Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jana Novotná

Dualita v intervalovém lineárním programování

Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce:	doc. Mgr. Milan Hladík, Ph.D.
Studijní program:	Informatika
Studijní obor:	Obecná informatika

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Dualita v intervalovém lineárním programování

Autor: Jana Novotná

Katedra: Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Milan Hladík, Ph.D., KAM

Abstrakt: Tato práce spojuje tradiční koncept lineárního programování s intervalovým počítáním. Intervalové počítání přináší jistotu, že se výsledná hodnota vyskytuje ve spočteném intervalu, a možnost vložit na vstup interval místo konkrétního čísla. Toho se využije zvláště při praktických problémech, kdy získáváme vstupy měřením a přesnou hodnotu neznáme. Prvním zkoumaným tématem je množina optimálních hodnot intervalového lineárního programu z hlediska obsahu číselných hodnot a jejích mezí. Práce dále rozšiřuje klasické pojetí duality gapu do intervalového lineárního programování, určuje postačující a nutné podmínky pro jeho silnou nulovost a zkoumá spojitost mezi nulovostí duality gapu a souvislostí množiny optimálních hodnot. Na příkladech jsou ukázány možné hodnoty duality gapu v jednom intervalovém lineárním programu. Posledním zkoumaným tématem je silná a slabá dualita pro intervalové lineární programy a rozšiřování jejích dalších formem pro hranice množiny optimálních hodnot.

Klíčová slova: intervalové počítání, duality gap, intervalové lineární programování, množina optimálních hodnot, silná dualita.

Title: Duality in interval linear programming

Author: Jana Novotná

Department: Department of Applied Mathematics

Supervisor: doc. Mgr. Milan Hladík, Ph.D., KAM

Abstract: This thesis combines a traditional concept of linear programming and interval analysis. Interval analysis ensures that a result belongs to a counted interval and allows us to put an interval instead of a single value on the input. It can be useful especially in practical problems where we get data from measurements and we do not know exact values. The first explored topic is the optimal value range with respect to values and its bounds. Also, the classical concept of duality gap is expanded to interval linear programmimg, necessary and sufficient conditions for zero duality gap and connections between zero duality gap and a continuous set of optimal values are determined. Possible values of duality gap in an interval linear program are shown in examples. The last topic are weak and strong duality in interval linear programming, strong duality types for bounds of the optimal value range and their extensions.

Keywords: interval analysis, duality gap, interval linear programming, set of optimal values, strong duality.

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu práce, doc. Milanu Hladíkovi, za konzultace, cenné podněty a celkově za čas, který mi věnoval. Dále děkuji svým rodičům za podporu při studiu a Tomáši Masaříkovi za konstruktivní připomínky k této práci.

Obsah

1. Úvod

Lineární programování je široce používané odvětví optimalizace, ve kterém je optimalizována lineární funkce za použití lineárních podmínek. Mnoho problémů z praxe se dá vyjádřit jako úloha lineárního programování, díky čemuž získalo lineární programování využití zejména v ekonomii, například při plánování, rozvrhování a v dopravě. Každý lineární program může být přepsán do své duální formy, což poskytuje silný teoretický nástroj využitelný při konstrukci mnoha algoritmů.

Mezi první osoby zabývající se formulací lineárních programů patřili ve 40. letech 20. století sovětský matematik Leonid V. Kantorovič a nizozemský ekonom Tjalling C. Koopmans, kteří společně v roce 1975 obdrželi Nobelovu cenu za ekonomii. O rozšíření lineárního programování a umožnění jeho praktického použití se zasloužil americký matematik George Dantzig, který vynalezl v roce 1947 prakticky použitelný algoritmus řešící lineární programy — simplexovou metodu. Ve stejném roce vymyslel po setkání s Dantzigem John von Neumann teorii duality v lineárním programování. V roce 1979 nalezl Leonid G. Chačijan elipsoidovou metodu, slabě polynomiální algoritmus řešící lineární program. V praxi však tento algoritmus nebyl použitelný. Později byly nalezeny další praktičtější metody.

Reálné problémy z praxe podléhají různým nepřesnostem (měření hodnot, odhady, neznalost přesné hodnoty), stejně tak stroje nemohou počítat s neomezenou přesností, ale čísla zaokrouhlují. Jedním ze způsobů, jak se vypořádat s těmito nepřesnostmi, je použít intervalové počítání.

Hlavní idea intervalového přístupu tkví v počítání s uzavřenými intervaly, místo konkrétní hodnoty počítáme s celým intervalem, ve kterém se daná hodnota určitě nachází. Intervalová reprezentace je svým způsobem přirozená, neboť intervaly se nachází všude kolem nás — autobus jede za 0–3 min, výška konkrétního člověka je 1,7–1,8 m, točená limonáda ve sklenici neobsahuje přesně 0,5 l.

Intervalové počítání nenachází využití pouze tam, kde přesné hodnoty neumíme určit, ale také při strojové reprezentaci čísel, kde se musíme vypořádat s omezenou přesností zápisu čísla kvůli počtu bitů, pomocí kterých číslo reprezentujeme. I zdánlivě pěkná čísla jako například číslo 0,1 mohou mít kvůli binární reprezentaci dat nekonečný binární rozvoj. Obyčejně tedy dochází k zaokrouhlení, a tedy k drobné chybě, která se však může při následném počítání nastřádat do velkých rozměrů. O výsledné hodnotě pak nejsme schopni říct, jak moc je dobrá nebo špatná. To může mít katastrofální důsledky, jak ukazují známé příklady z historie způsobené právě zkreslením kvůli počítačové reprezentaci čísel:

- zřícení ropné plošiny (smyková napětí byla podceněna o 47 % a došlo k přetížení plošiny, 1996),
- havárie rakety Ariane (převod z 64b floating-point čísla na 16b znaménkový integer, 1991),
- špatné načasování výbuchu rakety při protiraketové obraně (kvůli binární reprezentaci 0,1 zpoždění 0,34 sekund, 1991).

Jedním z řešení tohoto problému je reprezentovat dané číslo pomocí intervalu, do kterého jistě spadá a jehož hranice již umíme přesně vyjádřit. V intervalovém počítání může sice jistá chyba vzniknout také, ale celý koncept je navrhnut tak, abychom na rozdíl od předchozího případu měli vždy jistotu, že výsledná hodnota spadá do spočteného intervalu. Může se však stát, že spočtený interval bude příliš široký, a tedy prakticky nepoužitelný.

Intervalové počítání nachází díky uvedeným vlastnostem využití v mnoha teoretických (např. hledání algoritmů dávajících co neužší výsledný interval) i praktických oborech jako je ekonomie, robotika, mechanika aj. Několik známých metod je nahrazeno jejich intervalovou verzí (např. raytraicing v počítačové grafice, Gaussova eliminace v lineární algebře), dále se dá použít ke zpřesňování fyzikálních konstant (např. gravitační konstanta) a matematickým důkazům řízeným počítačem (např. Keplerova domněnka).

Samotná myšlenka zapouzdření čísla do intervalu není nic nového, již Archimedes dokázal odhad na číslo π:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Rozvoj novodobého intervalového počítání je však spjat s rozvojem počítačů v druhé polovině 20. století. V té době bylo vydáno několik na sobě nezávislých publikací se základy intervalového počítání. Jedním z prvních vědců používající intervalové počítání byl numerický matematik Mieczyslaw Warmus, který budoval intervaly přes střed a poloměr a jeho hlavní motivací byly zaokrouhlovací chyby. Za pravého zakladatele intervalového počítání je některými považován Ramon E. Moore, který ve své knize *Interval Analysis* vydané v roce 1966 shrnul základní intervalové operace a vybudoval široký aparát.

Zpočátku se intervalové počítání vyvíjelo pomaleji, spolu s rozvojem počítačů a vědeckým pokrokem začínalo nabývat na síle a bylo implementováno do několika programovacích jazyků[1]. Postupně vznikala snaha o sjednocení a standardizaci, která vyústila v roce 2015, kdy byl vydán mezinárodní standard[2] pro intervalové počítání. Část normy je v současné době stále ve fázi vývoje.

Intervalové lineární programování je přirozeným rozšířením lineárního programování za použití intervalového počítání, tedy místo reálných koeficientů v účelové funkci a v podmínkách se zde vyskytují reálné uzavřené intervaly. Intervalové lineární programování přináší oproti klasickému lineárnímu programování způsob vyrovnání se s nepřesnostmi. Vyvíjelo se v posledních čtyřiceti letech a mezi předměty zájmu patří zkoumání množiny optimálních hodnot, bázická stabilita, dualita a další.

Mezi přední experty zabývající se intervalovým lineárním programováním patří čeští vědci Jiří Rohn a Milan Hladík, italský matematik Paolo Serafini, francouzští vědci Virginie Gabrel, Cecile Murat a další.

1.1 Cíle práce

Cílem práce je popsat tvar množiny optimálních hodnot, a to z hlediska určení jejích mezí, rozebrání souvislosti množiny a výskytu reálných hodnot, popř. $\pm\infty$.

[1] Přehled knihoven některých z nich lze najít v diplomové práci Jaroslava Horáčka [5].
[2] IEEE Std 1788-2015

Dalším cílem je podat přehled o problematice duality v intervalovém lineárním programování, uvést základní věty o dualitě a věty využívající duální vlastnosti. Ty dále nově rozšířit pro ostatní typy intervalových lineárních programů.

Posledním cílem je zkoumání duality gapu pro intervalový lineární program, a to konkrétně zjištění, jakých hodnot může nabývat v jednom programu, a zaměření se na nulovost — nalezení nutných a postačujících podmínek pro nulovost a dále zkoumání vlivu souvislosti množiny optimálních hodnot na nulovost duality gapu.

1.2 Struktura práce a výsledky

Kapitola 2 se věnuje úvodu do lineárního programování a do intervalového počítání, zavedeme zde základní pojmy, intervalovou aritmetiku a na příkladu ukážeme, že je nutné rozdělit intervalové lineární soustavy na několik typů. Dále poskytneme úvod do intervalového lineárního programování, které do lineárního programování zavádí intervalové počítání. Na konci této kapitoly, v sekci 2.5, uvádíme základní věty pro testování přípustnosti intervalových lineárních systémů, na které budeme dále převádět některé problémy.

V lineárním programování hraje důležitou roli optimální hodnota daného programu, v intervalovém lineárním programování získáme místo jedné číselné hodnoty množinu čísel — množinu optimálních hodnot. V dalších kapitolách se již budeme zabývat touto množinou a s ní související dualitou v intervalovém lineárním programování.

Nejprve se zaměříme na možný tvar množiny optimálních hodnot (sekce 3.1). Povedlo se ukázat, že množina optimálních hodnot může vypadat různě, může být souvislá i nesouvislá a stejně tak může obsahovat reálná čísla i $\pm\infty$. Rozebereme všechny možné kombinace těchto vlastností a každou kombinaci podložíme vlastním konkrétním příkladem.

Souvislá množina optimálních hodnot nutně tvoří uzavřený interval, v takovém případě dává smysl zjistit hranice tohoto intervalu. Znát hranice je však užitečné i pro nesouvislou množinu, neboť ji do intervalu určeným hranicemi můžeme zapouzdřit a víme, že všechny její prvky leží v získaném intervalu. Tvary hranic, nejprve pouze základními, se zabýváme v části 3.3. Rozšiřujícími tvary hranic využívajícími duální programy se zabýváme později, v sekci 4.3.

Určení hranic je pro některé typy intervalových lineárních systémů snadné, pro jiné jde o NP-těžký problém.

V kapitole 4 zavedeme dualitu v intervalovém lineárním programování. Ukážeme intervalovou slabou a silnou dualitu, kterou nově rozšíříme pro všechny typy intervalového lineárního systému. Pozornost zaměříme také na dosud neprozkoumanou oblast — na duality gap intervalového lineárního programu, rozdíl optimálních hodnot primárního a duálního programu. Obdobně jako v klasickém lineárním programování intervalová silná dualita platí pouze za předpokladu nulového duality gapu. Pokusíme se tedy najít nutné a postačující podmínky pro nulovost duality gapu a dále vyvrátit nebo dokázat vliv souvislosti množiny optimálních hodnot na nulovost duality gapu. Potvrzení vlivu by nám mohlo pomoci převést problém nulovosti duality gapu na více prozkoumaný problém souvislosti množiny optimálních hodnot. Avšak až na jeden případ jakýkoli vliv vyvrátíme. Také na příkladech ukážeme některé hodnoty duality gapu v jednom programu.

Na závěr, v sekci 4.3, uvedeme za pomoci duálních vlastností další tvary mezí množiny optimálních hodnot pro intervalový lineární systém s rovnostmi a zkusíme prozkoumat jejich možné rozšíření pro všechny typy intervalových lineárních systémů. Oslabíme předpoklady Rohnovy věty o tvaru horní meze optimální hodnoty primárního programu a dále zobecníme první část Serafiniho věty pro meze typu (A) a ukážeme, že druhá část obecně rozšířit nelze. Také odvodíme duální tvar Serafiniho věty pro typ (B).

2. Základní znalosti

Nejprve uvedeme základní pojmy a tvrzení z lineárního programování a z intervalového počítání pro seznámení čtenáře s danou problematikou. V další části uvedeme některé známé výsledky o přípustnosti intervalových lineárních programů.

2.1 Značení

Budeme používat následující značení: Symbol $\mathbb{R}^*$ značí rozšířenou reálnou osu, tj. $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, zápis $[a, \infty]$, $[-\infty, a]$, kde $a \in \mathbb{R}$, je zkratkou za intervaly obsahující ∞, resp. $-\infty$, tj. za obvyklý zápis $[a, \infty) \cup \{\infty\}$, $(-\infty, a] \cup \{-\infty\}$. Pomocí symbolu T_y značíme diagonální matici s vektorem y na diagonále, I značí matici identity (vyhovující dimenze), $\operatorname{sgn} y$ značí funkci signum.

2.2 Úvod do lineárního programování

Než budeme pracovat s intervaly, zavedeme pojmy a potřebné výsledky z klasického lineárního programování. Tato část čerpá z knih *Understanding and Using Linear Programming*[7], *Theory of Linear and Integer Programming*[15] a *Linear Optimization and Extensions*[10], kde lze nalézt další poznatky.

Definice 2.1 (Lineární systém). Lineárním systémem (rovnic a nerovnic) *rozumíme soustavu lineárních rovnic a nerovnic $Ax = b$, $Cx \leq d$, kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^k$. Lineární systém nazveme* přípustným*, pokud existuje vektor x splňující všechny jeho rovnice a nerovnice.*

Definice 2.2 (Lineární program). Lineárním programem (LP) *rozumíme úlohu*

$$\begin{aligned}&\min c^\top x\\ &\textit{za podmínek } Ax = b, x \geq 0,\end{aligned}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Funkci $c^\top x$ nazýváme účelovou funkcí*. Úlohu budeme zapisovat zkráceně jako*

$$\min c^\top x \mid Ax = b,\ x \geq 0.$$

Definice 2.3 (Řešení LP). *Vektor x nazveme* přípustným řešením *lineárního programu $\min c^\top x \mid Ax = b,\ x \geq 0$, splňuje-li všechny jeho podmínky. Lineární program nazveme* přípustným*, má-li přípustné řešení (tj. příslušný lineární systém je přípustný).*

Vektor x^* nazveme optimálním řešením (optimem)*, je-li přípustným řešením a navíc dává nejnižší hodnotu účelové funkce ze všech přípustných řešení.*

Definice 2.4 (Optimální hodnota). *Optimální hodnotou lineárního programu $\min c^\top x \mid Ax = b,\ x \geq 0$ rozumíme hodnotu*

$$f(A, b, c) := \inf\{c^\top x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}.$$

Optimální hodnota bývá často definována pomocí minima místo infima, s rozšířením $\min \emptyset := \inf \emptyset = \infty$ a $\min \mathcal{A} := \inf \mathcal{A} = -\infty$ pro množinu $\mathcal{A}$ splňující $\inf \mathcal{A} = -\infty$. Pro všechny ostatní množiny $\mathcal{B}$ také platí, že $\min \mathcal{B} = \inf \mathcal{B}$. Pak se dá zápis $\min c^\top x \mid Ax = b,\ x \geq 0$ chápat jako lineární program nebo jeho optimální hodnota, min v prvním případě značí minimalizaci, ve druhém minimum. V textu dále budeme používat stejný zápis pro obě možnosti, z kontextu je jasné, kdy jde o minimalizaci a kdy o minimum.

Lineární program může být zadefinován také ve tvaru $\min c^\top x \mid Ax \leq b$ nebo $\min c^\top x \mid Ax \leq b, x \geq 0$. Všechny tvary jsou na sebe vzájemně převoditelné, stejně tak libovolný lineární systém rovnic a nerovnic lze na každý z těchto tvarů převést (ukázka Př. 2.1). Účelovou funkci můžeme místo minimalizace maximalizovat, kdy opět uvažujeme $\max \emptyset = \sup \emptyset = -\infty$. Maximalizace $c^\top x$ je ekvivalentní minimalizaci $-c^\top x$ a platí $\min c^\top x = -\max -c^\top x$.

Každý lineární program lze tedy převést na tvar $\min c^\top x \mid Ax = b,\ x \geq 0$.

Značení. Množinu, kterou popisuje lineární systém rovnic a nerovnic, budeme značit $\mathcal{M}(A, b)$. Dále označíme pomocí písmen (A), (B), (C) její obvykle používané tvary v lineárním programování

(A) $\mathcal{M}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$,

(B) $\mathcal{M}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$,

(C) $\mathcal{M}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$.

Příklad 2.1. Mějme lineární program

$$\min x + 8y$$

$$\begin{aligned} x - y &\geq 10 \\ 2x + 5y &= 20 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Tento program můžeme převést na tvar (A) pomocí substituce $y = z - a$, $z, a \geq 0$. Vynásobením nerovnosti číslem -1 a přičtením nezáporného čísla u k nerovnosti získáme program

$$\min x + 8z - 8a$$

$$\begin{aligned} -x + z - a + u &= -10 \\ 2x + 5z - 5a &= 20 \\ x \geq 0,\ a \geq 0,\ z &\geq 0,\ u \geq 0. \end{aligned}$$

Definice 2.5 (Duální LP)**.** *Duálním lineárním programem (duálem) k programu* $\min c^\top x \mid Ax = b, x \geq 0$ *rozumíme lineární program*

$$\max b^\top y \mid A^\top y \leq c.$$

Původní LP nazýváme primární lineární program.

Duální lineární program můžeme definovat také pro typy (B) a (C), pro typ (B) má duál tvar

$$\max b^\top y \mid A^\top y = c, y \leq 0,$$

duální lineární program k typu (C) je tvaru

$$\max b^\top y \mid A^\top y \leq c, y \leq 0.$$

Značení. Označíme $f(A, b, c)$ optimální hodnotu primárního LP a $g(A, b, c)$ optimální hodnotu příslušného duálního LP.

Mohou nastat tři případy dle optimální hodnoty

(a) $f(A, b, c) = c^\top x^* \in \mathbb{R}$: říkáme, že LP *má optimální řešení.*

(b) $f(A, b, c) = -\infty$: říkáme, že LP je *neomezený.*

(c) $f(A, b, c) = \infty$: LP nemá žádné přípustné řešení, říkáme, že LP je *nepřípustný.*

Obdobně pro $g(A, b, c)$

(a) $g(A, b, c) = c^\top x^* \in \mathbb{R}$: duální LP *má optimální řešení.*

(b) $g(A, b, c) = \infty$: duální LP je *neomezený.*

(c) $g(A, b, c) = -\infty$: duální LP je *nepřípustný.*

Přípustný LP souhrnně označuje možnosti (a) a (b), tedy neomezený LP nebo LP mající optimální řešení.

Definice 2.6 (Duality gap)**.** *Rozdíl $f(A, b, c) - g(A, b, c)$ označujeme jako* duality gap*, přičemž pro $f(A, b, c) = g(A, b, c) = \infty$ nebo $f(A, b, c) = g(A, b, c) = -\infty$ definujeme duality gap rovný 0. Pokud je rozdíl rovný nule, tj. $f(A, b, c) = g(A, b, c)$, používáme spojení* nulový*, v obráceném případě* nenulový*,* duality gap*.*

Věta 2.1 (Slabá dualita)**.** *Pro optimální hodnoty primárního (minimalizačního) a duálního (maximalizačního) lineárního programu platí následující vztah*

$$g(A, b, c) \leq f(A, b, c).$$

Věta 2.2 (Silná dualita)**.** *Pro primární a duální LP nastane vždy právě jedna z možností*

(a) $f(A, b, c) = \infty$, $g(A, b, c) = -\infty$, tj. primární i duální LP jsou nepřípustné,

(b) $f(A, b, c) = g(A, b, c)$, tedy

(i) primární LP je neomezený a duální nepřípustný, nebo

(ii) primární LP je nepřípustný a duální neomezený, nebo

(iii) primární i duální LP jsou přípustné.

Slabá dualita vylučuje existenci možností, kdy jsou oba, primární i duální, programy neomezené nebo kdy je jeden program přípustný a druhý neomezený nebo nepřípustný. Ze silné duality vidíme, že duality gap může být nenulový jedině v případě, kdy je jak primární, tak duální lineární program nepřípustný.

2.3 Úvod do intervalového počítání

Základy intervalové analýzy vybudoval Moore v roce 1966, mezi současné pěkné přehledové knihy o intervalovém počítání patří *Introduction to Interval Analysis*[8] z roku 2009 od autorů Moore, Kearfott a Cloud.

Definice 2.7 (Interval)**.** *Mějme $\underline{x}$, $\overline{x} \in \mathbb{R}$ splňující $\underline{x} \leq \overline{x}$, pak* (reálným) intervalem *rozumíme množinu*

$$\boldsymbol{x} = [\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\}.$$

Čísla $\underline{x}$, $\overline{x}$ nazýváme dolní *a* horní mez *intervalu. Množinu reálných intervalů značíme symbolem $\mathbb{IR}$. Interval splňující $\underline{x} = \overline{x}$ nazýváme* degenerovaný interval.

Definice 2.8 (Střed a poloměr intervalu)**.** *Mějme interval $[\underline{x}, \overline{x}]$, pak* středem*, resp.* poloměrem intervalu *rozumíme čísla*

$$x_c = \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2}, \textit{ resp. } x_\Delta = \frac{\overline{x} - \underline{x}}{2}.$$

Jiný způsob, jak můžeme vyjádřit interval, je pomocí středu a poloměru

$$\boldsymbol{x} = [x_c - x_\Delta, x_c + x_\Delta] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_c| \leq x_\Delta\}.$$

Pro počítání s intervaly se zavádí intervalová aritmetika, která je definována tak, aby výsledný interval pokrýval všechny možné hodnoty vzniklé výběrem konkrétních hodnot z daných intervalů.

Definice 2.9 (Intervalová aritmetika)**.** *Nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}$, potom aritmetické operace definujeme následovně*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} &:= \{a \circ b \mid a \in \boldsymbol{a}, b \in \boldsymbol{b}\}, \textit{ tedy konkrétně} \\
\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &:= [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}], \\
\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} &:= [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}], \\
\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &:= [\min S, \max S], \textit{ kde } S = \{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}, \\
\boldsymbol{a} / \boldsymbol{b} &:= \begin{cases} [\min S, \max S], \textit{ kde } S = \{\underline{a}/\underline{b}, \underline{a}/\overline{b}, \overline{a}/\underline{b}, \overline{a}/\overline{b}\} & \textit{pro } 0 \notin \boldsymbol{b}, \\ \textit{nedefinováno} & \textit{pro } 0 \in \boldsymbol{b}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Obdobným způsobem, jakým definujeme intervaly, definujeme také intervalové matice. Můžeme si představit, že intervalová matice má místo čísel za prvky intervaly.

Definice 2.10 (Intervalová matice, středová, poloměrová matice)**.** *Mějme dvě matice $\underline{A}$, $\overline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, splňující $\underline{A} \leq \overline{A}$. Pak* intervalovou maticí *rozumíme množinu*

$$\boldsymbol{A} = [\underline{A}, \overline{A}] = \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid \underline{A} \leq A \leq \underline{A}\},$$

matice $\underline{A}$ a $\overline{A}$ nazýváme dolní a horní mezí.

Středovou*, resp.* poloměrovou intervalovou maticí *rozumíme matice*

$$A_c := \frac{1}{2}(\underline{A} + \overline{A}), \textit{ resp. } A_\Delta := \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A}).$$

Množinu všech intervalových matic o rozměrech $m \times n$ značíme $\mathbb{IR}^{m \times n}$. Intervalovým vektorem *rozumíme intervalovou matici o rozměrech $m \times 1$.*

Intervalovými lineárními systémy se zabýval Neumaier ve své knize *Interval Methods for Systems of Equations*[9].

Definice 2.11 (Intervalový lineární systém)**.** *Mějme intervalový vektor* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m$ *a intervalovou matici* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$*.* Intervalovým lineárním systémem (soustavou) rovnic $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ *rozumíme množinu systémů*

$$\{Ax = b \mid A \in \boldsymbol{A}, b \in \boldsymbol{b}\}.$$

Analogicky definujeme intervalový lineární systém nerovnic pro nerovnosti. Souhrnně budeme vzniklou množinu nazývat intervalovým lineárním systémem*.*

Definice 2.12 (Řešení intervalového lineárního systému)**.** (Slabým) řešením *intervalového lineárního systému* $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ *rozumíme vektor* x *splňující* $Ax = b$ *pro nějaké* $A \in \boldsymbol{A}$*,* $b \in \boldsymbol{b}$, silným řešením *rozumíme vektor* x *splňující* $Ax = b$ *pro všechny* $A \in \boldsymbol{A}$*,* $b \in \boldsymbol{b}$*.*

Množinu řešení *intervalového lineárního systému definujeme jako množinu všech slabých řešení, tj.* $\Sigma = \{x \mid \exists A \in \boldsymbol{A}, \exists b \in \boldsymbol{b} : Ax = b\}$*.*

V klasickém LP nezáleželo na použitém typu lineárního systému, všechny byly mezi sebou převoditelné. U intervalového lineárního programu na typu závisí, jednotlivé typy navzájem převoditelné nejsou kvůli častému problému intervalového počítání — závislostem. Tento problém vyvstává například při převodu ILP typu (B) na typ (C). Nelze použít rozepsání vektoru x na kladnou a zápornou část, jak se obvykle převádí v reálných LP, neboť bychom dostali následující systém

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}x_1 - \boldsymbol{A}x_2 &\le \boldsymbol{b}, \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Tento systém má širší množinu řešení než původní systém $\boldsymbol{A}x \le \boldsymbol{b}$, neboť se ztrácí závislost, že vybraná matice $A \in \boldsymbol{A}$ je tatáž. Nový systém je ekvivalentní množině systémů $\{A_1x_1 - A_2x_2 \le b \mid A_1, A_2 \in \boldsymbol{A}, b \in \boldsymbol{b}, x_1, x_2 \ge 0\}$, zatímco původní systém množině $\{Ax_1 - Ax_2 \le b \mid A \in \boldsymbol{A}, b \in \boldsymbol{b}, x_1, x_2 \ge 0\}$.

Příklad. Konkrétně, mějme intervalový lineární systém

$$[1, 2]x \le 1 \tag{2.1}$$

a systém s rozepsaným x na kladnou (x_1) a zápornou (x_2) část

$$[1, 2]x_1 - [1, 2]x_2 \le 1, \; x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0. \tag{2.2}$$

Pak vektor $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ je řešením systému (2.2), neboť $1\cdot x_1 - 2\cdot x_2 = 3 - 2 = 1$, ale $x = x_1 - x_2 = 2$ není řešením původního systému (2.1).

Obdobný problém se závislostmi by měl i převod z intervalové rovnice na intervalové nerovnice, tedy převod z typu (A) na typ (C).

Ne každý převod je špatný z pohledu změny množiny řešení, např. převod z typu (C) na typ (A) lze provést analogickým způsobem jako v klasickém počítání, aniž by se změnila množina řešení, následujícím způsobem

$$\boldsymbol{A}x \le \boldsymbol{b}, \; x \ge 0 \longrightarrow \boldsymbol{A}x + Iy = \boldsymbol{b}, \; x, y \ge 0.$$

Tento převod je však, jak uvidíme později, výpočetně nevýhodný.

2.4 Úvod do intervalového lineárního programování

V této části rozšíříme koncept lineárního programování pomocí intervalového počítání, pěkný přehled je uveden v *Interval Linear Programming: A Survey*[3] od Milana Hladíka a dále v *Interval Linear Programming*[14] od Jiřího Rohna.

Definice 2.13 (Intervalový lineární program)**.** Intervalovým lineárním programem (ILP[1]) *rozumíme množinu všech lineárních programů* $\min c^\top x \mid x \in \mathcal{M}(A, b)$, *kde* $A \in \boldsymbol{A}$, $b \in \boldsymbol{b}$, $c \in \boldsymbol{c}$. *Zkráceně zapisujeme jako*

$$\min \boldsymbol{c}^\top x \mid x \in \mathcal{M}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}).$$

Definice 2.14 (Instance)**.** *Pro konkrétní realizaci hodnot* (A, b, c)*:* $A \in \boldsymbol{A}$, $b \in \boldsymbol{b}$, $c \in \boldsymbol{c}$*, používáme pojem* instance*.*

Definice 2.15 (Přípustnost)**.** *Intervalový lineární program je* silně přípustný*, pokud je přípustný pro všechny instance. Intervalový lineární program je* slabě přípustný*, pokud je přípustný pro alespoň jednu instanci.*

O slabé a silné přípustnosti mluvíme i u intervalového lineárního systému. *Intervalový lineární systém* je *slabě*, resp. *silně*, *přípustný*, má-li alespoň jedna, resp. všechny, jeho instance řešení. Tedy lze alternativně definovat, že ILP je slabě přípustný, je-li jemu příslušný intervalový lineární systém slabě přípustný, stejně tak pro silnou přípustnost.

Všimněme si, že silná přípustnost nevyžaduje, aby existovalo silné řešení, tedy jeden přípustný vektor splňující všechny instance. Stačí, aby pro každou instanci nějaký přípustný vektor existoval.

Definice 2.16 (Množina optimálních hodnot)**.** Množinou optimálních hodnot *ILP rozumíme množinu všech optimálních hodnot jednotlivých instancí ILP. Značíme ji* $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$*. Tedy*

$$f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) := \{f(A, b, c) \mid A \in \boldsymbol{A}, b \in \boldsymbol{b}, c \in \boldsymbol{c}\}.$$

Množina optimálních hodnot ILP $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ nemusí nutně tvořit souvislou množinu (Př. 2.2).

Příklad 2.2.

(a) Intervalový lineární program

$$\begin{aligned} \min\, & -x \\ & x \le 1 \\ [0,1]& x \le 0 \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

má optimální hodnotu $f(A, b, c) = -1$ pro $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = -1$ a pro ostatní instance $f(A, b, c) = 0$. Tedy $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \{-1, 0\}$, což není souvislá množina.

[1] Nezaměňujte se stejnopísmennou anglickou zkratkou pro celočíselné lineární programování (Integer Linear Programming). V celé práci bude zkratka ILP znamenat intervalové lineární programování.

(b) Oproti tomu množina optimálních hodnot programu

$$\min -x$$

$$x \leq [1,2]$$
$$x \geq 0$$

je rovna uzavřenému intervalu, $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -[1,2]$. Tedy souvislá je.

Definice 2.17 (Duální ILP)**.** *Duálním ILP* (duálem) *k intervalovému lineárnímu programu* $\min \boldsymbol{c}^\top x \mid \boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b},\ x \geq 0$ *rozumíme program* $\max \boldsymbol{b}^\top y \mid \boldsymbol{A}^\top y \leq \boldsymbol{c}$.

Značení. Množinu optimálních hodnot primárního ILP budeme označovat jako $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, množinu optimálních hodnot příslušného duálního ILP budeme označovat jako $g(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. Platí $g(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \{g(A, b, c) \mid A \in \boldsymbol{A},\ b \in \boldsymbol{b},\ c \in \boldsymbol{c}\}$.

Dále množinu, kterou popisuje intervalový lineární systém primárního programu, budeme značit $\mathcal{M}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ a množinu, kterou popisuje intervalový lineární systém duálního programu, budeme značit $\mathcal{N}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

2.5 Přípustnost intervalového lineárního systému

V této části uvádíme výsledky o přípustnosti intervalového lineárního systému, které jsou v práci dále používané. Pěkný přehled uvádí Rohn v [13] a Hladík v [3]. Uvedeme věty pro slabou a silnou přípustnost zavedených tří typů intervalového lineárního systému.

Věta 2.3. *Intervalový lineární systém typu (A)* $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b},\ x \geq 0$ *je silně přípustný právě tehdy, když je pro všechna* $p \in \{\pm 1\}^m$ *přípustný systém*

$$(A_c - T_p A_\Delta)x = b_c + T_p b_\Delta,\ x \geq 0.$$

Věta 2.4. *Intervalový lineární systém typu (B)* $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}$ *je silně přípustný právě tehdy, když je přípustný systém* $\overline{A}x_1 - \underline{A}x_2 \leq \underline{b},\ x_1, x_2 \geq 0$.

Věta 2.5. *Intervalový lineární systém typu (C)* $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b},\ x \geq 0$ *je silně přípustný právě tehdy, když je přípustný systém* $\overline{A}x \leq \underline{b},\ x \geq 0$.

Zajímavý výsledek platí pro typy (B) a (C). Silná přípustnost se ztotožňuje se silným řešením, což obecně nelze, např. u typu (A) je silné řešení velmi omezující podmínkou, na rozdíl od silné přípustnosti.

Věta 2.6. *Intervalový lineární systém typu (C)* $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b},\ x \geq 0$ *nebo typu (B)* $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}$ *je silně přípustný právě tehdy, když má silné řešení.*

Testování silné přípustnosti pro typy (B) a (C) je polynomiální, neboť stačí ověřit přípustnost jednoho klasického lineárního systému. Pro typ (A) je dokázána [13] NP-těžkost.

Testování slabé přípustnosti je NP-těžké pro typ (B), pro ostatní se testování převede také na obyčejný lineární systém.

Věta 2.7. *Intervalový lineární systém typu (A)* $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, $x \geq 0$ *je slabě přípustný právě tehdy, když je systém* $\underline{A}x \leq \overline{b}$, $-\overline{A}x \leq -\underline{b}$, $x \geq 0$ *přípustný.*

Věta 2.8. *Intervalový lineární systém typu (B)* $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}$ *je slabě přípustný právě tehdy, když existuje* $p \in \{\pm 1\}^n$ *takové, že je systém* $(A_c - A_\Delta T_p)x \leq \overline{b}$ *přípustný.*

Věta 2.9. *Intervalový lineární systém typu (C)* $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}$, $x \geq 0$ *je slabě přípustný právě tehdy, když je systém* $\underline{A}x \leq \overline{b}$, $x \geq 0$ *přípustný.*

	typ (A): $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, $x \geq 0$	typ (B): $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}$	typ (C): $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}$, $x \geq 0$
silná přípustnost	NP-těžké	polynomiální	polynomiální
slabá přípustnost	polynomiální	NP-těžké	polynomiální

Tabulka 2.1: Složitost testování přípustnosti ILP.

2.6 Obecný tvar intervalového lineárního programu

Uvedli jsme obvykle používané tvary lineárního systému, v praxi se však můžeme setkat se složitějšími tvary — ne vždy dostaneme pěkný systém obsahující pouze rovnosti nebo pouze nerovnosti a o jehož všech proměnných předpokládáme nezápornost. Z tohoto důvodu zavedeme obecný tvar intervalového lineárního systému, který zahrnuje jakýkoli intervalový lineární systém.

Definice 2.18 (Obecný intervalový lineární systém)**.** *Mějme intervalové matice* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{k\times m}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{IR}^{k\times n}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{IR}^{l\times m}$, $\boldsymbol{D} \in \mathbb{IR}^{l\times n}$ *a intervalové vektory* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{IR}^k$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^l$. Obecným intervalovým systémem *rozumíme množinu lineárních systémů*

$$Ax + By = a,\ Cx + Dy = b,\ x \geq 0,$$

kde $A \in \boldsymbol{A}$, $B \in \boldsymbol{B}$, $C \in \boldsymbol{C}$, $D \in \boldsymbol{D}$, $a \in \boldsymbol{a}$, $b \in \boldsymbol{b}$. *Zkráceně zapisujeme*

$$\boldsymbol{A}x + \boldsymbol{B}y = \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{D}y \leq \boldsymbol{b},\ x \geq 0. \tag{2.3}$$

Každý intervalový lineární systém může být převeden na tvar (2.3). Nerovnice typu „≥" převedeme pomocí vynásobení číslem -1 a pro nekladné proměnné $z \leq 0$ použijeme substituci $z' := -z$, $z' \geq 0$.

Pro obecný intervalový systém zavedeme obecný tvar intervalového lineárního programu.

Definice 2.19 (Obecný ILP)**.** Obecným intervalovým lineárním programem *budeme rozumět program*

$$\min\,(\boldsymbol{c}^\top x + \boldsymbol{d}^\top y) \mid \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{B}y = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{D}y \leq \boldsymbol{b}, x \geq 0.$$

Definice 2.20 (Duál obecného ILP)**.** Duálním programem (duálem) k obecnému ILP *rozumíme program*

$$\max\,(\boldsymbol{a}^\top u + \boldsymbol{b}^\top v) \mid \boldsymbol{A}^\top u + \boldsymbol{C}^\top v \leq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{B}^\top u + \boldsymbol{D}^\top v = \boldsymbol{d}, v \leq 0.$$

3. Množina optimálních hodnot

Jak již bylo řečeno v části 2.4, množina optimálních hodnot intervalového lineárního programu nemusí tvořit souvislou množinu. Ukázali jsme příklady s množinami optimálních hodnot $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \{-1, 0\}$ a $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -[1, 2]$. V této kapitole se budeme zabývat dalšími možnými tvary množiny optimálních hodnot ILP a dále jejím omezením shora i zdola.

3.1 Příklady tvarů množiny optimálních hodnot

Tato kapitola obsahuje příklady ukazující, že množina optimálních hodnot ILP může vypadat různě. Potvrzuje, že ILP může mít zároveň jak nepřípustnou, tak neomezenou instanci nebo že optimální hodnota ILP se může nabývat jak na celé rozšířené reálné ose, tak jen v několika nesousedních bodech.

Tvrzení 3.1. *Intervalový lineární program může současně obsahovat libovolnou neprázdnou podmnožinu typů instancí: instance nepřípustná, mající optimální hodnotu, neomezená. Přičemž množina optimálních hodnot tohoto programu může být jak souvislá, tak nesouvislá, pokud to pro danou kombinaci dává smysl. Přehled možných kombinací shrnuje tabulka 3.1.*

Pro důkaz lemmatu slouží následující rozbor případů spolu s uvedením konkrétního zástupce každé skupiny.

Pro přehlednost uvádíme tabulku, která charakterizuje ILP z hlediska obsahu alespoň jedné instance, která je neomezená, nepřípustná nebo má optimální řešení, a z hlediska souvislosti množiny optimálních hodnot.

Nalézt příklad s neomezenou, resp. nepřípustnou, instancí je jednoduché, stačí vzít klasický neomezený, resp. nepřípustný, lineární program. Ne všechny možné kombinace možností z tabulky mohou nastat, např. nemůže existovat souvislá množina obsahující pouze $\pm\infty$ a žádné reálné číslo. Také není definován ILP, který nemá žádnou instanci.

V rozboru případů nezáleží na tom, zda část množiny optimálních hodnot tvoří bod (degenerovaný interval) nebo uzavřený interval, neboť bod lze vhodným přidáním či rozšířením intervalu, např. koeficient v optimalizační funkci, rozšířit na uzavřený interval. Tedy nebudeme rozlišovat případy, kdy je množina optimálních hodnot složena z několika bodů nebo stejného počtu disjunktních intervalů. Příklady jsou uvedeny pro lepší čitelnost v maximalizačním tvaru, na minimalizační se dají převést pomocí platnosti vztahu $\min c^\top x = -\max -c^\top x$.

Příklad 3.1 (souvislá množina, neomezená, optimální i nepřípustná instance).

Mějme intervalový lineární program s $\boldsymbol{A} = [0, 1]$ a $\boldsymbol{b} = [-1, 1]$

$$\max x$$
$$[0, 1]x \leq [-1, 1].$$

Zvolíme-li instance s $A = 0$, dostaneme nerovnost

$$0 \leq [-1, 1].$$

	$f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$	ILP obsahuje instanci		
	souvislá	nepřípustná	optimální	neomezená
Př. 3.1	✓	✓	✓	✓
Př. 3.3	✓	✓	✓	✗
nelze	✓	✓	✗	✓
triviální	✓	✓	✗	✗
Př. 3.2	✓	✗	✓	✓
Př. 2.2(b)	✓	✗	✓	✗
triviální	✓	✗	✗	✓
nelze	✓	✗	✗	✗
Př. 3.7	✗	✓	✓	✓
Př. 3.5	✗	✓	✓	✗
Př. 3.6	✗	✓	✗	✓
nelze	✗	✓	✗	✗
Př. 3.4	✗	✗	✓	✓
Př. 2.2(a)	✗	✗	✓	✗
nelze	✗	✗	✗	✓
nelze	✗	✗	✗	✗

Tabulka 3.1: Tvary množiny optimálních hodnot ILP

V závislosti na zvoleném $b \in [-1, 1]$ je tato nerovnost splněna vždy ($b \geq 0$), nebo nemá řešení ($b < 0$). Tedy optimální hodnota těchto instancí je ∞, resp. $-\infty$.

Pro zbylé instance, $A = a \in (0, 1]$, dostaneme nerovnost $ax \leq [-1, 1]$, kterou upravíme na tvar

$$x \leq \frac{1}{a}[-1, 1]$$

Jelikož maximalizujeme x, bude optimální hodnota příslušné instance rovna hodnotě $\frac{b}{a}$, pro $b \in [-1, 1]$.

Zbývá určit, jakých hodnot může nabývat výraz $\frac{b}{a}$ pro $a \in (0, 1], b \in [-1, 1]$. Vidíme, že pokryje celou reálnou osu, tedy $\frac{b}{a} \in (-\infty, \infty)$.

Dohromady $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \mathbb{R}^*$.

Příklad 3.2 (souvislá množina, neomezená i optimální instance).

$$\max x$$

$$[-1, 1]x \leq 1$$

$$f(A, b, c) = \begin{cases} \infty & \text{pro } A \in [-1, 0] \\ \frac{1}{a} & \text{pro } A = a \in (0, 1] \end{cases}$$

Tedy $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = [1, \infty]$.

Příklad 3.3 (souvislá množina, nepřípustná i optimální instance).

$$\max x$$
$$[0,1]x \leq -1$$

$$f(A,b,c) = \begin{cases} -\infty & \text{pro } A = 0 \\ -\frac{1}{a} & \text{pro } A = a \in (0,1] \end{cases}$$

Tedy $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = [-\infty, -1]$.

Příklad 3.4 (nesouvislá množina, optimální i neomezená instance).

$$\begin{aligned} &\max x \\ [-1,1]x &\leq 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$f(A,b,c) = \begin{cases} 0 & \text{pro } A \in (0,1] \\ \infty & \text{pro } A \in [-1,0] \end{cases}$$

Tedy $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \{0, \infty\}$.

Příklad 3.5 (nesouvislá množina, nepřípustná i omezená instance).

$$\begin{aligned} &\max x \\ [-1,1]x &\leq 0 \\ -x &\leq -1 \\ x &\leq 2 \end{aligned}$$

$$f(A,b,c) = \begin{cases} -\infty & \text{pro } A_{11} \in (0,1] \\ 2 & \text{pro } A_{11} \in [-1,0] \end{cases}$$

Tedy $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \{-\infty, 2\}$.

Příklad 3.6 (nesouvislá množina, nepřípustná i neomezená instance).

$$\begin{aligned} &\max x \\ [-1,1]x &\leq 0 \\ -x &\leq -1 \end{aligned}$$

$$f(A,b,c) = \begin{cases} -\infty & \text{pro } A_{11} \in (0\text{,}1] \\ \infty & \text{pro } A_{11} \in [-1\text{,}0] \end{cases}$$

Tedy $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \{-\infty, \infty\}$.

Příklad 3.7 (nesouvislá množina, nepřípustná, přípustná i neomezená instance).

$$\begin{aligned} \max\,[0,1]x \\ [-1,1]x \le 0 \\ -x \le -1 \end{aligned}$$

$$f(A,b,c) = \begin{cases} -\infty & \text{pro } A_{11} \in (0,1],\ c \text{ libovolné (neboť pak } A_{11} \le A_{11}x \le 0) \\ 0 & \text{pro } A_{11} \in [-1,0],\ c = 0 \\ \infty & \text{pro } A_{11} \in [-1,0],\ c \in (0,1] \end{cases}$$

Tedy $f(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \{-\infty, 0, \infty\}$.

Příklad 3.8 (nesouvislá množina, exponenciálně bodů vzhledem k počtu proměnných, [4]).

$$\min -\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1,...,n\} : x_i \le 2^{i-1} \\ [-1,1]x_i \le 0 \\ x_i \ge 0 \end{aligned}$$

V závislosti na hodnotě vybrané z intervalu může nastat $x_i = 0$ nebo $x_i = 2^{i-1}$, tyto možnosti lze kombinovat nezávisle na sobě, tedy množina optimálních hodnot tohoto programu je $f(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \{0,1,2,3,...,2^n-1\}$.

Otevřeným problémem zůstává, zda může množina optimálních hodnot tvořit otevřenou či polouzavřenou množinu. Z charakterizace horní a dolní meze, která bude uvedena v následující kapitole, vyplývá, že horní a dolní hranice množiny se vždy nabývá v bodě množiny. Tedy víme, že souvislé množiny budou vždy uzavřené. Není však jasné, zda může být nesouvislá množina otevřená či polouzavřená, tedy sjednocením polouzavřených nebo otevřených intervalů.

3.2 Souvislost množiny optimálních hodnot

Obecně může být množina optimálních hodnot nesouvislá, jak potvrdily konkrétní příklady v sekci 3.1. Souvislost můžeme v některých případech zajistit postačujícími podmínkami.

Postačující podmínku souvislosti množiny optimálních hodnot pro typ (C) uvedl Beeck už v roce 1978 v [1]. Tato jednoduchá podmínka vyžaduje ověření omezenosti dvou instancí a jejich duálů.

Věta 3.2 (Beeck, 1978). *Množina optimálních hodnot ILP tvaru $\boldsymbol{A}x \le \boldsymbol{b}, x \ge 0$ tvoří uzavřený interval, jestliže mají instance s hodnotami $(\overline{A}, \underline{b}, \overline{c})$ a $(\underline{A}, \overline{b}, \underline{c})$ a jejich duální programy omezené množiny přípustných řešení.*

Další z postačujících podmínek je spojitost $f(A, b, c)$ na intervalech $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, neboť pak bude $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ kompaktní interval (dle známé věty říkající, že spojitým obrazem kompaktní množiny je opět kompaktní množina).

Spojitost pro typ (A) zajišťuje následující postačující podmínka uvedená v [17].

Věta 3.3 (Wets, 1985). *Mějme ILP $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, x \geq 0$ splňující*

- $\boldsymbol{A}x = 0, x \geq 0, \boldsymbol{c}^\top x \leq 0$ *nemá jiné řešení než* $x = 0$,
- $\boldsymbol{A}^\top y \leq 0, \boldsymbol{b}^\top y \geq 0$ *nemá jiné řešení než* $y = 0$.

Pak $f(A, b, c)$ je spojitá na intervalech $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

Existují další postačující podmínky souvislosti $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, jednou z nich může být bázická stabilita [3].

3.3 Určování mezí množiny optimálních hodnot

Ačkoli $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ nemusí nutně tvořit souvislý interval, může být užitečné určit horní a dolní mez ILP spočtené množiny.

Definice 3.1. *Dolní a horní mezí množiny optimálních hodnot ILP rozumíme*

$$\underline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) := \inf\{f(A, b, c) \mid A \in \boldsymbol{A},\, b \in \boldsymbol{b},\, c \in \boldsymbol{c}\},$$
$$\overline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) := \sup\{f(A, b, c) \mid A \in \boldsymbol{A},\, b \in \boldsymbol{b},\, c \in \boldsymbol{c}\}.$$

Někdy tyto meze označujeme jako nejlepší *a* nejhorší *případ.*

Tato sekce se zabývá základním tvarem mezí pro ILP typů (A), (B), (C) a pro obecný typ, další rozšiřující tvary mezí využívající dualitu jsou uvedeny v kapitole 4.3.

Typ (A): $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, x \geq 0$

Pro zjištění dolní meze $\underline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ typu (A) je třeba spočtat jeden klasický lineární program, zatímco určení horní meze je obtížnější, dokonce NP-těžké.

Tvar dolní meze poprvé určil Machost v roce 1970 [6], tvar horní meze určil Rohn nejprve pro množinu optimálních hodnot obsahující pouze konečné hodnoty (1984), později i pro nekonečné hodnoty (2006).

Věta 3.4 (Machost, 1970). *Platí:*

$$\underline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \inf\{\underline{c}^\top x \mid \underline{A}x \leq \overline{b},\, \overline{A}x \geq \underline{b}, x \geq 0\}.$$

Důkaz. Viz [6] nebo [14]. □

Věta 3.5 (Rohn, 2006). *Platí:*

$$\overline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \sup_{s \in \{\pm 1\}^m} f(A_c - T_s A_\Delta,\, b_c + T_s b_\Delta,\, \overline{c}).$$

Důkaz. Viz [14]. □

Věta 3.6 (Rohn, 1995)**.** *Spočtení $\overline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ je NP-těžké.*

Důkaz. Viz [12] nebo [14]. □

Spočtení $\overline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ je silně NP-těžké navíc i pro speciální případ, kdy je interval pouze na pravé straně, tj. $Ax = \boldsymbol{b}$ (viz [2]).

Typ (B): $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}$

Typ (B) je v dualitním vztahu k typu (A), určení dolní, resp. horní, meze v (B) odpovídá určení horní, resp. dolní, meze v (A). Spočtení dolní meze je NP-těžké, zatímco spočtení horní meze převedeme opět na jeden klasický lineární program.

Věta 3.7. *Platí:*

$$\begin{aligned}\underline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= \inf\{{c_c}^\top x - {c_\Delta}^\top |x| \mid A_c x - A_\Delta |x| \leq \overline{b}\}\\ &= \inf_{s \in \{\pm 1\}^m} \{(c_c - T_s c_\Delta)^\top x \mid (A_c - A_\Delta T_s)x \leq \overline{b}\},\\ \overline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= \sup\{\min\ \overline{c}^\top x_1 - \underline{c}^\top x_2 \mid \overline{A}x_1 - \underline{A}x_2 \leq \underline{b},\, x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0\}.\end{aligned}$$

Důkaz. Plyne z duality mezi typy (A) a (B). Také lze vzít typ (B) jako speciální případ obecného tvaru ILP (Věta 3.9). □

Určení $\underline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ je NP-těžké. Dokonce je silně NP-těžké i pro ILP s intervalovými hodnotami pouze v minimalizační funkci, tj. $\min \boldsymbol{c}^\top x \mid Ax \leq b$, [2].

Typ (C): $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}, x \geq 0$

Intervalový lineární program typu (C) je z uvedených typů nejsnazší, tvar obou mezí určil už v roce 1961 Vajda.

Věta 3.8 (Vajda, 1961)**.** *Platí:*

$$\begin{aligned}\underline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= \inf\{\underline{c}^\top x \mid \underline{A}x \leq \overline{b},\, x \geq 0\}\\ \overline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= \inf\{\overline{c}^\top x \mid \overline{A}x \leq \underline{b},\, x \geq 0\}\end{aligned}$$

Důkaz. Viz [4]. □

Věta ukazuje, že spočtení obou mezí $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ je pro typ (C) polynomiální, stačí vyřešit jeden lineární program pro každou mez.

Obecný typ: $\boldsymbol{A}x + \boldsymbol{B}y = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{D}y \leq \boldsymbol{b}, x \geq 0$

V následující větě je spočtení dolní meze obecného intervalového programu exponenciální vzhledem k velikosti proměnné y a spočtení horní meze exponenciální vzhledem k počtu „=“. Obecně to nemůže jít lépe, neboť dle věty 3.6 je spočtení horní meze i pro speciální případ $\boldsymbol{B} = 0$, $\boldsymbol{C} = 0$, $\boldsymbol{D} = 0$ NP-těžké a jak bylo uvedeno výše, také spočtení dolní meze je NP-těžké pro speciální případ $\boldsymbol{A} = 0, \boldsymbol{B} = 0, \boldsymbol{C} = 0$.

Věta 3.9 (Hladík, 2016)**.** *Pro meze ILP obecného tvaru platí*

$$
\begin{aligned}
\underline{f} = \min_{s \in \{\pm 1\}^n} \min \, & (\underline{c}^\top x + (d_c - T_s d_\Delta)^\top y) \\
& \underline{A}x + (B_c - B_\Delta T_s) y \le \overline{a}, \\
& -\overline{A}x - (B_c + B_\Delta T_s) y \le \underline{a}, \\
& \underline{C}x + (D_c - D_\Delta T_s) y \le \overline{d}, \\
& x \ge 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{f} = \max_{s \in \{\pm 1\}^k} \min \, & (\overline{a}^\top x + \overline{c}^\top y_1 - \underline{c}^\top y_2) \\
& (A_c + T_s A_\Delta) x + (B_c + T_s B_\Delta) y_1 \\
& \qquad -(B_c - T_s B_\Delta) y_2 = b_c - T_s b_\Delta, \\
& \overline{C}x + \overline{D}y_1 - \underline{D}y_2 \le \underline{d}, \\
& x, y_1, y_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Důkaz. Viz [4]. □

4. Dualita

Teorie duality je jednou ze stěžejních oblastí lineárního programování. V této kapitole se budeme věnovat rozšíření klasického konceptu do intervalového lineárního programování. Teorie duality je vystavěna tak, aby odpovídala dualitě v klasickém lineárním programování. Tvar duálních ILP odpovídá tvarům, které známe z klasického LP, pouze místo reálných vektorů a matic obsahuje intervalové vektory a matice. Pro ILP typu (A) a ILP obecného typu byly duální ILP již zavedeny (sekce 2.4 a 2.6), ostatní používané tvary shrnuje tabulka 4.1.

Jednou z vlastností, které můžeme v teorii duality studovat, je duality gap. V této kapitole zavedeme duality gap pro intervalové lineární programování a zaměříme se na jeho nulovost. Také uvedeme intervalovou formu stěžejních vět v lineárním programování – slabé a silné duality.

Duálních vlastností dále využijeme pro odvození dalších tvarů mezí množiny optimálních hodnot. Uvedeme některé známé výsledky pro ILP typu (A), které rozšíříme pro více typů ILP, nebo ukážeme, že pro jiné typy obecně platit nemohou.

Typ ILP	Primární program	Duální program
(A)	$\min \boldsymbol{c}^\top x \mid \boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b},\, x \geq 0$	$\max \boldsymbol{b}^\top y \mid \boldsymbol{A}^\top y \leq \boldsymbol{c}$
(B)	$\min \boldsymbol{c}^\top x \mid \boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}$	$\max \boldsymbol{b}^\top y \mid \boldsymbol{A}^\top y = \boldsymbol{c},\, x \leq 0$
(C)	$\min \boldsymbol{c}^\top x \mid \boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b},\, x \geq 0$	$\max \boldsymbol{b}^\top y \mid \boldsymbol{A}^\top y \leq \boldsymbol{c},\, x \leq 0$
obecný	$\min \boldsymbol{c}^\top x + \boldsymbol{d}^\top y \mid$ $\boldsymbol{A}x + \boldsymbol{B}y = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{C}x + \boldsymbol{D}y \leq \boldsymbol{b},\, x \geq 0$	$\max \boldsymbol{a}^\top u + \boldsymbol{b}^\top v \mid$ $\boldsymbol{A}^\top u + \boldsymbol{C}^\top v \leq \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{B}^\top u + \boldsymbol{D}^\top v = \boldsymbol{d},\, v \leq 0$

Tabulka 4.1: Tvary duálních ILP.

4.1 Duality gap

Jak již bylo zmíněno v sekci 2.2, v klasickém lineárním programování je duality gap nenulový, pokud je primární i duální program nepřípustný. Nás bude zajímat, kdy alespoň pro jednu instanci tato situace nastane. Uvedeme nutné a postačující podmínky pro nulový duality gap ve všech instancích, neboť jde o vlastnost, kterou může být užitečné znát — jak ukáže věta 4.5 o silné dualitě pro intervalové lineární programování v následující sekci.

Dále uvedeme příklady, které ilustrují, jak může duality gap v ILP vypadat.

4.1.1 Nutné a postačující podmínky pro silně nulový duality gap

Definice 4.1 (silně a slabě nulový duality gap)**.** *Mějme ILP a jemu příslušný duální ILP. Duality gap nazveme* silně nulový*, jestliže je nulový pro všechny instance, nebo* slabě nulový*, jestliže je nulový pro alespoň jednu instanci.*

Zaměřme se na hledání postačujících podmínek pro silně nulový duality gap. Nejprve uveďme vztah silné přípustnosti ILP a silné nulovosti duality gapu, o kterém se zmiňuje Hladík v [3].

Věta 4.1. *Jestliže je primární ILP nebo jemu příslušný duální ILP silně přípustný, pak je duality gap silně nulový.*

Důkaz. Z definice silné přípustnosti víme, že program je přípustný pro každou instanci. Díky tomu z věty o silné dualitě (věta 2.2) platí pro každou instanci rovnost optimálních hodnot primárního a duálního programu. Duality gap je tedy silně nulový. □

Uvedená věta platí pouze ve formě implikace, ekvivalence není možná, neboť pro nějakou instanci může být primární program neomezený a duální nepřípustný a pro jinou instanci naopak. V tom případě není splněna silná přípustnost, ale duality gap může být stále nulový ve všech instancích.

Další podobnou postačující podmínkou může být tvar mezí množiny optimální hodnoty.

Věta 4.2. *Mějme ILP* $\min \boldsymbol{c}^\top x \mid x \in \mathcal{M}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$*. Duality gap je silně nulový, jestliže platí podmínka*

$$\overline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \infty \implies \underline{g}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \neq -\infty.$$

Důkaz. Obměnou: Existuje-li instance (A, b, c), $A \in \boldsymbol{A}$, $b \in \boldsymbol{b}$, $c \in \boldsymbol{c}$, pro kterou je duality gap nenulový, pak nutně pro tuto instanci platí $f(A, b, c) = \infty$ a $g(A, b, c) = -\infty$. Z čehož plyne, že $\overline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \infty$ a zároveň $\underline{g}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -\infty$, což jsme chtěli dokázat. □

Obě uvedené věty jsou si podobné, neboť určení silné přípustnosti a horní meze spolu úzce souvisí. Ani jedna z nich obecně neplatí s obrácenou implikací, jak ukazuje například ILP z Př. 3.6. Stále by bylo vhodné najít výpočetně snazší postačující podmínky.

Kromě postačujících podmínek je užitečné znát také nutné podmínky silné nulovosti duality gapu, které neslouží k jejímu potvrzení, ale k případnému vyvrácení. Silná přípustnost ILP byla postačující podmínkou pro silně nulový duality gap, slabá přípustnost ILP bude pro něj nutnou podmínkou.

Věta 4.3. *Mějme ILP mající silně nulový duality gap, pak musí být primární ILP nebo jemu příslušný duální ILP slabě přípustný.*

Důkaz. Zvolme libovolnou instanci (A, b, c). Duality gap je pro ni díky předpokladu silné nulovosti nulový, tedy nastane jedna z možností

$$\begin{aligned}
&(a)\ f(A, b, c) = \infty,\ g(A, b, c) = \infty,\\
&(b)\ f(A, b, c) = -\infty,\ g(A, b, c) = -\infty,\\
&(c)\ f(A, b, c) = g(A, b, c) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

V případě (a) je přípustný duální LP, tedy duální ILP je slabě přípustný. V případě (b) je přípustný primární LP a v případě (c) jsou přípustné oba. Tedy alespoň jeden, primární nebo duální, ILP je slabě přípustný. □

Další možností, jak vyloučit silně nulový duality gap, je chytrý výběr instance, která má duality gap nenulový — tedy takové instance, kde jsou oba, primární i duální, programy nepřípustné.

Jednoduchým (ale ne vždy možným) chytrým výběrem může být nastavení jedné proměnné v primárním programu a neodpovídající proměnné v duálním programu na nepřípustné. Takovýto výběr hodnot z intervalů může být proveden pro primární i duální program nezávisle na sobě. Ne vždy je však program nepřípustný pouze kvůli jedné proměnné.

Také v případě, kdy jsou koeficienty u proměnných reálné (degenerované intervaly), můžeme vybírat hodnoty z intervalů pro primární i duální program nezávisle na sobě. Instanci s nenulovým duality gapem pak složíme z obou částí. Problém tedy převádíme na nalezení nepřípustné instance v intervalovém lineárním programu.

Bylo by vhodné najít další nutné a postačující podmínky nebo najít způsob pro obecnější tvar ILP, jak šikovně vybrat instanci s nenulovým duality gapem.

4.1.2 Hodnoty duality gapu v jednom intervalovém lineárním programu

V této sekci se budeme zabývat tím, jak může vypadat duality gap pro intervalový lineární program. Ukážeme, že mohou nastat všechny možnosti

- ILP mající silně nulový duality gap,
- ILP mající slabě ale ne silně nulový duality gap,
- ILP mající nenulový duality gap pro všechny instance,

a zároveň ukážeme příklad potvrzující, že v jednom ILP se mohou vyskytovat všechny možné instance z hlediska zkoumání duality gapu.

Příkladem ILP mající silně nulový duality gap je např. ILP, jehož množina optimálních hodnot obsahuje pouze konečné hodnoty (Př. 2.2).

Pro ilustraci ILP, který má nenulový duality gap pro všechny instance, tj. jeho duality gap není ani slabě nulový, slouží příklad 4.1.

Příklad 4.1. Mějme intervalový lineární program a jeho duál

$$\begin{aligned} &\min\ x_1 - x_2 \\ &[0,1]x_1 \leq -1 \\ &-x_2 \leq -1 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\max\ -y_1 - y_2 \\ &[0,1]y_1 \leq 1 \\ &-y_2 \leq -1 \\ &y_1, y_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Primární program je pro všechny instance nepřípustný, neboť proměnná x_1 není v žádné instanci splněna (muselo by platit $0 \leq [0,1]x_1 \leq -1$). Duální program je také pro všechny instance nepřípustný, neboť nemůže být splněna proměnná y_2 (muselo by platit $1 \leq y_2 \leq 0$). Tedy duality gap tohoto programu je nenulový ve všech instancích.

Situaci, kdy má ILP slabě nulový gap, ale nemá silně nulový, ilustrují následující příklady. Příklad 4.2 navíc ukazuje, že nulový gap může vzniknout, ačkoli je jeden z programů vždy nepřípustný.

Příklad 4.2. Mějme intervalový lineární program a jeho duál

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 - x_2 \\ x_1 &\le [-1, 0] \\ -x_2 &\le -1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \max\ & [-1, 0]y_1 - y_2 \\ y_1 &\le 1 \\ -y_2 &\le -1 \\ y_1, y_2 &\le 0. \end{aligned}$$

Pro všechny instance s $b_1 \in [-1, 0)$ je primární program nepřípustný kvůli proměnné x_1. Pro instanci s $b_1 = 0$ nastává situace, kdy $x_1 = 0$ a $x_2 \ge 1$, tedy lineární program je neomezený s optimální hodnotou $-\infty$.

Podmínky duálního programu se oproti předchozímu příkladu nezměnily, duální program je stále pro všechny instance nepřípustný kvůli proměnné y_2, jeho optimální hodnota je tedy pro všechny instance $-\infty$.

Tedy pro instance s koeficientem $b_1 \in [-1, 0)$ je duality gap nenulový, zatímco pro instanci s $b_1 = 0$ je duality gap nulový.

Uvedený příklad ukázal, proč není nutná podmínka (věta 4.3) zároveň podmínkou dostatečnou.

Příklad 4.3 ilustruje, že jeden ILP může obsahovat všechny možné typy instancí, tj. ve kterých primární a duální programy splňují: oba omezené, primární ILP nepřípustný a duál neomezený a obráceně, oba nepřípustné. Jde o všechny možnosti, ostatní kombinace vylučuje silná dualita (věta 2.2).

Příklad 4.3. Mějme následující intervalový lineární program a jeho duál

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 - [-1, 1]x_2 \\ x_1 &\le [-1, 0] \\ -x_2 &\le -1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \max\ & [-1, 0]y_1 - y_2 \\ y_1 &\le 1 \\ -y_2 &\le -[-1, 1] \\ y_1, y_2 &\le 0. \end{aligned}$$

V závislosti na zvolení hodnot c z $[-1, 1]$ a b z $[-1, 0]$ mají instance těchto programů optimální hodnotu

$$f(A, b, c) = \begin{cases} \infty & \text{pro } b \in [-1, 0),\ c \text{ libovolné} \\ -c & \text{pro } b = 0,\ c \in [-1, 0] \\ -\infty & \text{pro } b = 0,\ c \in (0,1] \end{cases}$$

$$g(A, b, c) = \begin{cases} -\infty & \text{pro } c \in (0, 1], b \text{ libovolné} \\ -c & \text{pro } c \in [-1, 0], b = 0 \\ \infty & \text{pro } c \in [-1, 0], b \in [-1, 0). \end{cases}$$

Tedy ILP obsahuje instance, pro které nastane jedna ze situací

- primární i duální LP je nepřípustný: $b \in [-1, 0)$, $c \in (0, 1]$,

- jeden LP neomezený, druhý nepřípustný: $b = 0$, $c \in (0, 1]$ nebo $b \in [-1, 0)$, $c \in [-1, 0]$,

- oba LP jsou omezené přípustné: $b = 0$, $c \in [-1, 0]$.

V první situaci je duality gap nenulový, v dalších je duality gap nulový.

Příklad ukazuje, že jeden intervalový lineární program může spolu s duálem obsahovat všechny možné kombinace instancí z hlediska zkoumání duality gapu.

4.1.3 Spojitost mezi souvislostí množiny optimálních hodnot a duality gapem

Přirozenou otázkou je, zda duality gap souvisí s nějakou další vlastností, například se souvislostí množiny optimálních hodnot. Může nám dát souvislost informaci o silné nebo slabé nulovosti duality gapu? Kdyby byla odpověď ano, mohli bychom problémy na sebe převést.

Podívejme se, jaké mohou být tvary optimální hodnoty a typy duality gapu ILP.

Nemá význam sledovat jednoprvkové množiny optimálních hodnot.

Pro nesouvislou množinu optimálních hodnot může být duality gap jak silně nulový (viz Př.2.2(a)), tak jen slabě nulový (viz Př.4.3). Možnost, kdy není ani slabě nulový, jsme vyloučili, protože by šlo o jednoprvkovou množinu optimálních hodnot. Tedy skutečnost, že je množina optimálních hodnot nesouvislá, obecně neovlivňuje duality gap.

Pro ILP se souvislou a více než jednoprvkovou množinou optimálních hodnot, je triviálně duality gap alespoň slabě nulový (nutně existuje instance mající reálnou optimální hodnotu, a tedy z věty 2.2 nulový duality gap). Zároveň o ILP se souvislou množinou optimálních hodnot víme, že může mít silně nulový duality gap (viz Př.2.2(b) nebo Př.3.3).

Otevřeným problémem zůstává, jestli existuje ILP se souvislou množinou optimálních hodnot, který má slabě, ale ne silně, nulový duality gap. Nebo-li jestli ILP se souvislou více než jednoprvkovou množinou optimálních hodnot má duality gap vždy silně nulový.

4.2 Slabá a silná dualita

V této kapitole rozšíříme výsledky o slabé a silné dualitě z klasického lineárního programování pro intervalové lineární programování.

4.2.1 Slabá dualita

Slabá dualita pro intervalové lineární programování je přímočarým rozšířením klasické slabé duality (věta 2.1).

Věta 4.4 (Intervalová slabá dualita)**.** *Mějme ILP tvaru* $\min \boldsymbol{c}^\top x \mid x \in \mathcal{M}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. *Pak pro meze množin optimálních hodnot primárního a duálního programu platí*

$$\underline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \geq \underline{g}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}),$$
$$\overline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \geq \overline{g}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

Důkaz. Důkaz plyne z klasické slabé duality (věta 2.1), která nám zaručí, že pro každou instanci $A \in \boldsymbol{A}, b \in \boldsymbol{b}, c \in \boldsymbol{c}$ bude platit: $g(A, b, c) \leq f(A, b, c)$. Z čehož přímo vyplývají uvedené nerovnosti. □

4.2.2 Silná dualita

Stejně jako slabá dualita bude mít silná věta o dualitě v intervalovém lineárním programování podobné znění jako v klasickém lineárním programování. Nejprve uvedeme silnou dualitu pro typ (A), kterou rozšíříme na libovolný tvar ILP. Částečné formy silné duality pro typ (A) uvádí Serafini v [16], Rohn v [14] a Hladík v [3].

Věta 4.5 (Hladík, 2012)**.** *Mějme ILP* $\min \boldsymbol{c}^\top x : \boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, x \geq 0$ *splňující, že jeho duality gap je silně nulový. Pak se dolní a horní meze optimálních hodnot primárního ILP a duálního ILP rovnají, tedy*

$$\underline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \underline{g}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$
$$\overline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \overline{g}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

Větu 4.5 lze rozšířit pro jakýkoli typ ILP a napsat její obecnější variantu pro celé množiny optimálních hodnot.

Tvrzení 4.6. *Mějme ILP* $\min \boldsymbol{c}^\top x \mid x \in \mathcal{M}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *splňující, že jeho duality gap je silně nulový. Pak platí*

$$f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = g(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

Důkaz. Nejprve ukážeme inkluzi $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \subseteq g(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. Nechť $r \in f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, pak nutně existuje instance (A', b', c'), $A' \in \boldsymbol{A}$, $b' \in \boldsymbol{b}, c' \in \boldsymbol{c}$, splňující $f(A', b', c') = r$. Ze silné duality (věta 2.2) $g(A', b', c') = r$, tedy $r \in g(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

Obrácenou inkluzi $g(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \subseteq f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ dokážeme analogicky. □

4.3 Jiný tvar mezí množiny optimálních hodnot

Další tvar mezí pro typ (A), využívající dualitu, uvedl za předpokladu konečnosti množiny optimální hodnoty Rohn v roce 1980 [11]. Oba tvary jsou jistou formou silné věty o dualitě (Věta 4.5), ale zejména zaměňují pořadí maximalizace a minimalizace při určení dolní meze a maximalizací při určení horní meze.

Věta 4.7 (Rohn, 1980)**.** *Mějme ILP typu (A). Nechť* $\underline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ *je konečná, pak platí*

$$\underline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \max\left\{(\min_{b \in \boldsymbol{b}} b^\top y) \mid \forall A \in \boldsymbol{A}, \forall c \in \boldsymbol{c} : A^\top y \leq c\right\}. \tag{4.1}$$

Důkaz. Viz [11] nebo [14]. □

Věta 4.8 (Rohn, 2006)**.** *Mějme ILP typu (A). Nechť* $\overline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ *je konečná, pak platí*

$$\overline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \max\left\{(\max_{b \in \boldsymbol{b}} b^\top y) \mid \exists A \in \boldsymbol{A}, \exists c \in \boldsymbol{c} : A^\top y \leq c\right\}. \tag{4.2}$$

Důkaz. Viz [14]. □

Všimněme si, že pro určení dolní meze uvažujeme pouze silná řešení soustavy $\boldsymbol{A}^\top y \leq \boldsymbol{c}$, zatímco pro určení horní meze jsou potřeba i slabá řešení.

V tomto vyjádření mezí najdeme řešení y a ke každému z nich zvolíme vhodné $b \in \boldsymbol{b}$. Ve vyjádření mezí pomocí silné duality (Věta 4.5) zvolíme pevné $b \in \boldsymbol{b}$ a k němu vybereme vhodné y z dané množiny řešení.

Zamysleme se, proč je nutný předpoklad konečnosti mezí. V následující větě ukážeme, že konečnost je ve větě 4.8 příliš silným předpokladem a lze zmírnit.

Věta 4.9. *Mějme ILP typu (A). Pak platí: zadané ILP splňuje alespoň jednu z následujících vlastností*

(i) má silně nulový duality gap

(ii) obsahuje instanci, ve které primární program je nepřípustný a duální je neomezený.

právě tehdy, když je splněna rovnost

$$\overline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \max\left\{(\max_{b \in \boldsymbol{b}} b^\top y) \mid \exists A \in \boldsymbol{A}, \exists c \in \boldsymbol{c} : A^\top y \leq c\right\}. \tag{4.3}$$

Důkaz. Uvědomíme si, že platí

$$\begin{aligned} &\max\left\{(\max_{b \in \boldsymbol{b}} b^\top y) \mid \exists A \in \boldsymbol{A}, \exists c \in \boldsymbol{c} : A^\top y \leq c\right\} \\ &= \max_{A \in \boldsymbol{A},\, b \in \boldsymbol{b},\, c \in \boldsymbol{c}} \left\{\max b^\top y \mid A^\top y \leq c\right\} = \overline{g}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}). \end{aligned}$$

Díky tomu stačí zabývat se rovností $\overline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \overline{g}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

Nejprve ukážeme, že z předpokladů (i) nebo (ii) plyne rovnost (4.3). Za předpokladu (i) platí rovnost (4.3) ze silné intervalové duality, věta 4.5. Za předpokladu (ii) platí rovnost triviálně, neboť $\overline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \infty = \overline{g}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

Obrácenou implikaci budeme dokazovat obměnou. Předpokládejme, že ani jeden z předpokladů neplatí. Z negace předpokladu (i) plyne, že musí existovat instance $(A_1,\ b_1,\ c_1)$ splňující $f(A_1,\ b_1,\ c_1) = \infty$, $g(A_1,\ b_1,\ c_1) = -\infty$. Tedy $\overline{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \infty$. Důkaz dále rozdělíme na jednotlivé případy podle horní meze optimální hodnoty duálu:

1. $\overline{g}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \infty$: Tuto možnost vylučuje negace předpokladu (ii).

2. $\overline{g}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = r \in \mathbb{R}$: Rovnost (4.3) neplatí, neboť $\infty \neq r$.

3. $\overline{g}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -\infty$: Rovnost neplatí, ILP nutně obsahuje pouze instance, kdy jsou primární i duální programy nepřípustné (tato možnost může nastat, viz Př. 4.1).

Tedy rovnost (4.3) není splněna, čímž je dokázána obměna, a tedy i platnost obrácené implikace. □

Další charakterizaci mezí a vztahu duálních programů ukázal Serafini v [16].

Věta 4.10 (Serafini, 2005)**.** *Vyskytuje-li se interval v ILP typu (A) pouze u matice, tj. ILP je tvaru* $\boldsymbol{A}x = b, x \geq 0$*, pak platí:*

$$\underline{f} = \min \left\{ c^\top x \mid x \in \bigcup_{A \in \boldsymbol{A}} \{x \mid Ax = b, x \geq 0\} \right\} = \tag{4.4}$$

$$= \max \left\{ b^\top y \mid y \in \bigcap_{A \in \boldsymbol{A}} \{y \mid A^\top y \leq c\} \right\} = \underline{g} \tag{4.5}$$

Důkaz. Viz [16]. □

Opět si můžeme všimnout, že v prvním výrazu (4.4) se uvažují slabá řešení, zatímco ve druhém výrazu (4.5) se uvažují silná řešení. Rovnost pro dolní mez primárního programu, $\underline{f} = \max\left\{b^\top y \mid y \in \bigcap_{A\in\boldsymbol{A}}\{y \mid A^\top y \leq c\}\right\}$, je pouze jiným zápisem rovnosti 4.1 pro degenerované intervaly $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$.

První část (4.4) lze rozšířit pro obecný typ (Věta 4.11), zatímco část s průnikem (4.5) obecně neplatí (Př. 4.4), neboť je daleko více restriktivní.

Příklad 4.4. Pro vyvrácení obecné platnosti druhé části (4.5) Věty 4.10 uvažme typ (B) mající v duálu rovnosti. Aby platila obdobná charakterizace dolní meze, muselo by být y silné řešení, což je pro rovnice velmi omezující podmínka.

Uvažme ILP následujícího tvaru a jeho duál

$$\begin{array}{cc} \min -x & \max y \\ [1,2]x \leq 1 & [1,2]^\top y = -1, y \leq 0 \end{array}$$

Platí $g([1,2],1,-1) = [-1,-0.5] = f([1,2],1,-1)$. Soustava $[1,2]^\top y = -1$ nemá žádné silné řešení, tedy

$$\max\left\{y^\top \mid y \in \bigcap_{A\in[1,2]} \{y \mid A^\top y = -1, y \leq 0\}\right\} = \max\{y^\top \mid y \in \emptyset\} = -\infty \neq \underline{g}.$$

A neplatí ani rovnost mezi oběma výrazy

$$\min\left\{ -x \mid x \in \bigcup_{A\in[1,2]} \{x \mid Ax \leq 1\}\right\} = -1 \neq -\infty.$$

Věta 4.11. *Pro libovolný ILP*

$$\min \boldsymbol{c}^\top x \text{ kde } x \in \mathcal{M}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$$

a jeho duál

$$\max \boldsymbol{b}^\top y \text{ kde } y \in \mathcal{N}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{c})$$

platí

$$\underline{f} = \min_{c \in \boldsymbol{c}} \left\{ c^\top x \mid x \in \bigcup_{A \in \boldsymbol{A}, b \in \boldsymbol{b}} \{x \mid x \in \mathcal{M}(A, b)\} \right\} \tag{4.6}$$

$$\overline{g} = \max_{b \in \boldsymbol{b}} \left\{ b^\top y \mid y \in \bigcup_{A \in \boldsymbol{A}, c \in \boldsymbol{c}} \{x \mid x \in \mathcal{N}(A, c)\} \right\}. \tag{4.7}$$

Důkaz. Obě rovnosti získáme drobným upravením definice. Z definice víme

$$\underline{f} = \inf_{A \in \boldsymbol{A},\, b \in \boldsymbol{b},\, c \in \boldsymbol{c}} \left\{ \min c^\top x \mid x \in \mathcal{M}(A, b) \right\}.$$

Dle Věty 3.9 víme, že dolní mez se vždy nabývá v nějaké hodnotě z množiny optimální hodnoty, tedy infimum je v tomto případě rovno minimu. Tedy

$$\begin{aligned} \underline{f} &= \min_{A \in \boldsymbol{A},\, b \in \boldsymbol{b},\, c \in \boldsymbol{c}} \left\{ \min c^\top x \mid x \in \mathcal{M}(A, b) \right\} \\ &= \min_{c \in \boldsymbol{c}} \left\{ \min_{A \in \boldsymbol{A},\, b \in \boldsymbol{b}} c^\top x \mid x \in \mathcal{M}(A, b) \right\} \\ &= \min_{c \in \boldsymbol{c}} \left\{ \min c^\top x \mid x \in \bigcup_{A \in \boldsymbol{A},\, b \in \boldsymbol{b}} \{x \mid x \in \mathcal{M}(A, b)\} \right\}. \end{aligned}$$

Dvě minima můžeme sloučit pod jedno minimum

$$\underline{f} = \min_{c \in \boldsymbol{c}} \left\{ c^\top x \mid x \in \bigcup_{A \in \boldsymbol{A}, b \in \boldsymbol{b}} \{x \mid x \in \mathcal{M}(A, b)\} \right\},$$

čímž získáme rovnost (4.6). Obdobně ukážeme rovnost (4.7) pro horní hranici. □

Z důkazu předchozí věty lze nahlédnout, proč nemůžeme obdobně zapsat horní hranici primárního programu $\overline{f}$ a dolní hranici duálního programu $\underline{g}$. U těchto hranic bychom nemohli zaměnit pořadí intervalů a sloučit minimum a maximum dohromady.

Věta 4.10 uvažovala typ (A), můžeme využít dualitního vztahu mezi typem (A) a typem (B) a odvodit podobnou větu pro typ (B).

Věta 4.12. *Vyskytuje-li se interval v ILP typu (B) pouze u matice, tj. ILP je tvaru $\boldsymbol{A}x \leq b$, pak platí:*

$$\overline{f} = \min \left\{ b^\top y \mid y \in \bigcap_{A \in \boldsymbol{A}} \{y \mid A^\top y \leq c\} \right\} = \tag{4.8}$$

$$= \max \left\{ c^\top x \mid x \in \bigcup_{A \in \boldsymbol{A}} \{x \mid Ax = b,\, x \geq 0\} \right\} = \overline{g} \tag{4.9}$$

Důkaz. Mějme primární ILP typu (B) a jemu příslušný duální ILP

$$\begin{aligned}&\min c^\top x \mid \boldsymbol{A}x \le b,\\&\max b^\top y \mid \boldsymbol{A}^\top y = c,\ y \le 0.\end{aligned}$$

A dále mějme ILP typu (A) a jemu příslušný duální ILP

$$\begin{aligned}&\min c'^\top x \mid \boldsymbol{A'}x = b',\ x \ge 0,\\&\max b'^\top y \mid \boldsymbol{A'}^\top y \le c',\end{aligned}$$

pro který definujeme hodnoty $\boldsymbol{A'} := \boldsymbol{A}^\top$, $b' := -c$, $c' := b$.

Pro uvedené ILP typu (A) platí z věty 4.10 rovnost

$$\begin{aligned}\min\left\{c'^\top x \mid x \in \bigcup_{A'\in\boldsymbol{A'}} \{x \mid A'x = b',\ x \ge 0\}\right\} =\\ = \max\left\{b'^\top y \mid y \in \bigcap_{A'\in\boldsymbol{A'}} \{y \mid A'^\top y \le c'\}\right\}.\end{aligned}$$

Díky platnosti vztahu $\min \mathcal{A} = -\max -\mathcal{A}$ získáme rovnost

$$\begin{aligned}\max\left\{-c'^\top x \mid x \in \bigcup_{A'\in\boldsymbol{A'}} \{x \mid A'x = b',\ x \ge 0\}\right\} =\\ = \min\left\{-b'^\top y \mid y \in \bigcap_{A'\in\boldsymbol{A'}} \{y \mid A'^\top y \le c'\}\right\}.\end{aligned}$$

Pomocí výše definované substituce $\boldsymbol{A'} := \boldsymbol{A}^\top$, $b' := -c$, $c' := b$ přepíšeme uvedený výraz na výraz

$$\begin{aligned}\max\left\{-b^\top x \mid x \in \bigcup_{A\in\boldsymbol{A}} \{x \mid A^\top x = -c, x \ge 0\}\right\} =\\ = \min\left\{-(-c^\top y) \mid y \in \bigcap_{A\in\boldsymbol{A}} \{y \mid Ay \le b\}\right\}.\end{aligned}$$

Tedy změnou znaménka u x a přejmenováním proměnných získáme vztah

$$\begin{aligned}\max\left\{b^\top x \mid x \in \bigcup_{A\in\boldsymbol{A}} \{x \mid A^\top x = c, x \le 0\}\right\} =\\ = \min\left\{c^\top y \mid y \in \bigcap_{A\in\boldsymbol{A}} \{y \mid Ay \le b\}\right\}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Dokázali jsme rovnost mezi výrazy (4.8) a (4.9). Ještě potřebujeme dokázat, že jsou dané výrazy rovné horním mezím množin optimálních hodnot.

Z předchozí věty (Věta 4.10) víme, že

$$\overline{g} = \max\left\{b^\top y \mid y \in \bigcup_{A\in\boldsymbol{A}} \{A^\top y = c,\ y \le 0\}\right\},$$

což je přímo rovnost (4.8). Zbývá dokázat rovnost pro horní mez primárního programu.

Pokud je v každé instanci našeho ILP duality gap nulový, dostaneme $\overline{f} = \overline{g}$ dle Věty 4.5. Tedy díky platnosti (4.4) a (4.10) platí

$$\overline{f} = \min \left\{ b^\top y \mid y \in \bigcap_{A \in \boldsymbol{A}} \{ y \mid A^\top y \le c \} \right\}. \tag{4.11}$$

Pokud duality gap není nulový, musí existovat instance (A_1, b, c), $A_1 \in \boldsymbol{A}$, pro kterou jsou primární i duální program nepřípustné, speciálně $f(A_1, b, c) = \infty$, z čehož plyne $\overline{f}(\boldsymbol{A}, b, c) = \infty$. Zároveň neexistuje silné řešení, tedy

$$\min \left\{ b^\top y \mid y \in \bigcap_{A \in \boldsymbol{A}} \{ y \mid A^\top y \le c \} \right\} = \min \emptyset = \infty.$$

Rovnost (4.5) tedy platí vždy, nezávisle na duality gapu. □

Závěr

Nejprve jsme se zaměřili na množinu optimálních hodnot intervalového lineárního programu. Podařilo se shrnout základní poznatky o jejích mezích pro tři konkrétní používané typy a dále i pro obecný typ intervalového lineárního programu a ukázat přehled možných tvarů množiny optimálních hodnot. Stále však zůstává nezodpovězena otázka, zda může být množina optimálních hodnot sjednocením intervalů, z nichž některé jsou otevřené nebo polouzavřené.

Dalším tématem práce byla dualita. Uvedli jsme formulaci silné a slabé intervalové duality pro jakýkoli intervalový lineární program. Kromě klasického tvaru silné duality jsme uvedli další dvě formy formulované pro meze množiny optimálních hodnot intervalového lineárního programu s rovnostmi a nezápornými proměnnými. Obě věty se povedlo částečně rozšířit. U Serafiniho věty by mohlo být zajímavé zjistit, zda podobná formulace platí také pro zbývající třetí typ intervalového lineárního programu.

S dualitou úzce souvisí duality gap. Na příkladech jsme ukázali, jakých hodnot může nabývat v jednom intervalovém lineárním programu, a dále se podařilo ukázat pár jednoduchých nutných a postačujících podmínek pro silně nulový duality gap využívajících hranice množiny optimálních hodnot nebo silnou a slabou přípustnost intervalového lineárního programu. Předmětem dalšího výzkumu by mohlo být nalezení silnějších podmínek, alespoň pro speciální případy. Vyvrátili jsme vliv nesouvislé množiny optimálních hodnot na silnou nulovost duality gapu. K úplnému dokončení otázky vztahu mezi souvislostí množiny optimálních hodnot a nulovostí duality gapu je třeba ukázat nebo vyvrátit, zda má každý intervalový lineární program se souvislou, více než jednoprvkovou množinou optimálních hodnot vždy silně nulový duality gap.

Seznam použité literatury

[1] Beeck, H. (1978). Linear programming with inexact data. Technický report TUM-ISU-7830, Technical University of Munich, Munich.

[2] Gabrel, V., Murat, C. a Remli, N. (2010). Linear programming with interval right hand sides. *Int. Trans. Oper. Res.*, **17**(3), 397–408.

[3] Hladík, M. (2012). Interval linear programming: A survey. In Mann, Z. A., editor, *Linear Programming – New Frontiers in Theory and Applications*, kapitola 2, strany 85–120. Nova Science Publishers, New York.

[4] Hladík, M. (2016). Učební text k předmětu Intervalové metody (NOPT051). Nepublikováno.

[5] Horáček, J. (2011). Přeurčené soustavy intervalových lineárních rovnic. Diplomová práce, Matematicko-fyzikální fakulta University Karlovy.

[6] Machost, B. (1970). Numerische Behandlung des Simplexverfahrens mit intervallanalytischen Methoden. Technický report 30, Berichte der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn.

[7] Matoušek, J. a Gärtner, B. (2007). *Understanding and Using Linear Programming.* Universitext. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[8] Moore, R. E., Kearfott, R. B. a Cloud, M. J. (2009). *Introduction to Interval Analysis.* SIAM, Philadelphia, PA.

[9] Neumaier, A. (1990). *Interval Methods for Systems of Equations.* Cambridge University Press, Cambridge.

[10] Padberg, M. W. a Alevras, D. (2001). *Linear Optimization and Extensions.* Universitext. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[11] Rohn, J. (1980). Duality in interval linear programming. In Nickel, K., editor, *Interval mathematics, Proc. Int. Symp., Freiburg, 1980.*, strany 521–529, New York, 1980. Academic Press.

[12] Rohn, J. (1995). NP-hardness results for some linear and quadratic problems. Technický Report 619, Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague.

[13] Rohn, J. (2006). Solvability of systems of interval linear equations and inequalities. In Fiedler, M., Nedoma, J., Ramík, J., Rohn, J. a Zimmermann, K., editoři, *Linear optimization problems with inexact data*, kapitola 2, strany 35–77. Springer, New York.

[14] Rohn, J. (2006). Interval linear programming. In Fiedler, M., Nedoma, J., Ramík, J., Rohn, J. a Zimmermann, K., editoři, *Linear optimization problems with inexact data*, kapitola 3, strany 79–100. Springer, New York.

[15] Schrijver, A. (1999). *Theory of Linear and Integer Programming.* Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization. Wiley.

[16] Serafini, P. (2005). Linear programming with variable matrix entries. *Oper. Res. Lett.*, **33**(2), 165–170. doi: 10.1016/j.orl.2004.04.011. URL `http://dx.doi.org/10.1016/j.orl.2004.04.011`.

[17] Wets, R. J.-B. (1985). On the continuity of the value of a linear program and of related polyhedral-valued multifunctions. *Math. Program. Study*, **24**, 14–29.