{x})$. Konečne $\overline{p(\boldsymbol{x})} = \overline{BF_p^k(\boldsymbol{x})}$.

"$\Rightarrow$": Predpokladajme $\overline{p(\boldsymbol{x})} = \overline{BF_p^k(\boldsymbol{x})}$. Pokiaľ sú všetky koeficienty rovnaké, tak tvrdenie platí. Uvážme, že nie sú rovnaké, t.j. $\exists s,r : s \neq r : b_s^{(k,\boldsymbol{x})} \neq b_r^{(k,\boldsymbol{x})}$ $(**)$.

Z definície Bernsteinových polynómov pre $y \in int(\boldsymbol{x})$ a pre $i = 0...k$ máme $0 < p_i^{(k,\boldsymbol{x})}(y)$. Potom $p(y) = \sum_{j=0}^{k} b_j^{(k,\boldsymbol{x})} p_j^{(k,\boldsymbol{x})}(y) < \max_j b_j^{(k,\boldsymbol{x})} \sum_{j=0}^{k} p_j^{(k,\boldsymbol{x})}(y) \overset{(3.21)}{=} \max_j b_j^{(k,\boldsymbol{x})}$. Nerovnosť platí vďaka (∗∗) a kladnosti Bernsteinových polynómov v bode $y$. Z nej máme $\overline{p(int(\boldsymbol{x}))} < \max_j b_j^{(k,\boldsymbol{x})} = \overline{BF_p^k(\boldsymbol{x})} = \overline{p(\boldsymbol{x})}$. Z toho sa maximum nadobúda v koncových bodoch intervalu: $\overline{p(\boldsymbol{x})} = \max\{p(\underline{x}), p(\overline{x})\}$, teda v nultom alebo $k$-tom Bernsteinovom koeficiente.

□

**Veta 18** (Rokne (1977), veta 1)**.** *Bernsteinova forma je intervalové rozšírenie polynómu.*

*Dôkaz.* Z (3.22) máme $p(\boldsymbol{x}) \subseteq BF_p^k(\boldsymbol{x})$ pre $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}$. Pre $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ sú všetky koeficienty rovnaké a rovné $p(\underline{x}) = p(\overline{x}) = p(\boldsymbol{x})$.

□

Bernsteinova forma je tiež monotónna v inklúzii, dôkaz je možné nájsť v článku Honga a Stahla (Hong a Stahl, 1995).

Aby sme určili hornú a dolnú hranicu Bernsteinovej formy, potrebujeme spočítať všetky Bernsteinove koeficienty. Namiesto počítania hodnôt z definície, ukážeme vetu popisujúcu schému výpočtu. Táto schéma nám v implementácii umožňuje využívanie skôr spočítaných hodnôt k nájdeniu nasledujúceho Bernsteinovho koeficientu.

**Veta 19** (Rokne (1979), Schéma výpočtu Bernsteinových koeficientov)**.** *Definujme rekurzívne:*

$$\begin{aligned} v_{i,0} &= \frac{t_{i-1}(\underline{x})}{\binom{k}{i-1}} \cdot w(\boldsymbol{x})^{i-1} && i = 1 \dots n \\ v_{n,j} &= v_{n,0} && j = 1 \dots k-d \\ v_{i,j} &= v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1} && j = 1 \dots k,\ i = 1 \dots \min(n-1, k-j+1) \end{aligned}$$

*kde $d$ je stupeň polynómu, $n = d+1$, $k \geq d$, $t_i(y)$ je $i$-ty Taylorov koeficient v bode $y$ ($t_i(y) = p^{(i)}(y)/i!$), potom $v_{1,j} = b_j^{(k,\boldsymbol{x})}$ pre $j = 0 \dots k$.*

*Dôkaz.* (Stahl (1995, strana 108)) Indukciou ukážeme

$$v_{i,j} = \sum_{m=0}^{j} \frac{\binom{j}{m}}{\binom{k}{m+i-1}} t_{m+i-1}(\underline{x}) w(\boldsymbol{x})^{m+i-1}$$

kde $i = 1 \dots n, j = 0 \dots k-i+1$.

Pre $i = 1 \dots n$ a $j = 0$ máme $\frac{\binom{0}{0}}{\binom{k}{i-1}} t_{i-1}(\underline{x}) w(\boldsymbol{x})^{i-1} = \frac{t_{i-1}(\underline{x})}{\binom{k}{i-1}} \cdot w(\boldsymbol{x})^{i-1} = v_{i,0}$. Ak zvolíme za indexy $i = n$ a $j = 1 \dots k-d$, tak vďaka tomu, že $t_{m+n-1}(\underline{x}) = 0$ pre $m > 1$, tak platí: $\sum_{m=0}^{j} \frac{\binom{j}{m}}{\binom{k}{m+n-1}} t_{m+n-1}(\underline{x}) w(\boldsymbol{x})^{m+n-1} = \frac{\binom{0}{0}}{\binom{k}{n-1}} t_{n-1}(\underline{x}) w(\boldsymbol{x})^{n-1} = v_{n,0} = v_{n,j}$. Týmto máme pripravenú indukčnú bázu. Pre ďalšie indexy $j = 1 \dots k$ a $i = 1 \dots \min(n-1, k-j+1)$ vzťah ukážeme pužitím indukcie:

$$
\begin{aligned}
v_{i,j} &= v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1} \\
&\overset{\text{IP}}{=} \sum_{m=0}^{j-1} \frac{\binom{j-1}{m}}{\binom{k}{m+i-1}} t_{m+i-1}(\underline{x}) w(\boldsymbol{x})^{m+i-1} + \sum_{m=0}^{j-1} \frac{\binom{j-1}{m}}{\binom{k}{m+i}} t_{m+i}(\underline{x}) w(\boldsymbol{x})^{m+i} \\
&= \sum_{m=0}^{j-1} \frac{\binom{j-1}{m}}{\binom{k}{m+i-1}} t_{m+i-1}(\underline{x}) w(\boldsymbol{x})^{m+i-1} + \sum_{m=1}^{j} \frac{\binom{j-1}{m-1}}{\binom{k}{m+i-1}} t_{m+i-1}(\underline{x}) w(\boldsymbol{x})^{m+i-1} \\
&= \frac{\binom{j-1}{0}}{\binom{k}{i-1}} t_{i-1}(\underline{x}) w(\boldsymbol{x})^{i-1} + \sum_{m=1}^{j-1} \frac{\binom{j-1}{m} + \binom{j-1}{m-1}}{\binom{k}{m+i-1}} t_{m+i}(\underline{x}) w(\boldsymbol{x})^{m+i-1} \\
&+ \frac{\binom{j-1}{j-1}}{\binom{k}{j+i-1}} t_{j+i-1}(\underline{x}) w(\boldsymbol{x})^{j+i-1} = \sum_{m=0}^{j} \frac{\binom{j}{m}}{\binom{k}{m+i-1}} t_{m+i-1}(\underline{x}) w(\boldsymbol{x})^{m+i-1}
\end{aligned}
$$

Špeciálne pre $i = 1$ dostávame:

$$v_{1,j} = \sum_{m=0}^{j} \frac{\binom{j}{m}}{\binom{k}{m}} t_m(\underline{x}) w(\boldsymbol{x})^m = b_j^{(k,\boldsymbol{x})} \text{ pre } j = 0 \dots k.$$

□

Implementácia používa práve túto schému. Viac detailov môžeme nájsť v komentovaných zdrojových súboroch.

## 3.7 Intervalové polynómy a ich formy

V tejto časti predstavíme redukciu výpočtu obalu intervalového polynómu na obaly polynómov s bodovými koeficientmi. To nám umožní použiť metódy na hľadanie obalu obyčajných polynómov na hľadanie obalu intervalových polynómov.

**Definícia 19.** *Intervalový polynóm je polynóm s intervalovými koeficientmi:*

$$p(x) = \boldsymbol{a_n} x^n + \boldsymbol{a_{n-1}} x^{n-1} + \cdots + \boldsymbol{a_1} x + \boldsymbol{a_0}.$$

Je potrebné uvedomiť si, že hodnota v bode $x$ je typický nedegenerovaný interval. Obor hodnôt takéhoto polynómu nad intervalom $\boldsymbol{x}$, si môžeme predstaviť ako zjednotenie oboru hodnôt bodovych polynómov, ktorých koeficienty sú vybraté z intervalov pôvodného polynómu, t.j.

$$p(\boldsymbol{x}) = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i : x \in \boldsymbol{x},\, a_i \in \boldsymbol{a_i}\}$$

Takýto obor hodnôt bude opäť interval a to vďaka spojitosti polynómov voči zmene koeficientov.

Obal intervalového polynómu je možné určiť z obalov polynómov, ktoré obsahujú namiesto intervalových koeficientov horné, resp. dolné hranice koeficientov intervalového polynómu. V nasledujúcej novej lemme ukážeme, ako nájsť hornú a dolnú hranicu hodnoty polynómu v ľubovoľnom bode.

**Lemma 20** (Maximum a minimun v bode)**.** *Máme intervalový polynom* $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{a_i} x^i$. *Potom:*

$$\text{pre } y \in [0,\infty]: \qquad \overline{p(y)} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} y^i \qquad a \qquad \underline{p(y)} = \sum_{i=0}^{n} \underline{a_i} y^i, \tag{3.23}$$

$$\text{pre } y \in [-\infty,0]: \qquad \overline{p(y)} = \sum_{i=0}^{n} \delta_i(\boldsymbol{a_i}) y^i \qquad a \qquad \underline{p(y)} = \sum_{i=0}^{n} \check{\delta}_i(\boldsymbol{a_i}) y^i, \tag{3.24}$$

*kde*

$$\delta_i(\boldsymbol{a}) = \begin{cases} \overline{a} & i \equiv 0 \pmod 2 \\ \underline{a} \end{cases} \qquad a \qquad \check{\delta}_i(\boldsymbol{a}) = \begin{cases} \underline{a} & i \equiv 0 \pmod 2 \\ \overline{a} \end{cases}$$

*Dôkaz.* Najprv (3.23). Indukciou ukážeme, že pre $m = 0 \ldots n$ platí $\overline{\sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{a_i} y^i} = \sum_{i=0}^{m} \overline{a_i} y^i$ a $\underline{\sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{a_i} y^i} = \sum_{i=0}^{m} \underline{a_i} y^i$ . Ak je $m = 0$, tak to zrejme platí. Ak je $y$ nezáporne, tak pre ľubovoľný interval $\boldsymbol{a}$ platí $\overline{\boldsymbol{a}y^i} = \overline{a} y^i$ a $\underline{\boldsymbol{a}y^i} = \underline{a} y^i$. Ďalej indukciou pre $y \in [0,\infty]$ dostávame:

- $$\overline{\sum_{i=0}^{m+1} \boldsymbol{a_i} y^i} = \overline{\sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{a_i} y^i} + \overline{\boldsymbol{a_{m+1}} y^{m+1}} \overset{\text{IP}}{=} \sum_{i=0}^{m} \overline{a_i} y^i + \overline{\boldsymbol{a_{m+1}} y^{m+1}} = \sum_{i=0}^{m+1} \overline{a_i} y^i$$
- $$\underline{\sum_{i=0}^{m+1} \boldsymbol{a_i} y^i} = \underline{\sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{a_i} y^i} + \underline{\boldsymbol{a_{m+1}} y^{m+1}} \overset{\text{IP}}{=} \sum_{i=0}^{m} \underline{a_i} y^i + \underline{\boldsymbol{a_{m+1}} y^{m+1}} = \sum_{i=0}^{m+1} \underline{a_i} y^i$$

Podobne (3.24). Indukciou chceme ukázať rovnosti $\overline{\sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{a_i} y^i} = \sum_{i=0}^{m} \delta_i(\boldsymbol{a_i}) y^i$ a $\underline{\sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{a_i} y^i} = \sum_{i=0}^{m} \check{\delta}_i(\boldsymbol{a_i}) y^i$ , kde $m = 0 \ldots n$. Pre $m = 0$ máme $\delta_0(\boldsymbol{a_0}) = \overline{a_0}$ a $\check{\delta}_0(\boldsymbol{a_0}) = \underline{a_0}$, takže indukčná báza platí. Ak vezmeme do úvahy záporné alebo nulové $y$, tak pre ľubovoľný interval $\boldsymbol{a}$ a pre párne $i$ máme $\overline{\boldsymbol{a}y^i} = \overline{a} y^i$ a $\underline{\boldsymbol{a}y^i} = \underline{a} y^i$. V prípade, kedy $i$ je nepárne, tak $\overline{\boldsymbol{a}y^i} = \underline{a} y^i$ a $\underline{\boldsymbol{a}y^i} = \overline{a} y^i$. To nám dáva $\boldsymbol{a}y^i = [\check{\delta}_i(\boldsymbol{a}) y^i, \delta_i(\boldsymbol{a}) y^i]$. Potom indukciou pre $y \in [-\infty,0]$:

- $$\overline{\sum_{i=0}^{m+1} \boldsymbol{a_i} y^i} = \overline{\sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{a_i} y^i} + \overline{\boldsymbol{a_{m+1}} y^{m+1}} \overset{\text{IP}}{=} \sum_{i=0}^{m} \delta_i(\boldsymbol{a_i}) y^i + \overline{\boldsymbol{a_{m+1}} y^{m+1}} = \sum_{i=0}^{m+1} \delta_i(\boldsymbol{a_i}) y^i$$
- $$\underline{\sum_{i=0}^{m+1} \boldsymbol{a_i} y^i} = \underline{\sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{a_i} y^i} + \underline{\boldsymbol{a_{m+1}} y^{m+1}} \overset{\text{IP}}{=} \sum_{i=0}^{m} \check{\delta}_i(\boldsymbol{a_i}) y^i + \underline{\boldsymbol{a_{m+1}} y^{m+1}} = \sum_{i=0}^{m+1} \check{\delta}_i(\boldsymbol{a_i}) y^i$$

□

Podľa nasledujúcej novej vety nám na nájdenie obalu intervalového polynómu stačí nájsť obaly dvoch alebo štyroch bodových polynómov. Ak $0 \in int(\boldsymbol{x})$, tak je potrebné $\boldsymbol{x}$ rozdeliť v bode 0 na dva intervaly a nájsť obaly štyroch bodových polynómov. Ak $0 \notin int(\boldsymbol{x})$, tak len dvoch bodových polynómov.

**Veta 21** (Obal intervalového polynómu)**.** *Nech* $p$ *je intervalový polynóm a* $\boldsymbol{x}$ *interval tvaru* $\boldsymbol{x} = [a,b]$. *Potom*

$$\begin{aligned} &\text{ak } b \le 0 \quad \text{tak} && p(\boldsymbol{x}) = [\underline{\check{g}(\boldsymbol{x})}, \overline{g(\boldsymbol{x})}] \\ &\text{ak } 0 \le a \quad \text{tak} && p(\boldsymbol{x}) = [\underline{\check{h}(\boldsymbol{x})}, \overline{h(\boldsymbol{x})}] \\ &\text{inak} && p(\boldsymbol{x}) = [\underline{\check{g}([a,0])}, \overline{g([a,0])}] \cup [\underline{\check{h}([0,b])}, \overline{h([0,b])}] \end{aligned}$$

*kde* $\check{g}(y) = \sum_{i=0}^{n} \underline{a_i} y^i$*,* $g(y) = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} y^i$*,* $\delta$ *a* $\check{\delta}_i$ *sú definované ako v lemme 20 a* $\check{h}(y) = \sum_{i=0}^{n} \check{\delta}_i(\boldsymbol{a_i}) y^i$*,* $h(y) = \sum_{i=0}^{n} \delta_i(\boldsymbol{a_i}) y^i$*.*

*Dôkaz.* Táto veta je priamym dôsledkom predchádzajúcej lemmy 20. V každom bode $y$ vieme nájsť hranice intervalu $p(y)$ pomocou istých polynómov. Predpisy týchto polynómov sú rovnaké v intervaloch $[-\infty,0]$ a $[0,\infty]$. Sú to práve bodové polynómy $g$,$\check{g}$, $h$ a $\check{h}$.

$\square$

*Dôsledok.* Nech $G(x)$, $\check{G}(x)$, $H(x)$ a $\check{H}(x)$ sú príslušné intervalové rozšírenia. Definujme $P : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ nasledovne:

$$P([a,b]) := \begin{cases} [\underline{\check{G}([a,b])}, \overline{G([a,b])}] & \text{ak } b \leq 0 \\ [\underline{\check{H}([a,b])}, \overline{H([a,b])}] & \text{ak } 0 \leq a \\ [\underline{\check{G}([a,b])}, \overline{G([a,b])}] \cup [\underline{\check{H}([a,b])}, \overline{H([a,b])}] & \text{inak} \end{cases}$$

Keďže platí $\underline{\check{G}([a,b])} \leq \underline{\check{g}([a,b])}, \overline{g([a,b])} \leq \overline{G([a,b])}, \underline{\check{H}([a,b])} \leq \underline{\check{h}([a,b])}$ a $\overline{h([a,b])} \leq \overline{H([a,b])}$, tak $P$ je intervalové rozšírenie intervalového polynómu $p$. Podobne platí, ak $G(x)$, $\check{G}(x)$, $H(x)$ a $\check{H}(x)$ sú monotónne v inklúzii, tak aj $P(x)$ je monotónna funkcia vzhľadom na inklúziu.

# 4. Užívateľská dokumentácia

Súčasťou práce je balík *pv* (polynomial value) obsahujúci m-súbory, ktoré implementujú výpočet obalu oboru hodnôt reálnych a intervalových polynómov nad intervalom. Je možné ich používať v Matlabe alebo Octave. Funkcie vychádzajú z foriem popísaných v predchádzajúcej kapitole.

## 4.1 Prostredie

Ako programátorské prostredie sme zvolili Matlab a Octave. Funkcie fungujú v oboch systémoch. Balík používa intervalovú aritmetiku toolboxu INTLAB, ktorý však nie je jeho súčasťou.

V Octave je možné namiesto INTLABu použiť slobodný balík *interval*, ktorý poskytuje podobnú funkčnosť ako INTLAB. Ďalej, v Octave, môžeme využiť paralelizmus pri výpočte obalu intervalového polynómu. To zabezpečuje balík *parallel*, ktorý je distribuovaný s naším balíkom. Zapnutie a vypnutie paralelizmu je umožnené pri inicializácii balíka *pv*.

Súčasťou priloženého CD je aj balík *tests*, ktorý sme použili pri tvorbe štatistikého výstupu. Informácie o balíku a jeho využití sú popísane v programátorskej dokumentácii.

Samozrejme, pred použitím je odporúčané prečítať si *README.md*.

### 4.1.1 Základné konštrukcie

Zápis intervalu $x = [2,3]$, reálneho a intervalového polynómu

$$p(y) = 2y^3 + y + 4$$
$$ig(z) = [4,4.3]z^2 + 2z + [3,3.3]$$

v prostredí Matlab/Octave s toolboxom INTLAB/interval:

```
>> x = infsup(2,3)
intval x =
[    2.0000,    3.0000]
>> p = [2 0 1 4]
p =

   2   0   1   4

>> ig = [infsup(4,4.3) 2 infsup(3,3.3)]
intval ig =
[    4.0000,    4.3000] [    2.0000,    2.0000] [    3.0000,    3.3000]
```

Podrobnejší popis toolboxu INTLAB a jeho syntaxe je možné nájsť na jeho domovskej stránke v sekcii demo: `http://www.ti3.tuhh.de/intlab/demos/html/dintval.html`. Všeobecné informácie o balíku *interval* a rozdiely medzi ním a INTLABom sú popísané na Octave wiki: `http://wiki.octave.org/Interval_package`.

## 4.2 Inštalácia

Inštalácia spočíva vo vytvorení lokálnej kópie obsahu CD a načítaní funkcií do prostredia Matlab/Octave. Pre načítanie funkcií treba nastaviť *working directory* na priečinok s lokálnou kópiou. To je možné použitím príkazu *cd* priamo v Matlab/Octave, prípadne v terminále spustením prostredia.

Zavolaním funkcie *demo* sa vypíšu základné informácie o balíku *pv* a tiež aj postup jeho inicializácie.

Následne je potrebné zavolať funkciu *pvinit*. Tú je možné zavolať s parametrom *par* pre aktiváciu paralelizmu v Octave, ktorý sa použije počas výpočtu nad intervalovým polynómom. Takto je možné zapnúť ho v ľubovoľnej časti programu. Pre vypnutie je nutné reinicializovať prostredie. Ukazuje sa, že paralelizmus je vhodné aktivovať, ak pracujeme s intervalovými polynómami so stupňom aspoň 10.

Funkcia *pvinit* sa pokúsi detekovať úspešné načítanie knižnice v prostredí podporujúcom intervalovú aritmetiku. Ak sa jej to nepodarí, vyzve užívateľa k jej inicializácii a v Octave navrhne načítanie balíka *interval* a zobrazí inštrukcie k jeho načítaniu.

INTLAB sa inicializacializuje príkazom *startintlab*. Avšak, predtým musí byť načítaná cesta k jeho súborom, napr. príkazom *addpath*. Balík *interval* sa v Octave inicializuje príkazom *pkg load interval*.

Podobne platí, ak užívateľ sa rozhodne použiť paralelizmus v Octave, a teda balík *parallel* a jeho závislosť *struct*.

## 4.3 Verejné metódy

Po inicializácii balíka *pv* funkciou *pvinit* sa sprístupnia metódy na výpočet obalu oboru hodnôt reálneho i intervalového polynómu. Taktiež sa sprístupnia funkcie, ktoré boli použité na vytvorenie štatistiky. Viac informacií o nich a balíku *tests* je v programátorskej dokumentácii.

### 4.3.1 Reálne polynómy

Funkcie hľadajúce obálku reálnych polynómov majú povinné dva parametre. Su nimi reálne koeficienty polynómu, ako reálny vektor, a intervalové $\boldsymbol{x}$. Koeficienty, ktoré sú pred vyššími mocninami sa vo vektorovej reprezentácii objavia skôr, napr. pre polynóm $8x^2 + 1$ su príslušné koeficienty reprezentované reálnym vektorom [8 0 1].

Metódy založené na:

- Hornerovej forme:
  - pvhornerenc: ak vráti 1 ako druhý výstupný parameter *ver*, tak Horner nenadhodnocuje, vychádza z vety 5
  - pvhornerlzenc: očakáva interval tvaru $[0,r],\ 0 \leq r$
  - pvhornerbzenc: vstupný interval rozdelí v 0 a spočíta dvakrát Hornera

- Taylorovej forme:
  - pvtaylorenc: obálka Taylorovej formy polynómu
  - pvtaylorbmenc: z definície (3.10) Taylorovej formy so sekciou v 0 intervalu $[r,r]$ počíta Hornera Taylorovho rozvoja polynómu nad dvoma intervalmi $[-r,0]$ a $[0,r]$, kde $r$ je polomerom vstupného intervalu
- Mean value forme:
  - pvmeanvalenc: obálka Mean value formy polynómu
  - pvmeanvalbcenc: obálka Bicentred mean value formy polynómu
- Slope forme:
  - pvslopeenc: obálka Slope formy polynómu
- Interpolačnej forme:
  - pvinterpolationenc: obálka Interpolačnej formy polynómu
  - pvinterpolation2enc: obálka Interpolačnej formy 2 polynómu
  - pvinterpolationslenc: obálka Interpolačnej slope formy polynómu
- Bernsteinovej forme:
  - pvbernsteinenc: obálka Bernsteinovej formy polynómu. Tretí nepovinný argument je $k$. Ovplyvňuje, koľko Bernsteinových koeficientov, potrebných na určenie obalu, sa má spočítať. Funkcia počíta $k+1$ Bernsteinových koeficientov. Hodnota $k$ by mala byť veľká aspoň ako stupeň polynómu. Implicitná hodnota pre $k$ je stupeň polynómu. Druhý výstupný parameter *ver* je 1 práve vtedy, keď Bernsteinova forma polynómu nenadhodnocuje, veta 17.
  - pvbernsteinbzenc: vstupný interval rozdelí v 0 na dva a nad nimi spočíta obálku Bernsteinovej formy polynómu. Podobne ako predchádzajúca funkcia, akceptuje tretí parameter $k$. Druhý výstupný parameter *ver* je 1 práve vtedy, keď Bernsteinova forma polynómu nenadhodnocuje.

Okrem týchto metód poskytuje balík metódu *pvenc*, ktorá rieši daný problém. Prvé dva parametre má rovnaké ako predchádzajúce metódy. Tretí, voliteľný parameter je *strategy*. Jeho možné stringové hodnoty sú FASTEST, FASTER, EFFECTIVE, TIGHTER, TIGHTEST. Defaultná hodnota pre tento parameter je EFFECTIVE. Ak druhý výstupný parameter *ver* vracia 1, tak hodnota formy polynómu nad intrevalom nenadhodnocuje.

### 4.3.2 Intervalové polynómy

Metódy na výpočet obalu intervalových polynómov nad intervalom majú povinné dva argumenty: vektor intervalových koeficientov polynómu a intervalové $\boldsymbol{x}$. Poradie intervalových koeficientov vo vektorovej forme je rovnaké ako u reálnych polynómov.

Názvy metód, ktoré riešia intervalové polynómy sú rovnaké ako pre reálny prípad, až na prefix, ktorý je *pvi* namiesto *pv*. Taktiež neexistuje intervalový ekvivalent pre pvhornerlzenc a funkcie nevracajú *ver*. Význam výstupných parametrov je rovnaký. Sú to metódy:

- pvihornerenc
- pvihornerbzenc
- pvitaylorenc
- pvitaylorbmenc
- pvimeanvalenc
- pvimeanvalbcenc
- pvislopeenc
- pviinterpolationenc
- pviinterpolation2enc
- pviinterpolationslenc
- pvibernsteinenc
- pvibernsteinbzenc

Aj pre intervalové polynómy poskytuje balík všeobecnú metódu riešiacu daný problém. Metódu *pvienc*. Prvé dva argumenty sú zhodné s predchádzajúcimi metódami. Pre tretí parameter *strategy* platí to isté, čo pre funkciu *pvenc*.

## 4.4 Ukážky použitia

Nájdenie obalu polynómov

$$p(x) = 1.5x^4 + 6.2x^3 - 4.9x^2 - 6.8x - 8.6$$
$$ip(x) = [7.55,7.85]x^3 + [6.17,6.88]x^2 + [-0.15,0.8]x + [0.7,0.8]$$

nad intervalom $\boldsymbol{ix} = [-0.4, 0.2]$:

```
>> pvinit
>> ix = infsup(-0.4,0.2);

>> p = [1.5 6.2 -4.9 -6.8 -8.6];
>> pvenc(p,ix,'FASTEST')
intval ans =
[  -10.1561,   -5.8799]
>> pvenc(p,ix,'TIGHTEST')
intval ans =
[  -10.1041,   -7.0223]
>> pvenc(p,ix)
intval ans =
[  -10.1429,   -6.8618]

>> ip = [infsup(7.55,7.85) infsup(6.17,6.88) ...
>        infsup(-0.15,0.8) infsup(0.7,0.8)];
>> pvienc(ip,ix)
intval ans =
[    0.4037,    1.4777]
```

```
>> pvienc(ip,ix,'TIGHTEST')
intval ans =
[    0.5933,    1.4777]
```

Volanie metód používajúce špecifickú formu:

```
>> p = [-2 2 3];

>> ix = infsup(0.5,1);

>> [iy ver] = pvbernsteinenc(p,ix)
intval iy =
[    3.0000,    3.5000]
ver =  1

>> [iy ver] = pvhornerenc(p,ix)
intval iy =
[    3.0000,    4.0000]
ver = 0

>> iy = pvslopeenc(p,ix)
intval iy =
[    3.0000,    3.7501]
```

Ďalšia ukážka používa paralelizmus v Octave počas výpočtu obalu intervalových polynómov:

```
>> pvinit par
>> ip = [infsup(2,2.25) infsup(-2.3,-2.1) 2];
>> ix = infsup(0.5,1.5);

>> iy = pvibernsteinenc(ip,ix)
intval iy =
[    1.2000,    3.9126]

>> iy = pvihornerenc(ip,ix)
intval iy =
[    0.0500,    3.9126]
```

*Poznámka.* Musíme si uvedomiť, že reprezentácia čísla zo zdrojového kódu nemusí obsahovať mienené číslo. To sa týka hlavne čísel s desatinnou čiarkou. Pre INTLAB napríklad platí, ak použijeme $ix = intval(0.1)$, tak 0.1 sa zaokrúhli na najbližšie reprezentovateľné číslo. Potom nie nutne platí $0.1 \in ix$. Pre dosiahnutie $0.1 \in ix$ potrebujeme zavolať konštruktor $ix = intval("0.1")$. Viac informácií o týchto problémoch a možnostiach ich riešenia je možné nájsť v dokumentácii k INTLABu.

Ak sa rozhodneme použiť balík *interval* namiesto INTLABu, tak ten nemá ekvivalent k jeho metódam *getround*, *setround*, špecifikujúce mód zaokrúhľovania. Pri jeho použití teda môžu vzniknúť chyby vyplývajúce z nesprávneho smeru zaokrúhľovania.

# 5. Programátorská dokumentácia

Koreň priečinku priloženého CD obsahuje súbory *README.md*, *demo.m*, *pvinit.m* a priečinky *pv*, *tests*, *lib*, *reports*.

Prečinky *pv* a *test* reprezentujú balíky. V *reports* sú uložené výsledky testov, ktoré vznikli na našej pracovnej stanici. Priečinok *lib* obsahuje Octave balíky interval-2.1.0.tar.gz, parallel-3.1.1.tar.gz a struct-1.0.14.tar.gz. Balík *interval* je open source alternatívou k INTLABu. Balík *parallel* potrebuje k svojej činnosti balík *struct*.

Skript *pvinit.m* je nutné zavolať pre inicializáciu balíkov *pv* a *tests*. Funkciu *demo* je možné spustiť ešte pred zavolaním *pvinit*.

Vo všeobecnosti naše balíky obsahujú priečinok *aux*, v ktorom sa nachádzajú pomocné funkcie, ktoré balík interne používa. V priečinku *doc* sa nachádza dokumentácia vygenerovaná súborom *ocdoc.m*. Tento dokumentačný systém OcDoc sa taktiež používa v projekte LIME (Library of Interval Methods), ktorý sa vyvíja na našej fakulte. Výstupom tohto skripta je priečinok *doc* s dokumentáciou jednotlivých súborov vo formáte html. Súhrnný prehľad je v súbore *index.html*. Súbory jednotlivých implementácií sú v plain texte aj s komentármi, takže je možné do nich nahliadnuť. Za dokumentačný jazyk bola zvolená angličtina.

Implementácie jednotlivých metód sú uložené v m-súboroch. Obecne môže byť m-súbor súbor obsahujúci práve jednu funkciu alebo skript.

## 5.1 Funkcia pvinit

Platí pre ňu to, čo je popísané v časti 4.2 o inštalácii. Detailnejší prehľad o tom, aké súbory sú načítané v danej konfigurácii je možné získať preštudovaním samotného skripta *pvinit.m*. Za zmienku stojí spomenúť volanie funkcie *load_intlab_camouflage* pri nenájdení funkcie *intval* v prostredi Octave. Tá mapuje mená istých funkcií z INTLABu na mená funkcií z balíka interval. Zoznam takýchto funkcii je priamo v skripte *aux/octave_env/load_intlab_camouflage.m*.

Ak sa rozhodneme využiť paralelizmu prostredí Octave, tak ten sa prejaví vo funkciách pracujúcimi s intervalovými polynómami a vo funkciách v balíku tests. Presnejší popis o aké funkcie sa jedna, je v nasledujúcej časti popisujúcej balik *pv*.

## 5.2 Balík pv

Balík *pv* (polynomial value) poskytuje funkcie počítajúce obálku reálneho aj intervalového polynómu nad intervalom.

Ako zdroj dokumentácie je možné použiť html súbory z *doc* alebo priamo zdrojový kód, ktorý je patrične okomentovaný. Metódy s prefixom *pv* a *pvi* sú opísané aj v užívateľskej dokumentácii.

Štruktúra balíka *pv*:

```
pv
|- aux
| |- ocdoc.m
| |- centres_mean_value_form.m
| |- derivate_polynomial.m
| |- taylor_coefficients.m
| |- taylor_form_eval_half.m
| |- range_power.m
| |- evaluate_parabola.m
| |- invert_polynomial.m
| |- interval_polynomial_form.m
| |- interval_polynomial_forms
| | |- pvibernsteinbzenc.m
| | |- pvibernsteinenc.m
| | |- pvihornerbzenc.m
| | |- pvihornerenc.m
| | |- pviinterpolationenc.m
| | |- pviinterpolation2enc.m
| | |- pviinterpolationslenc.m
| | |- pvimeanvalbcenc.m
| | |- pvimeanvalenc.m
| | |- pvislopeenc.m
| | |- pvitaylorbmenc.m
| | \- pvitaylorenc.m
| |- doc
| | |- index.html
| | \ ...
| |- octave_env
| | |- interval_polynomial_form_par.m
| | |- load_interval_forms_par.m
| | \- load_intlab_camouflage.m
|- doc
| |- index.html
| \ ...
|- ocdoc.m
|- pvbernsteinbzenc.m
|- pvbernsteinenc.m
|- pvenc.m
|- pvhornerbzenc.m
|- pvhornerenc.m
|- pvhornerlzenc.m
|- pvienc.m
|- pvinterpolationenc.m
|- pvinterpolation2enc.m
|- pvinterpolationslenc.m
|- pvmeanvalbcenc.m
|- pvmeanvalenc.m
|- pvslopeenc.m
|- pvtaylorbmenc.m
\- pvtaylorenc.m
```

Funkcie z priečinka *pv/aux/interval_polynomial_forms* sú wrappery, ktoré volajú *pv/aux/interval_polynomial_form.m* s príslušnými parametrami. V jej implementácii sa uplatní veta 21 o obale intervalového polynómu.

Pokiaľ aktivujeme paralelizmus v Octave príkazom *pvinit* s parametrom 'par', tak sa namiesto funkcie z *pv/aux/interval_polynomial_forms* zavolá funkcia s rovnakým menom načítaná skriptom *load_interval_forms_par.m.* Ten bol volaný v *pvinit.* Následne funkcie pre intervalové polynómy používajú paralelnú verziu *pv/aux/octave_env/interval_polynomial_form_par.m* namiesto funkcie *interval_polynomial_form.*

Obe verzie akceptujú vektor intervalových koeficientov, interval $\boldsymbol{x}$ a handler na formu, ktorý počíta obálku reálneho polynómu. Paralelná verzia v prípade, kedy vstupný interval obsahuje nulu, naplánuje výpočet obaliek dvoch reálnych polynómov. Inak naplánuje štyri polynómy. Ak má prostredie prístup k viacerým výpočtovým jednotkám, tak sa tieto obálky spočítajú paralelne. Nad obálkami sa nakoniec urobí zjednotenie. Počas výpočtu obálky sa používa handler na formu, ktorý funkcia dostala ako argument. Tvary reálnych polynómov sú popísané vo vete 21 (o obale intervalového polynómu).

#### Funkcia pvenc

Vracia obal reálneho polynómu nad intervalom. Ak druhý výstupý parameter *ver* je 1, tak použitá forma nenadhodnocuje. Prvé dva vstupné parametre, koeficienty polynómu a intervalové $\boldsymbol{x}$, sú povinné. Tretí stringový parameter *strategy* je nepovinný a má defaultnú hodnotu EFFECTIVE. Hodnoty parametru *strategy* môžu byť FASTEST, FASTER, EFFECTIVE, TIGHTER, TIGHTEST. Funkcia na základe *strategy* a vlastnosti intervalu $\boldsymbol{x}$ zvoli metódu, ktorá sa má zavolať.

Podľa hodnoty *strategy* sa volajú funkcie:

FASTEST ak $\boldsymbol{x}$ obsahuje nulu, tak sa zavolá *pvhornerbzenc*, inak *pvhornerenc*

FASTER volá *pvmeanvalbcenc*

EFFECTIVE ak $\boldsymbol{x}$ obsahuje nulu, tak volá *pvmeanvalbcenc*, inak *pvinterpolation2enc*

TIGHTER volá *pvinterpolationslenc*

TIGHTEST ak $\boldsymbol{x}$ obsahuje nulu, tak volá *pvbernsteinbzenc*, inak *pvbernsteinenc*

#### Funkcia pvienc

Vracia obal intervalového polynómu nad intervalom. Prvé dva vstupné parametre, koeficienty intervalového polynómu a intervalové $\boldsymbol{x}$, sú povinné. Tretí stringový parameter *strategy* je nepovinný a má defaultnú hodnotu EFFECTIVE. Hodnoty parametru *strategy* môžu byť FASTEST, FASTER, EFFECTIVE, TIGHTER, TIGHTEST. Funkcia na základe *strategy* zvoli metódu, ktorá sa má zavolať.

Podľa hodnoty *strategy* sa volajú funkcie:

FASTEST volá *pvihornerbzenc*

FASTER volá *pvislopeenc*

EFFECTIVE volá *pvimeanvalbcenc*

TIGHTER volá *pviinterpolationslenc*

TIGHTEST volá *pvibernsteinenc*

## 5.3 Balík tests

Tento balík bol použitý na generovanie reálnych a intervalových polynómov, vyhodnocovanie reálnych a intervalových polynómov s cieľom získania najpresnejšieho výsledku, generovanie štatistík zachytávajúce runtime jednotlivých metód a ich relatívnej veľkosti nadhodnocovania.

Štruktúra balíka *tests*:

```
tests
|- aux
| |- evaluate_polynomial
| | |- evaluate_polynomial.m
| | \- private
| |   \- evaluate_polynomial_.m
| |- octave_env
| | \- evaluate_polynomial.m
| |- generate_polynomials.m
| |- evaluate_polynomial_int.m
| |- generate_polynomials_interval.m
| \- eval_forms.m
|- doc
| |- index.html
| \ ...
|- make_stats.m
|- ocdoc.m
|- run_tests.m
\- test.m
```

Generovanie koeficientov reálnych a intervalových polynómov zabezpečujú funkcie *generate_polynomials* a *generate_polynomials_interval*. Pre generovanie bolo zvolené rovnomerné rozdelenie. Pre nájdenie najtesnejšieho referenčného obalu, za cenu väčšieho výpočetného času, sú použité funkcie *evaluate_polynomial* a *evaluate_polynomial_par*.

Funkcia *evaluate_polynomial_* pracuje triviálnym spôsobom. Posúva práve testované reálne $y$ z intervalu $\boldsymbol{x}$ o pevne zvolené *delta* a priebežne zlepšuje maximum a minimum. *Delta* má implicitnú hodnotu 0.0003. Je možné ju zmeniť priamo v zdrojovom súbore tejto metódy.

Metóda *evaluate_polynomial_par* je len wrapper pre volanie funkcie *interval_polynomial_form*, ktorá za formu vezme *evaluate_polynomial*.

Existujú dve verzie *evaluate_polynomial*. Ktorá sa načíta do prostredia závisí od toho, či používame Octave a posledné volanie *pinit* bolo s parametrom 'par'. Defaultne sa použije tá v *tests/aux/evaluate_polynomial*. Obaľuje volanie funkcie *tests/aux/evaluate_polynomial/private/evaluate_polynomial_.m*. Ak sme v prostredí Octave a zavoláme *pvinit* s parametrom 'par', tak sa načíta metóda *tests/aux/octave_env/evaluate_polynomial.m*, ktorá patrične využíva paralelizmus. Vstupný interval rozdelí na $n$ časti, kde $n$ je počet detekovaných procesorov. Na týchto intervaloch zavolá *evaluate_polynomial_* a na vratených intervaloch skonštruuje ich obal.

## Spustenie, vytvorenie testu a štatistiky

Na vytvorenie štatistiky, generovanie testovacích výstupov, definovanie a spustenie testov bol použitý skript *make_stats.m* a funkcie z *test.m*, *run_tests.m*. Podrobnejší popis ich rozhraní sa nachádza v príslušnom súbore v priečinku *tests/doc* a priamo v zdrojovom kóde.

### Funkcia test

Funkcia *test* spočíta obaly, v nej vygenerovaných, polynómov použitím funkcie *evaluate_polynomial* alebo *evaluate_polynomial_par* nad pevným vstupným intervalom $\boldsymbol{ix}$. Nad týmito polynómami a $\boldsymbol{ix}$ sa spustia handlery na funkcie reprezentujúce intervalové formy predané funkcii v poli buniek. Každá bunka obsahuje štruktúru s handlerom a jeho textovým popisom, tagom.

Výsledky volania *test* sa uchovajú v priečinku *test_out*. Každý vygenerovaný súbor má prefix, ktorý bol definovaný pri volaní funkcie *test*. Formát týchto súborov je binárny, konkrétne je typu MATLAB 5.0 MAT-file.

Pre každé volanie handlera sa uloží štruktúra s jeho popisom, pole časov výpočtov jednotlivých polynómov a spočítané obaly do binárneho súboru, ktorého meno obsahuje názov handlera a prefix testu.

Taktiež sa vytvorí binárny súbor so sufixom 'test.bin' reprezentujúci celý test. Ten, okrem iného, obsahuje odkazy na súbory vniknuté popri volaní handlerov.

Štruktúra binárneho súboru *test.bin:

```
test.ix  = interválové x
test.n   = # polynómov
test.deg = stupeň vygenerovaných polynómov
test.forms_count = # handlerov
test.filenames   = vektor odkazov na súbory vygenerované handlermi
test.polynomials = vektor vygenerovaných polynómov
test.polynomials_ranges = spočítané referenčné obálky polynómov
```

Štruktúra binárneho súboru vygenerovaného handlerom:

```
form.ranges     = spočítané obálky
form.eval_times = vektor časov výpočtov
form.desc       = popis handlera
```

### Funkcia run_tests

V tejto funkcii definujeme a spúšťame testovacie suity. Tie obsahujú pole buniek *forms_structs* popisujúce, aké handlery sa použijú vo funkcii *test* a pole štruktúr parametrov, ktoré sa postupne použijú vo volaní *test*.

Ako vstupné parametre má suita počet polynómov, ktorý má funkcia *test* generovať a spracovať, a základ mena súboru, z ktorého sa odvodia mená súborov pre zápis štatistiky danej suity. Konkrétne štatistiky sa uložia do súborov *stats_out/$FILENAME.txt* a *stats_out/$FILENAME_t.txt*. Ich obsah definuje funkcia *make_stats*.

Pre vytvorenie a spustenie vlastnej suity stačí skopírovať a modifikovať šablónu, umiestnenú v zdrojovom súbore, a pridať volanie do *run_tests*.

### Funkcia make_stats

Táto funkcia generuje štatistické dáta zo súborov vytvorených volaním *test*. Typicky zo súboru **test.bin* a príslušných binárnych súborov, na ktoré vo vnútri ukazuje. Výstup posiela do dvoch file deskriptorov, ktoré mu boli predané ako parametre. Tie mohli byť otvorené volajúcim v rôznom móde, napr. vo write móde alebo append móde.

Do jedného súboru zapisuje štatistiku o čase behu testovaných handlerov uvedenú v sekundách. Štatistika v druhom súbore vychádza z dát vyprodukovaných funkciou *distance_fcn*, ktorá je na začiatku namapovaná na privátnu funkciu *distance2*. Tá vracia hodnotu:

$$100 * \Big(w(\boldsymbol{iz}) - w(\boldsymbol{iy})\Big)/w(\boldsymbol{iz}).$$

Pri jej volaní je ***iy***, pre daný interval a polynóm, referenčný interval spočítaný a používaný v jednom teste a ***iz*** výstup handleru pre daný polynóm a interval. Štatistické veličiny, ktoré sa vyhodnocujú sú minimum, maximum, priemer a medián.

Príklad obsahu súborov *stats_out/statsX.txt* a *stats_out/statsX_t.txt* vygenerované funkciou *make_stats* v testovacej suite používajúce dva testy. Oba testy boli volané s bunkovým poľom o troch handleroch a ich textovými anotáciami HF, SF a BF, avšak s rôznymi požiadavkami na stupeň vygenerovaných polynómov a vstupný interval:

```
>> STATS for tests_out/t1_test.bin
 #polynomials = 100    deg = 4     X = [-0.300000 , 0.200000]
>> [DISTANCE]
Form    max       min      mean   median  deg         X
-------------------------------------------------------------------
 HF    85.426    3.162   27.500   23.405  4  [-0.300000, 0.200000]
 SF    75.350    1.836   25.261   21.818  4  [-0.300000, 0.200000]
 BF    64.569    0.000    4.048    0.000  4  [-0.300000, 0.200000]
-------------------------------------------------------------------
>> STATS for tests_out/t2_test.bin
 #polynomials = 100    deg = 21    X = [-0.100000 , 0.100000]
>> [DISTANCE]
Form    max       min      mean   median  deg         X
-------------------------------------------------------------------
 HF    59.595    0.085   14.481   10.255  21 [-0.100000, 0.100000]
 SF    52.969    0.078   13.787    9.312  21 [-0.100000, 0.100000]
 BF     3.829    0.000    0.177    0.000  21 [-0.100000, 0.100000]
-------------------------------------------------------------------
```

```
>> STATS for tests_out/t1_test.bin
 #polynomials = 100    deg = 4     X = [-0.300000 , 0.200000]
>> [EVAL_TIME]
Form    max       min      mean   median  deg         X
-------------------------------------------------------------------
 HF     0.0258   0.0017   0.0029  0.0026  4  [-0.300000, 0.200000]
 SF     0.0251   0.0085   0.0095  0.0092  4  [-0.300000, 0.200000]
 BF     0.0349   0.0124   0.0168  0.0183  4  [-0.300000, 0.200000]
-------------------------------------------------------------------
>> STATS for tests_out/t2_test.bin
 #polynomials = 100    deg = 21    X = [-0.100000 , 0.100000]
>> [EVAL_TIME]
Form    max       min      mean   median  deg         X
-------------------------------------------------------------------
 HF     0.0072   0.0070   0.0070  0.0070  21 [-0.100000, 0.100000]
 SF     0.0640   0.0372   0.0530  0.0579  21 [-0.100000, 0.100000]
 BF     0.2992   0.1581   0.2191  0.2441  21 [-0.100000, 0.100000]
-------------------------------------------------------------------
```

# 6. Numerické porovnanie

Pre tento účel bola použitá funkcia *run_tests* z balíčka *test*, v ktorej sú zároveň definované testovacie suity. V priečinku *reports* sa nachádzajú kópie výstupných priečinkoch *stats_out* a *tests_out* volania tejto funkcie. Okrem nich, *reports* obsahuje skrípt *table.awk*, ktorý bol použitý na vytvorenie ostatných **.txt* súborov v *reports*, zhrňujúce výsledky testu zo súborov z *stat_out* do prehľadnejšej podoby, do formy tabuľky. Skript očakáva súbor z *stats_out* a mód špecifikujúci aké hodnoty zo súboru má zobrazovať na výstupe. Mód pripúšťa nasledujúce hodnoty: max, min, mean a median.

Dáta boli vygenerované na pracovnej stanici s Gentoo 2.3, Intel(R) Core(TM) i7-6700 CPU @ 3.40GHz, v prostredí Matlabu R2017a (9.2.0.538062) 64-bit s INTLABom verzie 10, a bez použitia paralelizmu vo výpočtoch obálok intervalových polynómov.

## 6.1 Testovacie suity

Každá suita používa 100 náhodné vygenerovaných polynómov so stupňami 4,5,6,7,11,16,21,26 a 31. Koeficienty reálnych polynómov sú v intervale $(-1,1)$. Koeficienty intervalových polynómov sú podintervaly intervalu $(-0.95,0.95)$.

V *run_tests* sme definovali 4 suity: *test_suite1* až *test_suite4*. Suity #1 a #3 používajú metódy pre výpočet obálky reálneho polynómu, suity #2 a #4 metódy pre výpočet obálky intervalových polynómov. Konkrétne používajú metódy popísané v podkapitole *Verejné metódy* kapitoly **Užívateľská dokumentácia**, strana 32.

V testovacích suitách #1 a #2 sú polynómy vyhodnocovane nad intervalmi $[-0.3,0.2]$, $[-0.15, 0.1]$, $[-0.1,0.1]$, $[-0.3, -0.2]$ a $[0.2,0.3]$. V suitách #3 a #4 nad užšími intervalmi $[-0.03,0.02]$, $[-0.015, 0.01]$, $[-0.01,0.01]$, $[-0.03, -0.02]$ a $[0.02,0.03]$.

Pripomeňme, že hodnoty štatistických dát generované testami sú spočítané nasledujúcim vzťahom:

$$100 * \Big(w(\boldsymbol{z}) - w(\boldsymbol{y})\Big)/w(\boldsymbol{z})$$

Interval $\boldsymbol{y}$ je, pre daný vstupný interval a polynóm, referenčný interval, t.j. najužšia obálka, ktorá bola spočítaná hrubou silou. Interval $\boldsymbol{z}$ je spočítaný metódou používajúcu funkčnú formu. Jedna sa o relatívnu veličinu vyjadrujúcu minimálne koľko percent hodnôt intervalu spočítaných funkčnou formu je nesprávnych. Táto interpretácia avšak prehliada súvislosť intervalov. Takto definovanú relatívnu veľkosť nadhodnocovania pre konkrétny polynóm, interval a metódu teda môžme porovnávať naprieč rôznymi metódami používajúce funkčnú formu.

Hodnoty behu metód v štatistických dátach generované spustením testovacej suity sú uvedené v sekundách.

## 6.2 Vygenerované tabuľky

Skriptom *table.awk* bol vygenerovaný súbor *$MODE_tab_stats$N.txt* a k nemu odpovedajúci súbor *$MODE_tab_stats$N_t.txt* zachytávajúci čas behu jednotlivých metód, pre príslušnú $N$-tu suitu a módy median, mean. Tieto súbory sú súčasťou priečinku *reports*. V prílohe sú ukážky časti týchto súborov pre mód mean.

## 6.3 Zhrnutie

Nasledujúce pozorovania vychádzajú z obsahu súborov *mean_tab_stats1.txt* až *mean_tab_stats4.txt* zachytávajúce výsledky testovacích suít #1 až #4. Tento obsah je umiestnený v prílohe. Ďalej v prílohe sú iba časti súborov *mean_tab_stats1.txt* a *mean_tab_stats3.txt* udávajúce priemerné časy behov jednotlivých metód. Runtime metód nezávisí od šírky intervalov. Závisí od stupňa polynómu a pre špecifické metódy čí vstupný interval obsahuje nulu. Preto sme v prílohe umiestnili iba určíte časti pôvodných súborov.

Testovacie suity používajú nasledujúce mapovanie:

| | | | |
|---|---|---|---|
| HF | pvhornerenc | iHF | pvihornerenc |
| HFBZ | pvhornerbzenc | iHFBZ | pvihornerbzenc |
| IF | pvinterpolationenc | iIF | pviinterpolationenc |
| IF2 | pvinterpolation2enc | iIF2 | pviinterpolation2enc |
| ISF | pvinterpolationslenc | iISF | pviinterpolationslenc |
| TF | pvtaylorenc | iTF | pvitaylorenc |
| TFBM | pvtaylorbmenc | iTFBM | pvitaylorbmenc |
| MVF | pvmeanvalenc | iMVF | pvimeanvalenc |
| MVFBC | pvmeanvalbcenc | iMVFBC | pvimeanvalbcen |
| SF | pvslopeenc | iSF | pvislopeenc |
| BF | pvbernsteinenc | iBF | pvibernsteinenc |
| BFBZ | pvbernsteinbzenc | iBFBZ | pvibernsteinbzenc |

Postrehy:

- Výpočtový čas metódy pre intervalový polynóm je teoretický dvojnásobný pre vstupný interval neobsahujúci nulu voči behu verzie metódy pre reálny polynóm. Ak vstupný interval obsahuje nulu, tak štvornásobný. To je spôsobené priamou aplikáciou vety 21 o obale intervalového polynómu. Ak by sme využili paralelizmu v Octave, tak čas behu funkcie pre intervalový polynóm by mohol byť približné rovnaký ako pre jej reálnu verziu. Ukázalo sa, že beh funkcie je v Matlabe rýchlejší aj oproti paralelnej verzie spustenej v Octave.

- HFBZ použitá pre interval obsahujúci nulu nám dáva pre reálne polynómy v priemere o polovicu menšie nadhodnocovanie než HF, čo sme čakali vďaka vete 6. Ak nulu neobsahuje, tak HFBZ používa na celom intervale HF a teda obe formy dávajú rovnakú obálku. Časovo HFBZ je rýchlejšia pre interval obsahujúci nulu, a to vďaka intervalom tvaru $[0,u]$ s ktorými pracuje. Tento tvar zjednodušuje a urýchľuje operáciu násobenia v intervalovej aritmetike.

  Pre intervalové polynómy sa iHFBZ a iHF, čo sa tyká veľkostí nadhodnocovania, správajú rovnako. Je to zapríčinené implementáciou metódy, ktorá pre intervalový polynóm automaticky rozdelí vstupný interval v bode nule na dva intervaly, ak interval nulu obsahoval, a na ne použije príslušnú formu.

Podobne ako pre reálny prípad je iHFBZ rýchlejšia ako iHF, ak vstupný interval obsahuje nulu.

- IF2 vracia o niečo malo lepšiu obálku než IF za cenu zanedbateľného spomalenia výpočtu. Vzťah inklúzie je ukázaný vo vete 14. Podstatne lepšiu obálku, ako ráta IF2, dáva ISF, a to aj v lepšom čase než IF. Pre užšie intervaly neobsahujúce nulu sú tieto metódy, založené na Interpolačnej forme, výrazné presnejšie než HF. Spočítať ISF v našom prostredí trvalo v priemere približné 3–4 krát dlhšie ako HF.

- Veľkosť nadhodnocovania SF je podobná ako u HF, avšak pre intervaly bez nuly podstatne nižšia. Runtime SF oproti HF bol 3–5 násobný.

- TFBM vracia intervaly s polovičným nadhodnotením ako TF. To ukazuje aj teória, poznámka v definícii TFBM 3.2.1. TFBM beží o niečo malo pomalšie ako TF. TF pre intervaly s nulou má podobnú veľkosť nadhodnocovania ako HF. Pre intervaly bez nuly výsledok má polovičnú chybu HF. TF a SF vracajú v priemere interval s rovnakou chybou, avšak s narastajúcim stupňom polynómu je TF o dosť pomalšia ako SF.

- Chyba intervalov spočítaných MVF je podobná ako u HF. Pre širšie intervaly dokonca výrazné väčšia. Runtime oproti HF je dvojnásobný. MVFBC v podstate zráta dvakrát MVF, aby sa minimalizovala šírka výslednej obálky, viď vetu 11. Veľkosť chyby MVFBC je viditeľné menšia ako pri MVF. Čas behu by mal byť teoretický dvojnásobný oproti MVF.

- V priemere najmenšiu chybu vykazuje použitie BF. Prípadne, pre intervaly obsahujúce 0 použitie BFBZ, ktorá ráta dvakrát BF. Čas behu BFBZ pre intervaly obsahujúce nulu je potom tiež dvojnásobný. Pre intervaly bez nuly, BFBZ volá iba raz BF. Tieto metódy sú výpočetne najnáročnejšie. Priame porovnanie s HF nie je možné urobiť, lebo BFBZ sa nechová časovo lineárne vzhľadom k stupňu polynómu ako HF.

Pre intervalové verzie jednotlivých foriem platia podobné závery. V priečinku *reports* sú taktiež podobné tabuľky používajúce mód median namiesto priemeru. V niektorých prípadoch je hodnota mediánu je o dosť nižšia ako priemer. Konkrétne pre metódy BMVFBC, BF a BFBZ je medián veľkosti nadhodnocovania nulový v danej presnosti štatistických dát.

Pokiaľ potrebujeme metódu na spočítanie obálky polynómu s minimálnym nadhodnotením, tak siahneme po funkciách založených na Bernsteinovej forme. Pokiaľ nám ide o rýchlosť výpočtu, tak v tomto smere prevažuje implementácia Hornerovej formy.

# 7. Záver

V prací sme v úvodných kapitolách zhrnuli základné poznatky o intervalovej aritmetike a o istých funkčných formách reálnych polynómov používajúce intervalovú aritmetiku, ktoré sa dajú použiť na výpočet obálky reálneho polynómu. Ukázali sme, že obal intervalového polynómu vieme zložiť z dvoch až štyroch obalov reálnych polynómov. Štruktúra týchto reálnych polynómov je jednoduchá. Ich koeficienty sú hodnoty hraníc z príslušných intervalových koeficientov. Tým pádom metódy počítajúce obálku reálneho polynómu je možné použiť na výpočet obálky intervalového polynómu.

Implementovali sme metódy počítajúce obálku reálnych a intervalových polynómov vychádzajúce z funkčných foriem. Implementácia je primárne určená pre prostredie Matlab s toolboxom INTLAB. Alternatívne je ju možné používať v prostredí Octave s INTLABom, prípadne s neplateným variantom INTLABu poskytujúcim intervalovú aritmetiku, ktorým je balík *interval*. V prostredí Octave je možné aktivovať paralelizmu pri výpočte obálky intervalového polynómu. Ten môže spôsobiť, že čas behu funkcie pre intervalový polynóm sa bude blížiť k času behu verzie pre reálny polynóm. Pre Matlab sme nenašli neplatený toolbox umožňujúci nám využiť paralelizmus v našich funkciách. V praxi sa ukázalo, že funkcie bežiace v paralelnom móde v Octave sú pomalšie ako ich neparalelné verzie bežiace v prostredí Matlabu.

Nakoniec sme urobili numerické porovnanie veľkosti nadhodnocovania a časov behu implementovaných metód. Dáta použite pre numerické porovnanie sú súčasťou prílohy. Ďalšie numerické výsledky sú umiestnené na CD. Ukazuje sa, že najužšiu obálku dávajú metódy založené na Bernsteinovej forme. Najrýchlejšie boli metódy aplikujúce priamo Hornerovu schému na vstupný polynóm.

# Zoznam použitej literatúry


BAUMANN, E. (1988). Optimal centered forms. *BIT Numerical Mathematics*, **28** (1), 80–87.

CAPRANI, O. a MADSEN, K. (1980). Mean Value Forms in Interval Analysis. *Computing*, **25**(2), 147–154.

GAGANOV, A. A. (1981). Computational complexity of the range of the polynomial in several variables. Master's thesis, Leningrad University, Math. Department. in Russian.

GAGANOV, A. A. (1985). Computation complexity of the range of a polynomial in several variables. *Cybernetics*, **21**, 418–421.

GRIGORYEV, D. Y. a VOROBJOV, N. N. (1988). Solving systems of polynomial inequalities in subexponential time. *Journal of Symbolic Computation*, **5**(1/2), 37–64.

HONG, H. a STAHL, V. (1995). Bernstein Form is Inclusion Monotone. *Computing*, **55**(1), 43–53.

KRAWCZYK, R. a NEUMAIER, A. (1985). Interval slopes for rational functions and associated centered forms. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **22**(3), 604–616.

MOORE, R. E. (1959). Automatic error analysis in digital computation. *Technical Report Space Div. Report LMSD84821, Lockheed Missiles and Space Co.*

MOORE, R. E. (1966). *Interval Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

MOORE, R. E., KEARFOTT, R. B. a CLOUD, M. J. (2009). *Introduction to Interval Analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA.

POPOVA, E. D. (1994). Extended Interval Arithmetic in IEEE Floating-Point Environment. *Interval Computations*, **4**, 100–129.

ROKNE, J. (1977). Bounds for an Interval Polynomial. *Computing*, **18**(3), 225–240.

ROKNE, J. (1979). A note on the Bernstein algorithm for bounds for interval polynomials. *Computing*, **21**(2), 159–170.

STAHL, V. (1995). *Interval Methods for Bounding the Range of Polynomials and Solving Systems of Nonlinear Equations*. Dissertation thesis, Johannes Kepler Universit at Linz, Austria.

# Príloha

Príloha obsahuje tabuľky výsledkov testovacích suit #1 až #4 zo súborov *mean_tab_stats1.txt* až *mean_tab_stats4.txt*. Ďalej časy behu jednotlivých metód pre suity #1 a #2. zo súborov *mean_tab_stats1_t.txt* a *mean_tab_stats4_t.txt*. Časy behu metód nezávisia od šírky intervalu, preto tabuľky neobsahujú kompletné dáta z príslušných súborov, ale len hodnoty pre špecifické intervaly. Podrobná interpretácia hodnôt v prílohe je uvedená v kapitole 6, **Numerické porovnanie**.

Ďalšie tabuľky ako aj celú implementáciu je možné nájsť na priloženom CD.

**Percentuálna veľkosť nadhodnocovania metód pre suitu #1** (*mean_tab_stats1.txt* 1/2)

mean

| HF | HFBZ | IF | IF2 | ISF | TF | TFBM | MVF | MVFBC | SF | BF | BFBZ | deg | interval |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 27.500 | 13.573 | 26.503 | 25.063 | 8.746 | 27.719 | 13.454 | 45.524 | 17.071 | 25.261 | 4.048 | 0.818 | 4 | [-0.300000, 0.200000] |
| 25.423 | 12.942 | 26.912 | 26.136 | 8.075 | 26.196 | 13.328 | 44.096 | 14.407 | 23.608 | 1.751 | 0.483 | 5 | [-0.300000, 0.200000] |
| 29.177 | 14.583 | 31.656 | 30.399 | 8.541 | 29.073 | 14.030 | 48.446 | 19.028 | 26.348 | 1.914 | 0.536 | 6 | [-0.300000, 0.200000] |
| 25.979 | 12.975 | 27.749 | 26.809 | 8.487 | 26.632 | 13.095 | 44.256 | 13.932 | 23.704 | 1.510 | 0.385 | 7 | [-0.300000, 0.200000] |
| 27.041 | 13.069 | 30.086 | 28.654 | 8.036 | 27.434 | 12.522 | 46.183 | 18.071 | 24.984 | 1.017 | 0.231 | 11 | [-0.300000, 0.200000] |
| 27.883 | 14.399 | 30.070 | 28.823 | 8.333 | 28.035 | 13.837 | 46.104 | 18.427 | 25.288 | 0.658 | 0.172 | 16 | [-0.300000, 0.200000] |
| 28.831 | 15.561 | 31.060 | 30.302 | 10.166 | 29.350 | 15.048 | 47.666 | 16.421 | 26.426 | 0.495 | 0.165 | 21 | [-0.300000, 0.200000] |
| 25.728 | 12.327 | 32.492 | 31.758 | 10.369 | 26.122 | 12.836 | 44.783 | 17.226 | 23.084 | 0.312 | 0.051 | 26 | [-0.300000, 0.200000] |
| 27.789 | 15.002 | 30.186 | 29.609 | 9.429 | 27.846 | 14.315 | 45.948 | 16.859 | 25.060 | 0.242 | 0.072 | 31 | [-0.300000, 0.200000] |
| | | | | | | | | | | | | | |
| 15.809 | 8.817 | 8.628 | 8.036 | 2.522 | 15.352 | 7.557 | 26.297 | 5.931 | 14.526 | 1.296 | 0.385 | 4 | [-0.150000, 0.100000] |
| 15.913 | 8.227 | 9.205 | 8.595 | 2.643 | 16.104 | 8.226 | 27.844 | 5.400 | 15.187 | 0.773 | 0.200 | 5 | [-0.150000, 0.100000] |
| 16.750 | 8.826 | 9.372 | 8.602 | 2.389 | 16.448 | 7.970 | 27.825 | 7.063 | 15.514 | 0.788 | 0.198 | 6 | [-0.150000, 0.100000] |
| 16.927 | 8.969 | 9.755 | 8.942 | 2.755 | 16.886 | 8.230 | 28.055 | 7.973 | 15.940 | 0.904 | 0.243 | 7 | [-0.150000, 0.100000] |
| 14.965 | 8.361 | 8.159 | 7.713 | 2.587 | 14.908 | 7.515 | 25.181 | 5.090 | 13.948 | 0.388 | 0.136 | 11 | [-0.150000, 0.100000] |
| 14.960 | 7.905 | 8.283 | 7.781 | 1.966 | 14.679 | 7.003 | 25.815 | 4.801 | 14.032 | 0.224 | 0.049 | 16 | [-0.150000, 0.100000] |
| 19.679 | 10.118 | 11.347 | 10.335 | 3.127 | 19.819 | 10.017 | 32.911 | 10.190 | 18.828 | 0.343 | 0.083 | 21 | [-0.150000, 0.100000] |
| 16.450 | 8.881 | 8.925 | 8.470 | 2.467 | 16.739 | 8.818 | 28.241 | 5.536 | 15.820 | 0.119 | 0.041 | 26 | [-0.150000, 0.100000] |
| 14.817 | 7.729 | 8.647 | 8.217 | 2.883 | 14.830 | 7.320 | 25.844 | 4.239 | 13.894 | 0.124 | 0.029 | 31 | [-0.150000, 0.100000] |
| | | | | | | | | | | | | | |
| 16.302 | 8.434 | 7.094 | 6.594 | 2.316 | 16.302 | 8.434 | 27.256 | 5.233 | 15.522 | 1.189 | 0.290 | 4 | [-0.100000, 0.100000] |
| 13.147 | 6.680 | 6.367 | 6.095 | 1.695 | 13.147 | 6.680 | 23.128 | 3.548 | 12.505 | 0.387 | 0.113 | 5 | [-0.100000, 0.100000] |
| 13.395 | 7.059 | 5.896 | 5.674 | 2.170 | 13.395 | 7.059 | 22.745 | 2.339 | 12.623 | 0.340 | 0.070 | 6 | [-0.100000, 0.100000] |
| 15.367 | 7.955 | 7.471 | 6.763 | 2.235 | 15.367 | 7.955 | 25.685 | 7.288 | 14.677 | 0.806 | 0.231 | 7 | [-0.100000, 0.100000] |
| 14.901 | 7.641 | 5.744 | 5.322 | 1.952 | 14.901 | 7.641 | 24.991 | 5.235 | 14.219 | 0.408 | 0.094 | 11 | [-0.100000, 0.100000] |
| 13.958 | 7.113 | 6.050 | 5.408 | 1.561 | 13.958 | 7.113 | 23.840 | 5.949 | 13.411 | 0.282 | 0.070 | 16 | [-0.100000, 0.100000] |
| 14.481 | 7.512 | 6.984 | 6.604 | 2.152 | 14.481 | 7.512 | 24.654 | 4.662 | 13.787 | 0.177 | 0.045 | 21 | [-0.100000, 0.100000] |
| 14.824 | 7.479 | 6.738 | 6.288 | 2.052 | 14.824 | 7.479 | 25.076 | 4.799 | 14.146 | 0.151 | 0.030 | 26 | [-0.100000, 0.100000] |
| 12.242 | 6.305 | 5.246 | 4.899 | 1.528 | 12.242 | 6.305 | 21.365 | 2.895 | 11.681 | 0.068 | 0.017 | 31 | [-0.100000, 0.100000] |

## Percentuálna veľkosť nadhodnocovania metód pre suitu #1 (*mean_tab_stats1.txt* 2/2)

mean

| HF | HFBZ | IF | IF2 | ISF | TF | TFBM | MVF | MVFBC | SF | BF | BFBZ | deg | interval |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 29.839 | 29.839 | 3.582 | 3.049 | 0.763 | 12.716 | 6.401 | 24.959 | 7.517 | 14.600 | 1.350 | 1.350 | 4 | [-0.300000, -0.200000] |
| 23.607 | 23.607 | 2.736 | 2.486 | 0.558 | 9.567 | 4.927 | 19.651 | 2.333 | 10.625 | 0.330 | 0.330 | 5 | [-0.300000, -0.200000] |
| 26.252 | 26.252 | 2.791 | 2.633 | 0.751 | 9.180 | 4.811 | 19.759 | 2.674 | 10.667 | 0.254 | 0.254 | 6 | [-0.300000, -0.200000] |
| 24.415 | 24.415 | 3.061 | 2.855 | 0.982 | 10.093 | 5.320 | 19.695 | 3.459 | 10.868 | 0.353 | 0.353 | 7 | [-0.300000, -0.200000] |
| 26.834 | 26.834 | 3.498 | 3.136 | 0.809 | 10.357 | 5.351 | 21.057 | 5.662 | 11.825 | 0.311 | 0.311 | 11 | [-0.300000, -0.200000] |
| 25.184 | 25.184 | 2.425 | 2.307 | 0.664 | 10.399 | 5.610 | 20.597 | 2.681 | 11.435 | 0.084 | 0.084 | 16 | [-0.300000, -0.200000] |
| 27.817 | 27.817 | 3.554 | 3.097 | 0.989 | 10.456 | 5.259 | 21.417 | 3.946 | 11.805 | 0.175 | 0.175 | 21 | [-0.300000, -0.200000] |
| 30.917 | 30.917 | 3.370 | 2.835 | 0.809 | 11.542 | 5.350 | 22.377 | 6.284 | 12.745 | 0.226 | 0.226 | 26 | [-0.300000, -0.200000] |
| 20.284 | 20.284 | 2.523 | 2.275 | 0.691 | 8.209 | 4.099 | 17.009 | 1.838 | 8.948 | 0.063 | 0.063 | 31 | [-0.300000, -0.200000] |
| | | | | | | | | | | | | | |
| 30.084 | 30.084 | 3.322 | 2.929 | 1.076 | 11.588 | 6.047 | 21.374 | 5.153 | 12.134 | 1.218 | 1.218 | 4 | [0.200000, 0.300000] |
| 23.754 | 23.754 | 2.467 | 2.171 | 0.440 | 8.614 | 4.244 | 18.234 | 2.496 | 9.761 | 0.347 | 0.347 | 5 | [0.200000, 0.300000] |
| 22.416 | 22.416 | 3.384 | 3.047 | 0.938 | 9.801 | 4.994 | 19.629 | 3.895 | 10.619 | 0.547 | 0.547 | 6 | [0.200000, 0.300000] |
| 23.410 | 23.410 | 2.993 | 2.828 | 0.844 | 9.793 | 5.176 | 20.161 | 3.015 | 11.100 | 0.266 | 0.266 | 7 | [0.200000, 0.300000] |
| 26.542 | 26.542 | 3.122 | 2.718 | 0.749 | 11.272 | 5.918 | 20.938 | 4.633 | 11.874 | 0.341 | 0.341 | 11 | [0.200000, 0.300000] |
| 26.974 | 26.974 | 3.267 | 2.898 | 0.899 | 10.662 | 5.564 | 20.633 | 3.793 | 11.468 | 0.175 | 0.175 | 16 | [0.200000, 0.300000] |
| 30.074 | 30.074 | 4.894 | 4.160 | 1.404 | 12.037 | 6.129 | 23.195 | 7.876 | 13.694 | 0.301 | 0.301 | 21 | [0.200000, 0.300000] |
| 20.333 | 20.333 | 2.707 | 2.350 | 0.520 | 7.906 | 3.761 | 16.369 | 2.552 | 8.692 | 0.082 | 0.082 | 26 | [0.200000, 0.300000] |
| 20.590 | 20.590 | 3.214 | 2.987 | 0.950 | 9.279 | 4.711 | 19.753 | 4.016 | 10.764 | 0.087 | 0.087 | 31 | [0.200000, 0.300000] |

**Percentuálna veľkosť nadhodnocovania metód pre suitu #2** (*mean_tab_stats2.txt* 1/2)

mean

| iHF | iHFBZ | iIF | iIF2 | iISF | iTF | iTFBM | iMVF | iMVFBC | iSF | iBF | iBFBZ | deg | interval |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.027 | 10.027 | 3.539 | 3.100 | 0.688 | 6.742 | 2.761 | 14.916 | 3.522 | 6.871 | 0.587 | 0.587 | 4 | [-0.300000, 0.200000] |
| 8.943 | 8.943 | 3.943 | 3.704 | 1.055 | 5.431 | 2.326 | 12.458 | 2.102 | 5.603 | 0.238 | 0.238 | 5 | [-0.300000, 0.200000] |
| 9.728 | 9.728 | 3.665 | 3.414 | 0.671 | 6.483 | 2.882 | 14.644 | 2.577 | 6.569 | 0.220 | 0.220 | 6 | [-0.300000, 0.200000] |
| 12.454 | 12.454 | 4.709 | 4.037 | 1.086 | 8.729 | 3.758 | 17.201 | 4.111 | 8.762 | 0.344 | 0.344 | 7 | [-0.300000, 0.200000] |
| 10.356 | 10.356 | 4.065 | 3.668 | 0.873 | 6.799 | 2.953 | 14.759 | 2.985 | 6.885 | 0.138 | 0.138 | 11 | [-0.300000, 0.200000] |
| 10.399 | 10.399 | 3.910 | 3.529 | 0.881 | 6.840 | 2.950 | 14.650 | 2.872 | 7.006 | 0.099 | 0.099 | 16 | [-0.300000, 0.200000] |
| 10.170 | 10.170 | 3.924 | 3.630 | 0.650 | 6.044 | 2.559 | 14.464 | 2.536 | 6.274 | 0.061 | 0.061 | 21 | [-0.300000, 0.200000] |
| 10.636 | 10.636 | 3.749 | 3.467 | 0.825 | 7.181 | 3.213 | 15.524 | 2.291 | 7.325 | 0.043 | 0.043 | 26 | [-0.300000, 0.200000] |
| 12.071 | 12.071 | 4.675 | 4.266 | 1.234 | 7.947 | 3.598 | 16.140 | 3.694 | 7.925 | 0.062 | 0.062 | 31 | [-0.300000, 0.200000] |
| | | | | | | | | | | | | | |
| 5.189 | 5.189 | 0.619 | 0.571 | 0.168 | 2.910 | 1.379 | 5.996 | 0.674 | 2.915 | 0.105 | 0.105 | 4 | [-0.150000, 0.100000] |
| 5.034 | 5.034 | 0.805 | 0.722 | 0.212 | 2.900 | 1.344 | 6.330 | 0.883 | 2.933 | 0.104 | 0.104 | 5 | [-0.150000, 0.100000] |
| 3.933 | 3.933 | 0.590 | 0.580 | 0.175 | 2.142 | 1.033 | 4.762 | 0.138 | 2.144 | 0.013 | 0.013 | 6 | [-0.150000, 0.100000] |
| 4.878 | 4.878 | 0.842 | 0.774 | 0.237 | 2.839 | 1.328 | 6.160 | 0.745 | 2.890 | 0.060 | 0.060 | 7 | [-0.150000, 0.100000] |
| 4.567 | 4.567 | 0.631 | 0.574 | 0.173 | 2.483 | 1.149 | 5.181 | 0.730 | 2.479 | 0.030 | 0.030 | 11 | [-0.150000, 0.100000] |
| 5.480 | 5.480 | 0.791 | 0.680 | 0.232 | 3.287 | 1.504 | 6.482 | 1.129 | 3.317 | 0.044 | 0.044 | 16 | [-0.150000, 0.100000] |
| 5.308 | 5.308 | 0.652 | 0.628 | 0.208 | 2.930 | 1.384 | 5.816 | 0.506 | 2.957 | 0.013 | 0.013 | 21 | [-0.150000, 0.100000] |
| 4.235 | 4.235 | 0.588 | 0.564 | 0.152 | 2.415 | 1.130 | 5.283 | 0.426 | 2.409 | 0.009 | 0.009 | 26 | [-0.150000, 0.100000] |
| 4.895 | 4.895 | 0.602 | 0.539 | 0.171 | 2.661 | 1.208 | 5.654 | 0.821 | 2.693 | 0.013 | 0.013 | 31 | [-0.150000, 0.100000] |
| | | | | | | | | | | | | | |
| 3.627 | 3.627 | 0.344 | 0.309 | 0.101 | 1.932 | 0.885 | 4.050 | 0.529 | 1.933 | 0.077 | 0.077 | 4 | [-0.100000, 0.100000] |
| 3.011 | 3.011 | 0.286 | 0.280 | 0.078 | 1.573 | 0.762 | 3.309 | 0.176 | 1.571 | 0.020 | 0.020 | 5 | [-0.100000, 0.100000] |
| 3.555 | 3.555 | 0.310 | 0.291 | 0.084 | 1.834 | 0.863 | 3.864 | 0.355 | 1.831 | 0.032 | 0.032 | 6 | [-0.100000, 0.100000] |
| 2.894 | 2.894 | 0.331 | 0.329 | 0.091 | 1.503 | 0.735 | 3.212 | 0.044 | 1.500 | 0.004 | 0.004 | 7 | [-0.100000, 0.100000] |
| 3.656 | 3.656 | 0.282 | 0.264 | 0.071 | 1.840 | 0.856 | 3.885 | 0.396 | 1.835 | 0.020 | 0.020 | 11 | [-0.100000, 0.100000] |
| 3.151 | 3.151 | 0.311 | 0.297 | 0.087 | 1.629 | 0.761 | 3.450 | 0.315 | 1.628 | 0.010 | 0.010 | 16 | [-0.100000, 0.100000] |
| 3.715 | 3.715 | 0.328 | 0.306 | 0.093 | 1.923 | 0.875 | 4.016 | 0.371 | 1.920 | 0.009 | 0.009 | 21 | [-0.100000, 0.100000] |
| 3.372 | 3.372 | 0.360 | 0.353 | 0.117 | 1.821 | 0.872 | 3.784 | 0.266 | 1.814 | 0.005 | 0.005 | 26 | [-0.100000, 0.100000] |
| 3.389 | 3.389 | 0.332 | 0.314 | 0.076 | 1.697 | 0.801 | 3.712 | 0.342 | 1.700 | 0.005 | 0.005 | 31 | [-0.100000, 0.100000] |

**Percentuálna veľkosť nadhodnocovania metód pre suitu #2** (*mean_tab_stats2.txt* 2/2)

mean

| iHF | iHFBZ | iIF | iIF2 | iISF | iTF | iTFBM | iMVF | iMVFBC | iSF | iBF | iBFBZ | deg | interval |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9.982 | 9.982 | 0.507 | 0.480 | 0.122 | 3.123 | 1.524 | 7.266 | 0.600 | 3.399 | 0.082 | 0.082 | 4 | [-0.300000, -0.200000] |
| 8.798 | 8.798 | 0.618 | 0.613 | 0.167 | 2.326 | 1.149 | 6.018 | 0.214 | 2.625 | 0.004 | 0.004 | 5 | [-0.300000, -0.200000] |
| 11.133 | 11.133 | 0.604 | 0.573 | 0.140 | 2.362 | 1.086 | 6.387 | 0.771 | 2.758 | 0.050 | 0.050 | 6 | [-0.300000, -0.200000] |
| 10.138 | 10.138 | 0.601 | 0.590 | 0.148 | 2.695 | 1.314 | 6.926 | 0.382 | 3.078 | 0.014 | 0.014 | 7 | [-0.300000, -0.200000] |
| 9.103 | 9.103 | 0.634 | 0.606 | 0.163 | 2.264 | 1.091 | 6.196 | 0.529 | 2.665 | 0.015 | 0.015 | 11 | [-0.300000, -0.200000] |
| 11.824 | 11.824 | 0.742 | 0.721 | 0.224 | 2.391 | 1.146 | 6.350 | 0.452 | 2.777 | 0.008 | 0.008 | 16 | [-0.300000, -0.200000] |
| 9.545 | 9.545 | 0.715 | 0.696 | 0.183 | 2.524 | 1.231 | 6.436 | 0.471 | 2.837 | 0.007 | 0.007 | 21 | [-0.300000, -0.200000] |
| 7.688 | 7.688 | 0.599 | 0.580 | 0.110 | 2.309 | 1.082 | 6.079 | 0.412 | 2.596 | 0.006 | 0.006 | 26 | [-0.300000, -0.200000] |
| 12.424 | 12.424 | 0.757 | 0.746 | 0.227 | 2.626 | 1.282 | 6.686 | 0.512 | 2.964 | 0.003 | 0.003 | 31 | [-0.300000, -0.200000] |
| | | | | | | | | | | | | | |
| 9.889 | 9.889 | 0.557 | 0.549 | 0.178 | 2.286 | 1.134 | 5.879 | 0.252 | 2.599 | 0.019 | 0.019 | 4 | [0.200000, 0.300000] |
| 7.550 | 7.550 | 0.599 | 0.599 | 0.152 | 2.029 | 0.986 | 5.632 | 0.098 | 2.379 | 0.002 | 0.002 | 5 | [0.200000, 0.300000] |
| 12.469 | 12.469 | 0.698 | 0.683 | 0.188 | 2.957 | 1.441 | 7.227 | 0.569 | 3.266 | 0.028 | 0.028 | 6 | [0.200000, 0.300000] |
| 9.749 | 9.749 | 0.618 | 0.611 | 0.144 | 2.116 | 1.036 | 5.924 | 0.334 | 2.534 | 0.004 | 0.004 | 7 | [0.200000, 0.300000] |
| 14.451 | 14.451 | 0.773 | 0.737 | 0.201 | 2.701 | 1.296 | 7.108 | 0.875 | 3.110 | 0.022 | 0.022 | 11 | [0.200000, 0.300000] |
| 10.507 | 10.507 | 0.700 | 0.689 | 0.207 | 2.482 | 1.209 | 6.446 | 0.350 | 2.855 | 0.006 | 0.006 | 16 | [0.200000, 0.300000] |
| 11.891 | 11.891 | 0.645 | 0.607 | 0.156 | 2.411 | 1.120 | 6.628 | 0.680 | 2.862 | 0.013 | 0.013 | 21 | [0.200000, 0.300000] |
| 10.697 | 10.697 | 0.703 | 0.699 | 0.161 | 2.586 | 1.279 | 6.838 | 0.392 | 2.974 | 0.000 | 0.000 | 26 | [0.200000, 0.300000] |
| 12.293 | 12.293 | 0.755 | 0.717 | 0.189 | 2.731 | 1.296 | 7.151 | 0.700 | 3.119 | 0.007 | 0.007 | 31 | [0.200000, 0.300000] |

**Percentuálna veľkosť nadhodnocovania metód pre suitu #3** (*mean_tab_stats3.txt* 1/2)

mean

| HF | HFBZ | IF | IF2 | ISF | TF | TFBM | MVF | MVFBC | SF | BF | BFBZ | deg | interval |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6.678 | 3.500 | 0.842 | 0.681 | 0.246 | 6.704 | 3.283 | 11.096 | 2.993 | 6.620 | 0.770 | 0.196 | 4 | [-0.030000, 0.020000] |
| 4.033 | 1.927 | 0.472 | 0.452 | 0.099 | 4.320 | 2.248 | 7.845 | 0.641 | 4.284 | 0.092 | 0.017 | 5 | [-0.030000, 0.020000] |
| 5.445 | 2.920 | 0.471 | 0.459 | 0.132 | 5.562 | 2.988 | 9.782 | 0.609 | 5.514 | 0.083 | 0.024 | 6 | [-0.030000, 0.020000] |
| 4.839 | 2.434 | 0.434 | 0.366 | 0.088 | 4.997 | 2.578 | 8.644 | 1.945 | 4.964 | 0.236 | 0.058 | 7 | [-0.030000, 0.020000] |
| 5.690 | 3.069 | 0.512 | 0.444 | 0.140 | 5.697 | 2.917 | 9.844 | 1.639 | 5.650 | 0.143 | 0.034 | 11 | [-0.030000, 0.020000] |
| 5.358 | 2.928 | 0.422 | 0.407 | 0.116 | 5.464 | 2.975 | 9.460 | 0.837 | 5.425 | 0.034 | 0.015 | 16 | [-0.030000, 0.020000] |
| 4.284 | 2.334 | 0.459 | 0.436 | 0.153 | 4.328 | 2.259 | 7.877 | 0.477 | 4.261 | 0.018 | 0.008 | 21 | [-0.030000, 0.020000] |
| 5.267 | 2.039 | 0.765 | 0.603 | 0.176 | 5.779 | 2.891 | 9.662 | 2.965 | 5.729 | 0.107 | 0.008 | 26 | [-0.030000, 0.020000] |
| 3.984 | 2.130 | 0.412 | 0.394 | 0.131 | 4.041 | 2.105 | 7.463 | 0.391 | 4.002 | 0.008 | 0.004 | 31 | [-0.030000, 0.020000] |
| | | | | | | | | | | | | | |
| 2.371 | 1.312 | 0.145 | 0.145 | 0.042 | 2.303 | 1.197 | 4.291 | 0.000 | 2.291 | 0.000 | 0.000 | 4 | [-0.015000, 0.010000] |
| 2.696 | 1.474 | 0.110 | 0.103 | 0.025 | 2.726 | 1.426 | 4.897 | 0.507 | 2.716 | 0.089 | 0.036 | 5 | [-0.015000, 0.010000] |
| 3.101 | 1.692 | 0.136 | 0.127 | 0.032 | 3.054 | 1.620 | 5.397 | 0.632 | 3.041 | 0.095 | 0.022 | 6 | [-0.015000, 0.010000] |
| 3.529 | 1.886 | 0.307 | 0.227 | 0.068 | 3.454 | 1.678 | 5.947 | 1.288 | 3.427 | 0.189 | 0.044 | 7 | [-0.015000, 0.010000] |
| 2.034 | 1.135 | 0.090 | 0.090 | 0.032 | 1.964 | 1.011 | 3.709 | 0.000 | 1.947 | 0.000 | 0.000 | 11 | [-0.015000, 0.010000] |
| 2.528 | 1.294 | 0.095 | 0.092 | 0.031 | 2.510 | 1.292 | 4.493 | 0.574 | 2.498 | 0.033 | 0.003 | 16 | [-0.015000, 0.010000] |
| 3.944 | 2.041 | 0.156 | 0.147 | 0.045 | 4.116 | 2.241 | 7.082 | 0.982 | 4.098 | 0.032 | 0.008 | 21 | [-0.015000, 0.010000] |
| 2.367 | 1.217 | 0.100 | 0.098 | 0.030 | 2.454 | 1.286 | 4.538 | 0.162 | 2.442 | 0.004 | 0.001 | 26 | [-0.015000, 0.010000] |
| 2.363 | 1.308 | 0.106 | 0.106 | 0.043 | 2.379 | 1.274 | 4.285 | 0.001 | 2.366 | 0.000 | 0.000 | 31 | [-0.015000, 0.010000] |
| | | | | | | | | | | | | | |
| 2.684 | 1.428 | 0.104 | 0.096 | 0.035 | 2.684 | 1.428 | 4.818 | 0.397 | 2.670 | 0.094 | 0.032 | 4 | [-0.010000, 0.010000] |
| 1.677 | 0.852 | 0.069 | 0.069 | 0.018 | 1.677 | 0.852 | 3.231 | 0.000 | 1.669 | 0.000 | 0.000 | 5 | [-0.010000, 0.010000] |
| 1.920 | 0.993 | 0.085 | 0.074 | 0.031 | 1.920 | 0.993 | 3.493 | 0.500 | 1.907 | 0.078 | 0.022 | 6 | [-0.010000, 0.010000] |
| 2.362 | 1.224 | 0.101 | 0.101 | 0.035 | 2.362 | 1.224 | 4.418 | 0.000 | 2.347 | 0.000 | 0.000 | 7 | [-0.010000, 0.010000] |
| 2.636 | 1.400 | 0.063 | 0.060 | 0.023 | 2.636 | 1.400 | 4.632 | 0.836 | 2.625 | 0.059 | 0.020 | 11 | [-0.010000, 0.010000] |
| 2.379 | 1.259 | 0.068 | 0.066 | 0.019 | 2.379 | 1.259 | 4.300 | 0.327 | 2.370 | 0.015 | 0.006 | 16 | [-0.010000, 0.010000] |
| 2.144 | 1.119 | 0.086 | 0.086 | 0.029 | 2.144 | 1.119 | 3.986 | 0.000 | 2.132 | 0.000 | 0.000 | 21 | [-0.010000, 0.010000] |
| 2.542 | 1.220 | 0.098 | 0.082 | 0.025 | 2.542 | 1.220 | 4.566 | 0.682 | 2.532 | 0.029 | 0.004 | 26 | [-0.010000, 0.010000] |
| 1.691 | 0.876 | 0.059 | 0.059 | 0.018 | 1.691 | 0.876 | 3.178 | 0.000 | 1.683 | 0.000 | 0.000 | 31 | [-0.010000, 0.010000] |

**Percentuálna veľkosť nadhodnocovania metód pre suitu #3** (*mean_tab_stats3.txt* 2/2)

mean

| HF | HFBZ | IF | IF2 | ISF | TF | TFBM | MVF | MVFBC | SF | BF | BFBZ | deg | interval |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6.497 | 6.497 | 0.027 | 0.027 | 0.009 | 1.383 | 0.702 | 2.751 | 0.000 | 1.409 | 0.000 | 0.000 | 4 | [-0.030000, -0.020000] |
| 6.391 | 6.391 | 0.040 | 0.035 | 0.014 | 1.801 | 0.893 | 3.194 | 0.639 | 1.827 | 0.143 | 0.143 | 5 | [-0.030000, -0.020000] |
| 4.209 | 4.209 | 0.021 | 0.021 | 0.007 | 0.889 | 0.457 | 1.766 | 0.000 | 0.910 | 0.000 | 0.000 | 6 | [-0.030000, -0.020000] |
| 4.177 | 4.177 | 0.016 | 0.016 | 0.005 | 1.395 | 0.741 | 2.584 | 0.000 | 1.413 | 0.000 | 0.000 | 7 | [-0.030000, -0.020000] |
| 3.795 | 3.795 | 0.026 | 0.026 | 0.011 | 1.052 | 0.562 | 2.003 | 0.092 | 1.088 | 0.002 | 0.002 | 11 | [-0.030000, -0.020000] |
| 5.170 | 5.170 | 0.047 | 0.033 | 0.015 | 1.638 | 0.604 | 2.971 | 0.763 | 1.671 | 0.062 | 0.062 | 16 | [-0.030000, -0.020000] |
| 4.739 | 4.739 | 0.020 | 0.020 | 0.008 | 1.187 | 0.605 | 2.358 | 0.000 | 1.212 | 0.000 | 0.000 | 21 | [-0.030000, -0.020000] |
| 4.842 | 4.842 | 0.038 | 0.027 | 0.011 | 1.405 | 0.632 | 2.491 | 0.680 | 1.413 | 0.030 | 0.030 | 26 | [-0.030000, -0.020000] |
| 4.222 | 4.222 | 0.024 | 0.024 | 0.010 | 1.383 | 0.714 | 2.669 | 0.000 | 1.405 | 0.000 | 0.000 | 31 | [-0.030000, -0.020000] |
| | | | | | | | | | | | | | |
| 4.521 | 4.521 | 0.042 | 0.042 | 0.010 | 1.409 | 0.728 | 2.751 | 0.000 | 1.449 | 0.000 | 0.000 | 4 | [0.020000, 0.030000] |
| 4.123 | 4.123 | 0.022 | 0.022 | 0.009 | 1.260 | 0.657 | 2.273 | 0.486 | 1.273 | 0.083 | 0.083 | 5 | [0.020000, 0.030000] |
| 6.121 | 6.121 | 0.046 | 0.036 | 0.010 | 1.844 | 0.856 | 3.403 | 0.696 | 1.888 | 0.123 | 0.123 | 6 | [0.020000, 0.030000] |
| 6.147 | 6.147 | 0.021 | 0.021 | 0.005 | 1.632 | 0.858 | 3.065 | 0.000 | 1.652 | 0.000 | 0.000 | 7 | [0.020000, 0.030000] |
| 3.833 | 3.833 | 0.014 | 0.014 | 0.004 | 0.925 | 0.472 | 1.812 | 0.000 | 0.936 | 0.000 | 0.000 | 11 | [0.020000, 0.030000] |
| 4.130 | 4.130 | 0.014 | 0.014 | 0.006 | 1.026 | 0.529 | 2.001 | 0.000 | 1.043 | 0.000 | 0.000 | 16 | [0.020000, 0.030000] |
| 4.363 | 4.363 | 0.028 | 0.022 | 0.006 | 1.286 | 0.514 | 2.370 | 0.709 | 1.317 | 0.040 | 0.040 | 21 | [0.020000, 0.030000] |
| 4.773 | 4.773 | 0.040 | 0.040 | 0.015 | 1.245 | 0.646 | 2.420 | 0.000 | 1.280 | 0.000 | 0.000 | 26 | [0.020000, 0.030000] |
| 6.400 | 6.400 | 0.033 | 0.033 | 0.007 | 1.958 | 1.054 | 3.591 | 0.126 | 2.004 | 0.001 | 0.001 | 31 | [0.020000, 0.030000] |

**Percentuálna veľkosť nadhodnocovania metód pre suitu #4** (*mean_tab_stats4.txt* 1/2)

mean

| iHF | iHFBZ | iIF | iIF2 | iISF | iTF | iTFBM | iMVF | iMVFBC | iSF | iBF | iBFBZ | deg | interval |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.480 | 0.480 | 0.010 | 0.009 | 0.003 | 0.243 | 0.119 | 0.516 | 0.026 | 0.243 | 0.005 | 0.005 | 4 | [-0.030000 0.020000] |
| 0.516 | 0.516 | 0.012 | 0.012 | 0.003 | 0.259 | 0.128 | 0.534 | 0.006 | 0.259 | 0.000 | 0.000 | 5 | [-0.030000 0.020000] |
| 0.455 | 0.455 | 0.010 | 0.010 | 0.003 | 0.229 | 0.114 | 0.478 | 0.000 | 0.229 | 0.000 | 0.000 | 6 | [-0.030000 0.020000] |
| 0.499 | 0.499 | 0.011 | 0.011 | 0.004 | 0.253 | 0.127 | 0.518 | 0.000 | 0.253 | 0.000 | 0.000 | 7 | [-0.030000 0.020000] |
| 0.588 | 0.588 | 0.011 | 0.011 | 0.003 | 0.295 | 0.146 | 0.637 | 0.007 | 0.295 | 0.000 | 0.000 | 11 | [-0.030000 0.020000] |
| 0.577 | 0.577 | 0.011 | 0.011 | 0.003 | 0.291 | 0.144 | 0.597 | 0.011 | 0.291 | 0.000 | 0.000 | 16 | [-0.030000 0.020000] |
| 0.602 | 0.602 | 0.014 | 0.014 | 0.005 | 0.304 | 0.151 | 0.651 | 0.003 | 0.304 | 0.000 | 0.000 | 21 | [-0.030000 0.020000] |
| 0.480 | 0.480 | 0.011 | 0.011 | 0.004 | 0.242 | 0.121 | 0.502 | 0.000 | 0.242 | 0.000 | 0.000 | 26 | [-0.030000 0.020000] |
| 0.430 | 0.430 | 0.010 | 0.010 | 0.002 | 0.214 | 0.106 | 0.470 | 0.000 | 0.214 | 0.000 | 0.000 | 31 | [-0.030000 0.020000] |
| | | | | | | | | | | | | | |
| 0.213 | 0.213 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.107 | 0.054 | 0.220 | 0.000 | 0.107 | 0.000 | 0.000 | 4 | [-0.015000 0.010000] |
| 0.236 | 0.236 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.118 | 0.058 | 0.240 | 0.000 | 0.118 | 0.000 | 0.000 | 5 | [-0.015000 0.010000] |
| 0.235 | 0.235 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.118 | 0.059 | 0.251 | 0.001 | 0.118 | 0.000 | 0.000 | 6 | [-0.015000 0.010000] |
| 0.143 | 0.143 | 0.002 | 0.002 | 0.000 | 0.072 | 0.036 | 0.154 | 0.000 | 0.072 | 0.000 | 0.000 | 7 | [-0.015000 0.010000] |
| 0.167 | 0.167 | 0.002 | 0.002 | 0.000 | 0.083 | 0.042 | 0.186 | 0.000 | 0.083 | 0.000 | 0.000 | 11 | [-0.015000 0.010000] |
| 0.142 | 0.142 | 0.002 | 0.002 | 0.000 | 0.071 | 0.035 | 0.156 | 0.000 | 0.071 | 0.000 | 0.000 | 16 | [-0.015000 0.010000] |
| 0.157 | 0.157 | 0.002 | 0.002 | 0.000 | 0.079 | 0.039 | 0.157 | 0.000 | 0.079 | 0.000 | 0.000 | 21 | [-0.015000 0.010000] |
| 0.201 | 0.201 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.101 | 0.050 | 0.195 | 0.000 | 0.101 | 0.000 | 0.000 | 26 | [-0.015000 0.010000] |
| 0.171 | 0.171 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.085 | 0.043 | 0.178 | 0.000 | 0.085 | 0.000 | 0.000 | 31 | [-0.015000 0.010000] |
| | | | | | | | | | | | | | |
| 0.125 | 0.125 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.063 | 0.031 | 0.129 | 0.000 | 0.063 | 0.000 | 0.000 | 4 | [-0.010000 0.010000] |
| 0.125 | 0.125 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.063 | 0.031 | 0.129 | 0.000 | 0.063 | 0.000 | 0.000 | 5 | [-0.010000 0.010000] |
| 0.101 | 0.101 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.051 | 0.025 | 0.104 | 0.000 | 0.051 | 0.000 | 0.000 | 6 | [-0.010000 0.010000] |
| 0.106 | 0.106 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.053 | 0.026 | 0.109 | 0.000 | 0.053 | 0.000 | 0.000 | 7 | [-0.010000 0.010000] |
| 0.106 | 0.106 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.053 | 0.027 | 0.110 | 0.000 | 0.053 | 0.000 | 0.000 | 11 | [-0.010000 0.010000] |
| 0.118 | 0.118 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.059 | 0.029 | 0.122 | 0.000 | 0.059 | 0.000 | 0.000 | 16 | [-0.010000 0.010000] |
| 0.140 | 0.140 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.070 | 0.035 | 0.145 | 0.000 | 0.070 | 0.000 | 0.000 | 21 | [-0.010000 0.010000] |
| 0.119 | 0.119 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.069 | 0.034 | 0.144 | 0.013 | 0.069 | 0.000 | 0.000 | 26 | [-0.010000 0.010000] |
| 0.108 | 0.108 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.054 | 0.027 | 0.111 | 0.000 | 0.054 | 0.000 | 0.000 | 31 | [-0.010000 0.010000] |

**Percentuálna veľkosť nadhodnocovania metód pre suitu #4** (*mean_tab_stats4.txt* 4/2)

mean

| iHF | iHFBZ | iIF | iIF2 | iISF | iTF | iTFBM | iMVF | iMVFBC | iSF | iBF | iBFBZ | deg | interval |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.250 | 0.250 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.060 | 0.029 | 0.130 | 0.005 | 0.062 | 0.001 | 0.001 | 4 | [-0.030000 -0.020000] |
| 0.514 | 0.514 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.075 | 0.037 | 0.157 | 0.000 | 0.075 | 0.000 | 0.000 | 5 | [-0.030000 -0.020000] |
| 0.412 | 0.412 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.090 | 0.045 | 0.192 | 0.000 | 0.092 | 0.000 | 0.000 | 6 | [-0.030000 -0.020000] |
| 0.412 | 0.412 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.069 | 0.034 | 0.147 | 0.001 | 0.070 | 0.000 | 0.000 | 7 | [-0.030000 -0.020000] |
| 0.392 | 0.392 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.083 | 0.041 | 0.176 | 0.000 | 0.084 | 0.000 | 0.000 | 11 | [-0.030000 -0.020000] |
| 0.292 | 0.292 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.065 | 0.032 | 0.137 | 0.000 | 0.066 | 0.000 | 0.000 | 16 | [-0.030000 -0.020000] |
| 0.231 | 0.231 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.045 | 0.022 | 0.096 | 0.001 | 0.046 | 0.000 | 0.000 | 21 | [-0.030000 -0.020000] |
| 0.353 | 0.353 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.063 | 0.032 | 0.136 | 0.001 | 0.065 | 0.000 | 0.000 | 26 | [-0.030000 -0.020000] |
| 0.261 | 0.261 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.053 | 0.027 | 0.116 | 0.000 | 0.055 | 0.000 | 0.000 | 31 | [-0.030000 -0.020000] |
| | | | | | | | | | | | | | |
| 0.324 | 0.324 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.057 | 0.028 | 0.121 | 0.00 0 | 0.058 | 0.000 | 0.000 | 4 | [0.020000 0.030000] |
| 0.291 | 0.291 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.066 | 0.033 | 0.141 | 0.00 0 | 0.068 | 0.000 | 0.000 | 5 | [0.020000 0.030000] |
| 0.185 | 0.185 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.070 | 0.035 | 0.148 | 0.00 0 | 0.071 | 0.000 | 0.000 | 6 | [0.020000 0.030000] |
| 0.638 | 0.638 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.092 | 0.046 | 0.194 | 0.00 0 | 0.094 | 0.000 | 0.000 | 7 | [0.020000 0.030000] |
| 0.352 | 0.352 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.069 | 0.035 | 0.146 | 0.00 2 | 0.070 | 0.000 | 0.000 | 11 | [0.020000 0.030000] |
| 0.335 | 0.335 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.063 | 0.032 | 0.135 | 0.00 0 | 0.065 | 0.000 | 0.000 | 16 | [0.020000 0.030000] |
| 0.318 | 0.318 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.066 | 0.033 | 0.139 | 0.00 0 | 0.067 | 0.000 | 0.000 | 21 | [0.020000 0.030000] |
| 0.183 | 0.183 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.046 | 0.023 | 0.100 | 0.00 1 | 0.048 | 0.000 | 0.000 | 26 | [0.020000 0.030000] |
| 0.301 | 0.301 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.071 | 0.035 | 0.151 | 0.00 0 | 0.073 | 0.000 | 0.000 | 31 | [0.020000 0.030000] |

**Priemerné časy behu jednotlivých metód v sekundách pre suitu #1** (*mean_tab_stats1_t.txt*)

mean

| HF | HFBZ | IF | IF2 | ISF | TF | TFBM | MVF | MVFBC | SF | BF | BFBZ | deg | interval |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0029 | 0.0016 | 0.0090 | 0.0110 | 0.0076 | 0.0075 | 0.0087 | 0.0043 | 0.0062 | 0.0095 | 0.0168 | 0.0263 | 4 | [-0.300000, 0.200000] |
| 0.0023 | 0.0018 | 0.0098 | 0.0124 | 0.0103 | 0.0110 | 0.0135 | 0.0061 | 0.0101 | 0.0127 | 0.0234 | 0.0360 | 5 | [-0.300000, 0.200000] |
| 0.0023 | 0.0016 | 0.0129 | 0.0127 | 0.0113 | 0.0165 | 0.0155 | 0.0057 | 0.0122 | 0.0149 | 0.0228 | 0.0460 | 6 | [-0.300000, 0.200000] |
| 0.0035 | 0.0025 | 0.0182 | 0.0216 | 0.0149 | 0.0230 | 0.0247 | 0.0100 | 0.0135 | 0.0222 | 0.0406 | 0.0711 | 7 | [-0.300000, 0.200000] |
| 0.0043 | 0.0036 | 0.0178 | 0.0197 | 0.0164 | 0.0406 | 0.0467 | 0.0145 | 0.0155 | 0.0267 | 0.0793 | 0.1476 | 11 | [-0.300000, 0.200000] |
| 0.0083 | 0.0042 | 0.0381 | 0.0438 | 0.0312 | 0.0921 | 0.0951 | 0.0199 | 0.0323 | 0.0436 | 0.1573 | 0.3070 | 16 | [-0.300000, 0.200000] |
| 0.0096 | 0.0060 | 0.0484 | 0.0520 | 0.0387 | 0.1396 | 0.1530 | 0.0266 | 0.0378 | 0.0603 | 0.2536 | 0.4852 | 21 | [-0.300000, 0.200000] |
| 0.0133 | 0.0090 | 0.0566 | 0.0612 | 0.0499 | 0.2000 | 0.2007 | 0.0346 | 0.0456 | 0.0722 | 0.3427 | 0.6837 | 26 | [-0.300000, 0.200000] |
| 0.0158 | 0.0083 | 0.0690 | 0.0708 | 0.0537 | 0.2734 | 0.2873 | 0.0389 | 0.0521 | 0.0845 | 0.4779 | 0.9604 | 31 | [-0.300000, 0.200000] |
| | | | | | | | | | | | | | |
| 0.0035 | 0.0039 | 0.0123 | 0.0154 | 0.0122 | 0.0111 | 0.0155 | 0.0077 | 0.0084 | 0.0071 | 0.0199 | 0.0186 | 4 | [0.200000, 0.300000] |
| 0.0035 | 0.0040 | 0.0161 | 0.0203 | 0.0139 | 0.0147 | 0.0176 | 0.0078 | 0.0105 | 0.0102 | 0.0266 | 0.0313 | 5 | [0.200000, 0.300000] |
| 0.0040 | 0.0045 | 0.0174 | 0.0201 | 0.0154 | 0.0188 | 0.0221 | 0.0090 | 0.0127 | 0.0119 | 0.0341 | 0.0345 | 6 | [0.200000, 0.300000] |
| 0.0045 | 0.0049 | 0.0192 | 0.0226 | 0.0179 | 0.0236 | 0.0275 | 0.0102 | 0.0145 | 0.0135 | 0.0434 | 0.0425 | 7 | [0.200000, 0.300000] |
| 0.0068 | 0.0079 | 0.0279 | 0.0301 | 0.0247 | 0.0488 | 0.0533 | 0.0153 | 0.0210 | 0.0195 | 0.0874 | 0.0890 | 11 | [0.200000, 0.300000] |
| 0.0086 | 0.0090 | 0.0394 | 0.0405 | 0.0348 | 0.0842 | 0.0918 | 0.0240 | 0.0288 | 0.0290 | 0.1484 | 0.1486 | 16 | [0.200000, 0.300000] |
| 0.0108 | 0.0112 | 0.0497 | 0.0501 | 0.0377 | 0.1330 | 0.1448 | 0.0284 | 0.0361 | 0.0359 | 0.2427 | 0.2391 | 21 | [0.200000, 0.300000] |
| 0.0131 | 0.0137 | 0.0550 | 0.0591 | 0.0437 | 0.1942 | 0.2054 | 0.0319 | 0.0481 | 0.0419 | 0.3407 | 0.3349 | 26 | [0.200000, 0.300000] |
| 0.0155 | 0.0162 | 0.0658 | 0.0543 | 0.0518 | 0.2182 | 0.2947 | 0.0386 | 0.0546 | 0.0487 | 0.4035 | 0.4072 | 31 | [0.200000, 0.300000] |

**Priemerné časy behu jednotlivých metód v sekundách pre suitu #2** (*mean_tab_stats2_t.txt*)

mean

| iHF | iHFBZ | iIF | iIF2 | iISF | iTF | iTFBM | iMVF | iMVFBC | iSF | iBF | iBFBZ | deg | interval |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0103 | 0.0064 | 0.0478 | 0.0566 | 0.0425 | 0.0305 | 0.0389 | 0.0228 | 0.0358 | 0.0356 | 0.0655 | 0.1387 | 4 | [-0.300000, 0.200000] |
| 0.0157 | 0.0109 | 0.0622 | 0.0676 | 0.0541 | 0.0621 | 0.0682 | 0.0316 | 0.0451 | 0.0439 | 0.1054 | 0.2082 | 5 | [-0.300000, 0.200000] |
| 0.0180 | 0.0119 | 0.0703 | 0.0781 | 0.0605 | 0.0743 | 0.0859 | 0.0366 | 0.0531 | 0.0481 | 0.1378 | 0.2647 | 6 | [-0.300000, 0.200000] |
| 0.0199 | 0.0129 | 0.0770 | 0.0852 | 0.0671 | 0.0864 | 0.1067 | 0.0412 | 0.0573 | 0.0536 | 0.1630 | 0.3256 | 7 | [-0.300000, 0.200000] |
| 0.0286 | 0.0177 | 0.1122 | 0.1213 | 0.0930 | 0.1819 | 0.2043 | 0.0629 | 0.0848 | 0.0804 | 0.3265 | 0.6393 | 11 | [-0.300000, 0.200000] |
| 0.0392 | 0.0258 | 0.1509 | 0.1520 | 0.1193 | 0.3374 | 0.3655 | 0.0864 | 0.1137 | 0.1111 | 0.5655 | 1.1971 | 16 | [-0.300000, 0.200000] |
| 0.0493 | 0.0296 | 0.1959 | 0.2061 | 0.1595 | 0.5298 | 0.5681 | 0.1018 | 0.1631 | 0.1350 | 0.9523 | 1.8679 | 21 | [-0.300000, 0.200000] |
| 0.0603 | 0.0353 | 0.2357 | 0.2483 | 0.1900 | 0.7776 | 0.8265 | 0.1335 | 0.1867 | 0.1731 | 1.3780 | 2.7152 | 26 | [-0.300000, 0.200000] |
| 0.0701 | 0.0386 | 0.2834 | 0.2866 | 0.2078 | 1.0833 | 1.1045 | 0.1517 | 0.2186 | 0.2066 | 1.8835 | 3.7642 | 31 | [-0.300000, 0.200000] |
| 0.0069 | 0.0078 | 0.0263 | 0.0312 | 0.0245 | 0.0248 | 0.0271 | 0.0135 | 0.0199 | 0.0172 | 0.0412 | 0.0401 | 4 | [0.200000, 0.300000] |
| 0.0069 | 0.0091 | 0.0308 | 0.0339 | 0.0283 | 0.0296 | 0.0353 | 0.0187 | 0.0254 | 0.0228 | 0.0515 | 0.0515 | 5 | [0.200000, 0.300000] |
| 0.0103 | 0.0101 | 0.0348 | 0.0401 | 0.0313 | 0.0398 | 0.0441 | 0.0187 | 0.0251 | 0.0221 | 0.0675 | 0.0683 | 6 | [0.200000, 0.300000] |
| 0.0105 | 0.0113 | 0.0415 | 0.0528 | 0.0393 | 0.0473 | 0.0546 | 0.0213 | 0.0296 | 0.0276 | 0.0853 | 0.0884 | 7 | [0.200000, 0.300000] |
| 0.0147 | 0.0156 | 0.0565 | 0.0624 | 0.0488 | 0.0863 | 0.1036 | 0.0337 | 0.0436 | 0.0402 | 0.1677 | 0.1649 | 11 | [0.200000, 0.300000] |
| 0.0219 | 0.0217 | 0.0766 | 0.0774 | 0.0620 | 0.1644 | 0.1846 | 0.0441 | 0.0637 | 0.0562 | 0.2981 | 0.2938 | 16 | [0.200000, 0.300000] |
| 0.0279 | 0.0267 | 0.1003 | 0.1024 | 0.0779 | 0.2673 | 0.2819 | 0.0575 | 0.0767 | 0.0719 | 0.4835 | 0.4845 | 21 | [0.200000, 0.300000] |
| 0.0345 | 0.0357 | 0.0806 | 0.0934 | 0.0781 | 0.3941 | 0.4205 | 0.0730 | 0.0966 | 0.0916 | 0.7160 | 0.6412 | 26 | [0.200000, 0.300000] |
| 0.0370 | 0.0357 | 0.1498 | 0.1359 | 0.0997 | 0.4604 | 0.4920 | 0.0734 | 0.0893 | 0.0878 | 0.9339 | 0.8214 | 31 | [0.200000, 0.300000] |