Lineární a nelineární programování
(Učební text)

J. Rohn[1]

20. května 1997

[1]Sepsání tohoto textu bylo podpořeno z grantu GAUK 195/96

Kapitola 1

Simplexová metoda

1.1 Základní pojmy

Základní problém:
$$\min\{c^T x; Ax = b, x \geq 0\} \tag{P}$$
(historie, motivační příklady atd. - na cvičení)
Značení: $c^T x$, A, A^T, $(AB)^T = B^T A^T$, speciálně $(Ax)^T = x^T A^T$; $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ je-li A čtvercová atd.; $x \geq y$, $x \geq 0$; $x^T y = y^T x$ (komutativnost); je-li $x \geq y$ a $z \geq 0$, potom $z^T x \geq z^T y$. A_j je j-tý sloupec matice A, spec. $(AC)_j = AC_j$; I je jednotková matice, $e_j = I_j$.
Definice: přípustné řešení, optimální řešení, bázické řešení: $\{A_j; x_j > 0\}$ lin. nezávislá

1.2 Bázická řešení

Věta 1 *Má-li (P) optimální řešení, potom má i bázické optimální řešení.*

Důkaz Ukážeme, že ke každému optimálnímu řešení, které není bázické, existuje optimální řešení s *menším* počtem kladných složek. Opakováním dojdeme k bázickému.

1. Nechť x je optimální, není bázické. Nechť $J = \{j; x_j > 0\}$, potom $\sum\limits_{j \in J} A_j y_j = 0$, $y_{j_0} \neq 0$. Dodefinujme $y_j = 0$ pro $j \notin J$, potom $Ay = 0$, a lze předpokládat $y_{j_0} < 0$, jinak $y := -y$. Potom
$$x_j = 0 \Rightarrow j \notin J \Rightarrow y_j = 0. \tag{1.1}$$

2. Dokážeme, že $c^T y = 0$. Sporem:
   a) je-li $c^T y < 0$, zvolme $\alpha > 0$, aby $x + \alpha y \geq 0$ (to je možné vzhledem k (1.1)), potom $A(x + \alpha y) = Ax = b$, tedy $x + \alpha y$ příp., a $c^T(x + \alpha y) = c^T x + \alpha c^T y < c^T x$ spor.
   b) pro $c^T y > 0$ analogicky zvolíme $\alpha < 0$, aby $x + \alpha y \geq 0$, potom $x + \alpha y$ přípustné a $c^T(x + \alpha y) < c^T x$ spor.

3. Položme $x' = x + \varepsilon^* y$, kde

$$\varepsilon^* = \min \left\{ \frac{-x_j}{y_j}; y_j < 0 \right\}.$$

   Rozborem případů vzhledem k (1.1) je $x' \geq 0$, $Ax' = b$, $c^T x' = c^T x$, tedy x' je optimální. Dále $\varepsilon^* = \frac{-x_k}{y_k}$, tj. $x'_k = 0$, $y_k < 0 \Rightarrow k \in J$, ale $x'_j \neq 0 \Rightarrow x_j \neq 0$ & $x_j > 0\ \forall j \in J$, tedy x' má aspoň o 1 kladnou složku méně.

■

Nechť A je matice $m \times n$, $m \leq n$, a nechť $B = (B_1, \dots, B_m)$ je uspořádaná m-tice vzájemně různých čísel z $\{1, \dots, n\}$. Potom symbolem A_B značíme matici

$$A_B = (A_{B_1}, \dots, A_{B_m})$$

tj. $(A_B)_j = A_{B_j}\ \forall j$. Podobně $x_B = (x_{B_1}, \dots, x_{B_m})^T$, tj. $(x_B)_j = x_{B_j}$. Podobně c_B. Pro doplněk $N = \{1, \dots, n\} - \{B_1, \dots, B_m\}$, $N = (N_1, \dots, N_{n-m})$ podobně A_N, x_N, c_N.

Věta 2 *Nechť $m \leq n$ a nechť řádky matice A jsou lineárně nezávislé. Potom x je bázickým přípustným řešením právě když existuje $B = (B_1, \dots, B_m)$ tak, že A_B je regulární, $A_B x_B = b$ má řešení $x_B \geq 0$, a $x_N = 0$.*

Důkaz $\Rightarrow$ Je-li x bázické, je $\{A_j; x_j > 0\}$ lineárně nezávislá a lze ji doplnit na m-prvkovou bázi. Nechť B jsou indexy prvků této báze, potom A_B je regulární, $Ax = A_B x_B = b$, $x_B \geq 0$, $x_N = 0$. $\Leftarrow$: Jestliže to platí, potom $\{A_j; x_j > 0\} \subseteq \{A_j; j \in B\}$, tedy sloupce lineárně nezávislé a řešení je bázické. ■

Značení Pro $B = (B_1, \dots, B_n)$, jestliže A_B je regulární a $A_B y = b$ má řešení $y \geq 0$, potom definujeme x^B předpisem

$$\begin{aligned} (x^B)_B &= y \\ (x^B)_N &= 0 \end{aligned}$$

Jinak (je-li A_B singulární nebo $y \ngeq 0$) není x^B definováno.
Upozornění: x^B nezávisí na uspořádání množiny B.

Příklad Pro

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 15 \end{aligned}$$

je $x^{(1,3)}$ dáno požadavky

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 6x_3 &= 15 \end{aligned}$$

z toho

$$x^{(1,3)} = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)^T$$

a podobně

$$\begin{aligned} x^{(1,2)} &= (0,3,0)^T \\ x^{(2,3)} &= (0,3,0)^T \end{aligned}$$

Upozornění: z $a \geq b$, $x \geq 0$ plyne $a^T x \geq b^T x$. Rovněž $(AC)_s = AC_s$.

1.3 Kritérium optimality a neomezenosti

Věta 3 *(kritérium optimality). Nechť pro jisté B platí*

$$c^T - c_B^T A_B^{-1} A \geq 0^T.$$

Potom x^B je optimální řešení úlohy (P).

Důkaz Nechť x je libovolné přípustné řešení úlohy (P). Potom z

$$c^T \geq c_B^T A_B^{-1} A$$

přenásobením plyne

$$c^T x \geq c_B^T A_B^{-1} A x = c_B^T A_B^{-1} b = c_B^T x_B^B = c_B^T x_B^B + c_N^T x_N^B = c^T x^B,$$

tedy x^B je optimální. ∎

Pro danou (pevně zvolenou) bázi B označíme

$$\begin{aligned}\overline{A} &= A_B^{-1}A = (\overline{a}_{ij})\\ \bar{b} &= x_B^B = A_B^{-1}b = (\bar{b}_i)\\ \bar{c} &= c^T - c_B^T A_B^{-1}A = (\bar{c}_j)\\ \overline{h} &= -c_B^T x_B^B = -c_B^T A_B^{-1} b.\end{aligned}$$

Potom kritérium optimality je $\bar{c} \geq 0^T$. Platí $\bar{c}_B = c_B^T - c_B^T A_B^{-1} A_B = 0_B^T$.

Věta 4 *(kritérium neomezenosti). Nechť pro dané B existuje s tak, že $\bar{c}_s < 0$ a $\overline{A}_s \leq 0$ (tj. $\overline{a}_{js} \leq 0\ \forall j$). Potom*

$$\inf\{c^T x; Ax = b, x \geq 0\} = -\infty,$$

tj. hodnota účelové funkce není na množině přípustných řešení zdola omezená.

Důkaz Protože $\bar{c}_s < 0$, je $s \notin B$. Označme $z = \overline{A}_s = (A_B^{-1}A)_s = A_B^{-1}A_s \leq 0$, potom $-A_B z + A_s = 0$, tedy zavedeme-li y vztahy $y_B = -z$, $y_s = +1$, $y_j = 0$ jinak, je $Ay = 0$, $y \geq 0$, $y \neq 0$, takže $A(x^B + \alpha y) = b$, $x^B + \alpha y \geq 0$ pro každé $\alpha \geq 0$, a platí

$$\begin{aligned} c^T(x^B + \alpha y) &= c^T x^B + \alpha(c^T y) = c^T x^B + \alpha\left(c_B^T y_B + c_s y_s + \sum_{j \notin B, j \neq s} c_j y_j\right) = \\ &= c^T x^B + \alpha\left(c_s - c_B^T A_B^{-1} A_s\right) = c^T x^B + \alpha \bar{c}_s,\end{aligned}$$

tedy

$$c^T(x^B + \alpha y) = c^T x^B + \alpha \bar{c}_s \stackrel{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

a tedy $\inf\{\dots\} = -\infty$. ∎

1.4 Simplexová tabulka

Připomeňme pojem elementárních operací:

1) násobení i-tého řádku číslem $\alpha \neq 0$,

2) násobení i-tého řádku číslem α a přičtení k jinému řádku $j \neq i$.

Pro $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $\alpha \in R^1$ definujme $P_{ij}(\alpha)$ jako matici, která vznikne z jednotkové matice I nahrazením ji-tého prvku číslem α. Snadno nahlédneme, že elementární operace 1) je ekvivalentní vynásobení zleva maticí $P_{ii}(\alpha)$ pro kterou $\det P_{ii}(\alpha) = \alpha \neq 0$, a elementární operace 2) je ekvivalentní vynásobení zleva maticí $P_{ij}(\alpha)$ s $\det P_{ij}(\alpha) = 1$. Tedy výsledek $\tilde{A}$ posloupnosti elementárních operací s maticí A lze psát ve tvaru

$$\tilde{A} = P_{i_k j_k}(\alpha_k) \cdot \ldots \cdot P_{i_1 j_1}(\alpha_1) A,$$

a položíme-li $\tilde{P} = P_{i_k j_k}(\alpha_k) \cdot \ldots \cdot P_{i_1 j_1}(\alpha_1)$, je

$$\tilde{A} = \tilde{P} A$$

kde $\tilde{P}$ je regulární matice, neboť $\det \tilde{P} = (\det P_{i_k j_k}(\alpha_k)) \cdot \ldots \cdot (\det P_{i_1 j_1}(\alpha_1)) \neq 0$.

Věta 5 *Nechť matice*

$$\begin{pmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{pmatrix}$$

je elementárními úpravami (včetně posledního řádku, ale s pivoty jen v části A) převedena tak, že v B_j-tém sloupci vznikne j-tý sloupec jednotkové matice ($j = 1, \ldots, m$). Potom má výsledná matice tvar

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \bar{b} \\ \bar{c} & -\overline{h} \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} \overline{A} &= A_B^{-1} A, \\ \bar{b} &= A_B^{-1} b = x_B^B, \\ \bar{c} &= c^T - c_B^T A_B^{-1} A, \\ \overline{h} &= c_B^T x_B^B = c^T x^B. \end{aligned}$$

Důkaz Kdyby některá P_k měla tvar $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \ldots & \alpha \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$, potom by se k i-tému řádku připočítával násobek posledního, což je ve sporu. Proto $P_j = \begin{pmatrix} & 0 \\ & 0 \\ \ldots & \vdots \\ & 1 \end{pmatrix}$ $\forall j$, tedy $P = \begin{pmatrix} & 0 \\ & 0 \\ \ldots & \vdots \\ & 1 \end{pmatrix}$, protože $\begin{pmatrix} & 0 \\ & 0 \\ \ldots & \vdots \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 0 \\ & 0 \\ \ldots & \vdots \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0 \\ & 0 \\ \ldots & \vdots \\ & 1 \end{pmatrix}$ Tedy výsledná matice má tvar

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ y^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & Pb \\ y^T A + c^T & y^T b \end{pmatrix}.$$

Podle předpokladu je $(PA)_{B_j} = PA_{B_j} = P(A_B)_j = (PA_B)_j = I_j \Rightarrow PA_B = I \Rightarrow P = A_B^{-1}$, a $0_B^T = (y^TA + c^T)_B = y^TA_B + c_B^T \Rightarrow y^TA_B = -c_B^T \Rightarrow y^T = -c_B^TA_B^{-1}$, tedy výsledná matice má tvar

$$\begin{pmatrix} A_B^{-1}A & A_B^{-1}b \\ c^T - c_B^TA_B^{-1}A & -c_B^TA_B^{-1}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{b} \\ \overline{c} & -\overline{h} \end{pmatrix}.$$

$\blacksquare$

1.5 Algoritmus

Myšlenka algoritmu: přejít od $B = (B_1, \dots, B_{r-1}, B_r, B_{r+1}, \dots, B_m)$ k $B' = (B_1, \dots, B_{r-1}, s, B_{r+1}, \dots, B_m)$, tj. v s-tém sloupci se má objevit r-tý sloupec jednotkové matice, tedy pivotace s pivotem $\overline{a}_{rs}$.

$$\begin{array}{ccc|c} & \vdots & & \vdots \\ \dots & \overline{a}_{rs} & \dots & \overline{b}_r \\ & \vdots & & \vdots \\ \dots & \overline{a}_{js} & \dots & \overline{b}_j \\ & \vdots & & \vdots \\ \hline \dots & \overline{c}_s & \dots & -\overline{h} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} & \vdots & & \vdots \\ \dots & 1 & \dots & \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \\ & \vdots & & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & \overline{b}_j - \overline{a}_{js}\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \\ & \vdots & & \vdots \\ \hline \dots & 0 & \dots & -\overline{h} - \overline{c}_s\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \end{array}$$

Požadavky:

1. $\overline{a}_{rs} > 0$, aby $\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \geq 0$;
2. zachování bázičnosti
   $\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \geq 0$ (viz 1); $\overline{b}_j - \overline{a}_{js}\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \geq 0$: splněno pro $\overline{a}_{js} \leq 0$

   $$\overline{a}_{js} > 0 : \frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{js}} \geq \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \quad \text{tedy} \quad \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} = \min\left\{\frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{js}}; \overline{a}_{js} > 0\right\}$$

3. klesání úč. funkce:

   $$-\overline{h} - \overline{c}_s\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} = -\left(\overline{h} + \overline{c}_s\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}}\right);$$

   aby klesla, musí být $\overline{c}_s\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \leq 0$, tedy $\overline{c}_s < 0$.

Pravidla pro výběr

$$\bar{c}_s < 0$$

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{js}}; \bar{a}_{js} > 0\right\}, \quad \bar{a}_{rs} > 0.$$

Shrneme-li dosavadní poznatky, můžeme formulovat tento algoritmus:

Algoritmus (simplexová metoda; Dantzig 1947)

opt: $=$ *false; neom:* $=$ *false;*
nalezni výchozí přípustné bázické řešení a sestav tabulku;
repeat

  if $\bar{c} \geq 0$ **then** *opt:* $=$ *true*

  else

    vyber s, aby $\bar{c}_s < 0$;

    if $\overline{A}_s \leq 0$ **then** *neom:* $=$ *true*

    else

      vyber r, aby $\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{js}}; \bar{a}_{js} > 0\right\}, \bar{a}_{rs} > 0$;

      proveď eliminaci s pivotem $\bar{a}_{rs}$;

      $B_r := s$

until *(opt* **or** *neom);*
if *opt* **then** $\{x^B$ je optimální řešení$\}$
else {úloha je neomezená}

(pozn. opt řešení x^B je v tabulce dáno jako $x^B_B = \bar{b}$, $x^B_N = 0$). Výběr r, s nejednoznačný, může se zacyklit. Heuristické pravidlo $\bar{c}_s = \min_j \bar{c}_j < 0$.

1.6 Konečnost simplexového algoritmu

Blandovo pravidlo (Bland 1977)

Výběr s: $s = \min\{j; \bar{c}_j < 0\}$
Výběr r: ze všech r, pro které platí

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{js}}; \bar{a}_{js} > 0\right\}, \quad \bar{a}_{rs} > 0$$

vyber to, pro které má B_r nejmenší hodnotu tj.

$$B_r = \min\left\{B_k; \frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{ks}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{js}}; \bar{a}_{js} > 0\right\},\ \bar{a}_{ks} > 0\right\}$$

Příklad 4×7 (viz výpisy). Zacyklení resp. konečný výpočet.

Cyklem rozumíme konečnou posloupnost kroků simplexového algoritmu, která začíná i končí stejnou bází. Determinističnost Blandova pravidla způsobuje, že se pak cyklus stále opakuje.

Tvrzení V průběhu cyklu:

1. zůstává poslední sloupec beze změny,
2. v každém kroku pro řádek r obsahující pivota platí $\overline{b}_r = 0$

Důkaz Nastává-li cyklus mezi B^1 a B^2, pak $c^T x^{B_1} \geq c^T x' \geq c^T x'' \geq \ldots \geq c^T x^{B_2} = c^T x_1^B \Rightarrow$ všude rovnost. Jelikož $-\overline{h} := -\overline{h} - \frac{\overline{b}_r \overline{c}_s}{\overline{a}_{rs}}$, musí být $\overline{b}_r \overline{c}_s = 0$, a jelikož $\overline{c}_s < 0$, je $\overline{b}_r = 0$. Dále, $\overline{b}_j := \overline{b}_j - \frac{\overline{b}_r \overline{a}_{js}}{\overline{a}_{rs}} = \overline{b}_j$, podobně $\overline{h}$, tedy celý poslední sloupec tabulky se nemění. ■

$$
\begin{array}{|ccc|c}
 & \vdots & & \vdots \\
\ldots & \overline{a}_{rs} & \ldots & \overline{b}_r \\
 & \vdots & & \vdots \\
\ldots & \overline{a}_{js} & \ldots & \overline{b}_j \\
 & \vdots & & \vdots \\
\hline
\ldots & \overline{c}_s & \ldots & -\overline{h}
\end{array}
$$

Věta 6 *Simplexový algoritmus je při použití Blandova pravidla konečný.*

Důkaz Předpokládejme, že se pro jistou úlohu zacyklí. Označme T množinu všech indexů s, vstupujících do báze během cyklu, a nechť $q = \max T$. Nechť q vstupuje a vystupuje v tabulkách

$$
\begin{array}{c|c|c}
B_0 & \ldots & \vdots \\
\hline
 & \ldots \quad y_q < 0 \quad \ldots &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|ccc|c}
k = B_p & \ldots & \overline{a}_{ps} & \ldots & \overline{b}_p \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
q = B_r & \ldots & \overline{a}_{rs} & \ldots & \overline{b}_r \\
\hline
 & \ldots & \overline{c}_s < 0 & \ldots &
\end{array}
$$

Definujme z předpisem $z_B = \overline{A}_s$ (tj. $z_{B_j} = \overline{a}_{js}\ \forall j$), $z_s = -1$, $z_j = 0$ jinak, tedy $z_B = A_B^{-1} A_s$, $A_B z_B + (-1) A_s = Az = 0$, a máme

$$
\begin{aligned}
yz &= (c^T - c_{B_0} A_{B_0}^{-1} A) z = c^T z = c_B^T z_B + c_s z_s = c_B^T A_B^{-1} A_s - c_s \\
&= -(c_s - c_B^T A_B^{-1} A_s) = -\overline{c}_s > 0,
\end{aligned}
$$

tzn., že existuje k, že $y_k z_k > 0$. $y_k \neq 0 \Rightarrow k \notin B_0$; $z_k \neq 0 \Rightarrow$ buď $k \in B$, nebo $k = s$ tj. buď je v bázi, nebo právě vstupuje $\Rightarrow k \in T$. Dále pro $y_q z_q = y_q \overline{a}_{rs} < 0$, tedy $k \neq q$. Dokážeme, že $q < k$, to bude spor s volbou q.

Protože $y_k z_k > 0$, je buď a) $y_k < 0$, $z_k < 0$, nebo b) $y_k > 0$, $z_k > 0$.

a) Je-li $y_k < 0$, potom k připadalo v úvahu pro vstup, ale nebylo vybráno $\Rightarrow q < k$.

b) Je-li $y_k > 0$, $z_k > 0$, potom $z_k = z_{B_p} = \overline{a}_{ps} > 0$. Protože $y_k > 0$, k nebylo v bázi B_0, ale je v B, tedy muselo vstoupit a tedy $\overline{b}_p = 0$, tj.

$$0 = \frac{\overline{b}_p}{\overline{a}_{ps}} = \min\left\{\frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{js}}; \overline{a}_{js} > 0\right\}.$$

Tedy p bylo vhodné pro výběr, ale nebylo vybráno, tj. podle Blandova pravidla $B_r < B_p$ tj. $q < k$.

V obou případech je $q < k$, tedy jsme nalezli $k \in T$, $k > q$, kde $q = \max T$, a to je spor. ∎

Sestavení výchozí tabulky:

Lze rovnou předpokládat, že $b \geq 0$, jinak pro každé $b_i < 0$ nahradíme rovnici $(Ax)_i = b_i$ rovnicí $-(Ax)_i = -b_i > 0$. Uvažujme pomocnou úlohu

$$\min\{0^T x + e^T x'; Ax + Ix' = b, x \geq 0, x' \geq 0\} \tag{1.2}$$

s počátečním bázickým řešením $x' = b$, $x = 0$. Aby to mělo tvar tabulky, musíme vynulovat část pod x'. Účelová funkce $\geq 0 \Rightarrow$ není neomezená. Tedy po konečně mnoha krocích nalezne optimální řešení a optimální hodnotu h^*.
$h^* > 0 \Rightarrow$ neexistuje bázické př. řešení $\Rightarrow$ algoritmus končí
$h^* = 0 \Rightarrow$ máme př. řešení a z něho lze pokračovat k optimálnímu.

Věta 7 *Pro každou úlohu (P) nastává právě jedna ze tří možností:*

(i) úloha nemá přípustné řešení,

(ii) úloha má optimální řešení,

(iii) účelová funkce je na množině přípustných řešení neomezená zdola

Důkaz Fáze I i II jsou podle Věty 6 konečné a proto po konečném počtu kroků dojde k jednomu ze tří možných zastavení. ∎

1.7 Ukázka zacyklení

1	1.000	0.000	0.000	0.000	0.600	−6.400	4.800	0.000
2	0.000	1.000	0.000	0.000	0.200	−1.800	0.600	0.000
3	0.000	0.000	1.000	0.000	0.400	−1.600	0.200	0.000
4	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
	0.000	0.000	0.000	0.000	−0.400	−0.400	1.800	0.000

5	1.667	0.000	0.000	0.000	1.000	−10.667	8.000	0.000
2	−0.333	1.000	0.000	0.000	0.000	0.333	−1.000	0.000
3	−0.667	0.000	1.000	0.000	0.000	2.667	−3.000	0.000
4	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
	0.667	0.000	0.000	0.000	0.000	−4.667	5.000	0.000

5	−9.000	32.000	0.000	0.000	1.000	0.000	−24.000	0.000
6	−1.000	3.000	0.000	0.000	0.000	1.000	−3.000	0.000
3	2.000	−8.000	1.000	0.000	0.000	0.000	5.000	0.000
4	1.000	−3.000	0.000	1.000	0.000	0.000	3.000	1.000
	−4.000	14.000	0.000	0.000	0.000	0.000	−9.000	0.000

5	0.600	−6.400	4.800	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
6	0.200	−1.800	0.600	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
7	0.400	−1.600	0.200	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000
4	−0.200	1.800	−0.600	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
	−0.400	−0.400	1.800	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

1	1.000	−10.667	8.000	0.000	1.667	0.000	0.000	0.000
6	0.000	0.333	−1.000	0.000	−0.333	1.000	0.000	0.000
7	0.000	2.667	−3.000	0.000	−0.667	0.000	1.000	0.000
4	0.000	−0.333	1.000	1.000	0.333	0.000	0.000	1.000
	0.000	−4.667	5.000	0.000	0.667	0.000	0.000	0.000

1	1.000	0.000	-24.000	0.000	-9.000	32.000	0.000	0.000
2	0.000	1.000	-3.000	0.000	-1.000	3.000	0.000	0.000
7	0.000	0.000	5.000	0.000	2.000	-8.000	1.000	0.000
4	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
	0.000	0.000	-9.000	0.000	-4.000	14.000	0.000	0.000

1	1.000	0.000	0.000	0.000	0.600	-6.400	4.800	0.000
2	0.000	1.000	0.000	0.000	0.200	-1.800	0.600	0.000
3	0.000	0.000	1.000	0.000	0.400	-1.600	0.200	0.000
4	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.400	-0.400	1.800	0.000

5	1.667	0.000	0.000	0.000	1.000	-10.667	8.000	0.000
2	-0.333	1.000	0.000	0.000	0.000	0.333	-1.000	0.000
3	-0.667	0.000	1.000	0.000	0.000	2.667	-3.000	0.000
4	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
	0.667	0.000	0.000	0.000	0.000	-4.667	5.000	0.000

Výběr s: minimální prvek v krit. řádku, v případě rovnosti první zleva
Výběr r: podle obvyklého pravidla, v případě rovnosti první shora

1	1.000	0.000	0.000	0.000	0.600	-6.400	4.800	0.000
2	0.000	1.000	0.000	0.000	0.200	-1.800	0.600	0.000
3	0.000	0.000	1.000	0.000	0.400	-1.600	0.200	0.000
4	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.400	-0.400	1.800	0.000

5	1.667	0.000	0.000	0.000	1.000	-10.667	8.000	0.000
2	-0.333	1.000	0.000	0.000	0.000	0.333	-1.000	0.000
3	-0.667	0.000	1.000	0.000	0.000	2.667	-3.000	0.000
4	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
	0.667	0.000	0.000	0.000	0.000	-4.667	5.000	0.000

5	-9.000	32.000	0.000	0.000	1.000	0.000	-24.000	0.000
6	-1.000	3.000	0.000	0.000	0.000	1.000	-3.000	0.000
3	2.000	-8.000	1.000	0.000	0.000	0.000	5.000	0.000
4	1.000	-3.000	0.000	1.000	0.000	0.000	3.000	1.000
	-4.000	14.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-9.000	0.000

5	0.000	-4.000	4.500	0.000	1.000	0.000	-1.500	0.000
6	0.000	-1.000	0.500	0.000	0.000	1.000	-0.500	0.000
1	1.000	-4.000	0.500	0.000	0.000	0.000	2.500	0.000
4	0.000	1.000	-0.500	1.000	0.000	0.000	0.500	1.000
	0.000	-2.000	2.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000

5	0.000	0.000	2.500	4.000	1.000	0.000	0.500	4.000
6	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
1	1.000	0.000	-1.500	4.000	0.000	0.000	4.500	4.000
2	0.000	1.000	-0.500	1.000	0.000	0.000	0.500	1.000
	0.000	0.000	1.000	2.000	0.000	0.000	2.000	2.000

Optimální řešení: 4 1 0 0 4 1 0

Výpočet příkladu na zacyklení Blandovým pravidlem. Liší se od 4. tabulky.

1.8 Množina optimálních řešení

Věta 8 *Nechť v tabulce*

$$\begin{array}{|c|c} \overline{A} & \bar{b} \\ \hline \bar{c} \geq 0 & -\bar{h} \end{array}$$

je nalezeno optimální řešení. Potom množina všech optimálních řešení je popsána soustavou

$$\begin{aligned} \overline{A}x^* &= \bar{b} \\ \bar{c}x^* &= 0 \\ x^* &\geq 0. \end{aligned}$$

Důkaz $\Rightarrow$ Je-li x^* optimální řešení, potom je přípustné, tedy z $Ax^* = b$ plyne $\overline{A}x^* = A_B^{-1}Ax^* = A_B^{-1}b = \bar{b}$, a $\bar{c}x^* = (c^T - c_B^T A_B^{-1}A)x^* = c^T x^* - c_B^T A_B^{-1} b =$

$c^T x^* - \overline{h} = 0$. $\Leftarrow$ Naopak, z $\overline{A}x^* = \overline{b}$ plyne $Ax^* = b$, tedy x^* je přípustné, a $\overline{c}x^* = c^T x^* - c_B^T x_B^B = c^T x^* - \overline{h} = 0$ tedy $c^T x^* = \overline{h}$, kde $\overline{h}$ je optimální hodnota $\Rightarrow x^*$ optimální. ∎

Věta 9 *Je-li v poslední tabulce*

$$\overline{c}_j > 0 \quad \text{pro všechna } \ j \in N$$

[tj. $\overline{c}_N > 0$], potom úloha má právě jedno optimální řešení.

Důkaz Každé optimální řešení x^* splňuje $\overline{c}x^* = \sum_{j \in N} c_j x_j^* = 0$, tedy podle předpokladu je $x_j^* = 0 \ \forall j \in N$. To znamená, že pro poslední bázi B je $Ax^* = A_B x_B^* + A_N x_N^* = A_B x_B^* = b$, tedy $x_B^* = A_B^{-1} b$ a $x_N^* = 0$, tj. $x^* = x^B$ a řešení je jediné. ∎

Kapitola 2

Teorie duality

K úloze

$$\min\{c^T x; Ax = b, x \geq 0\} \tag{P}$$

uvažujme duální úlohu

$$\max\{b^T y; A^T y \leq c\}. \tag{D}$$

2.1 Věta o dualitě

Věta 10 *(slabá věta o dualitě). Jsou-li x, y přípustná řešení (P), (D), potom platí*

$$c^T x \geq b^T y.$$

Navíc, platí-li pro jistou dvojici přípustných řešení

$$c^T x^* = b^T y^*,$$

potom x^* je optimální řešení (P) a y^* je optimální řešení (D).

Důkaz Platí

$$c^T x = x^T c \geq x^T A^T y = (Ax)^T y = b^T y$$

Je-li $c^T x^* = b^T y^*$, potom pro každé přípustné řešení x je $c^T x \geq b^T y^* = c^T x^*$, tedy x^* je optimální řešení (P), a $\forall$ přípustné řešení y je $b^T y^* = c^T x^* \geq b^T y$, tedy y^* je optimální řešení (D). ∎

Věta 11 *Je-li x^B bázické optimální řešení nalezené v posledním kroku simplexového algoritmu, potom*

$$y^* = (A_B^T)^{-1} c_B$$

je optimálním řešením (D) a platí $c^T x^B = b^T y^*$.

Důkaz V poslední tabulce je $\bar{c} := c^T - c_B^T A_B^{-1} A \geq 0$, tedy $c^T - \left[(A_B^T)^{-1} c_B\right]^T A = c^T - y^{*T} A \geq 0$, tj. $A^T y^* \leq c$, y^* je přípustné řešení (D). Dále $c^T x^B = c_B^T x_B^B = c_B^T A_B^{-1} b = \left[(A_B^T)^{-1} c_B\right]^T b = y^{*T} b = b^T y^*$ a podle Věty 10 je y^* optimální řešení (D). ∎

Věta 12 *(o dualitě). Úloha (P) má optimální řešení, právě když úloha (D) má optimální řešení. V tom případě mají obě stejnou optimální hodnotu.*

Důkaz

1. Má-li (P) optimální řešení, potom podle Věty 6 simplexová metoda po konečně mnoha krocích najde optimální tabulku, v ní lze podle Věty 11 nalézt optimální řešení (D) a optimální hodnoty se rovnají.

2. Naopak, má-li

$$\max\{b^T y; A^T y \leq c\} \tag{D}$$

optimální řešení, potom i

$$\min\{-b^T y_1 + b^T y_2 + 0^T y_3; A^T y_1 - A^T y_2 + y_3 = c, y_1, y_2, y_3 \geq 0\}$$

má optimální řešení, tedy ho má i úloha

$$\min\left\{\begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; (A^T, -A^T, I)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq 0\right\}$$

a podle toho, co jsme dokázali dříve, má optimální řešení k ní duální úloha

$$\max\left\{c^T x'; \begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \end{pmatrix} x' \leq \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

tj.

$$\max\left\{c^T x'; Ax' = -b, x' \leq 0\right\}$$

a tedy má optimální řešení i úloha ($x := -x'$)

$$\min\left\{c^T x; Ax = b, x \geq 0\right\}.$$

■

Věta 13 *Jsou-li obě úlohy (P), (D) přípustné, potom obě mají optimální řešení a mají stejnou optimální hodnotu.*

Důkaz (P) je přípustná a podle Věty 10 je $c^T x \geq b^T y_0$ $\forall$ příp. ř. x, tedy je omezená zdola, tedy podle Věty 7 má optimální řešení, proto podle Věty 12 i (D) má optimální řešení a mají stejnou optimální hodnotu. ■

Věta 14 *Vektory x, y jsou optimální řešení úloh (P), (D) právě když splňují soustavu*

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A^T y &\leq c, \\ c^T x &= b^T y, \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Důkaz Jsou-li optimální řešení, potom splňují soustavu podle Věty 12. Naopak, platí-li to, potom jsou to přípustná řešení pro která $c^T x = b^T y$ a podle Věty 10 jsou to optimální řešení. ■

Věta 15 *Jestliže (P) má v poslední tabulce optimální řešení x^B a platí $x^B_B > 0$, potom (D) má jediné optimální řešení $y^* = (A^T_B)^{-1} c_B$.*

Důkaz Pro libovolné optimální řešení y platí $c^T x^B = b^T y = x^{BT} A^T y \Rightarrow \underbrace{x^{BT}}_{>0} \underbrace{(c - A^T y)}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow (c - A^T y)_B = c^T_B - y^T A_B = 0 \Rightarrow A^T_B y = c_B \Rightarrow y = (A^T_B)^{-1} c_B$; o tomto vektoru víme z Věty 11, že je optimální. ■

2.2 Úlohy s nerovnostmi

Uvažujme úlohy

$$\min\{c^T x; Ax \geq b, x \geq 0\} \tag{P$'$}$$

$$\max\{b^T y; A^T y \leq c, y \geq 0\} \tag{D$'$}$$

Věta 16 *Slabá věta o dualitě (Věta 10) platí ve stejném znění i pro úlohy (P'), (D').*

Důkaz $c^T x = x^T c \geq x^T A^T y = (Ax)^T y \geq b^T y$; podobně dál. ■

Věta 17 *Věta o dualitě (Věta 12) platí ve stejném znění i pro úlohy (P'), (D').*

Důkaz (P') má optimální řešení

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \min\left\{c^T x + 0^T x'; Ax - x' = b, x \geq 0, x' \geq 0\right\} \quad \text{má optimální řešení} \\
&\overset{V12}{\Leftrightarrow} \quad \max\left\{b^T y; \begin{pmatrix} A^T \\ -I \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{má optimální řešení} \\
&\Leftrightarrow \quad \max\left\{b^T y; A^T y \leq c, y \geq 0\right\} \quad \text{má optimální řešení, což je (D').}
\end{aligned}$$

■

Věta 18 *(podmínky optimality lineárního programování). Přípustná řešení x, y úloh (P'), (D') jsou jejich optimální řešení, právě když*

$$\begin{aligned}
x^T(c - A^T y) &= 0, \\
y^T(Ax - b) &= 0.
\end{aligned}$$

Důkaz $\Rightarrow$ Jsou-li optimální, potom $c^T x = b^T y$ a podle slabé věty (Věta 16) $c^T x = (Ax)^T y = b^T y$, tedy $x^T(c - A^T y) = 0 = y^T(Ax - b)$.
$\Leftarrow$ Naopak, platí-li tyto podmínky, potom $c^T x = x^T A^T y = y^T Ax = b^T y$, a podle Věty 16 jsou to optimální řešení. ■

Co znamená ve složkách:

$$\begin{aligned}
(\forall i) \quad x_i > 0 \quad &\Rightarrow \quad (A^T y)_i = c_i \\
(\forall j) \quad y_j > 0 \quad &\Rightarrow \quad (Ax)_j = b_j
\end{aligned}$$

2.3 Farkasova věta

Věta 19 *(Farkasova věta, Farkasovo lemma) Soustava*

$$\begin{aligned}
Ax &= b, \\
x &\geq 0
\end{aligned}$$

má řešení, právě když platí

$$(\forall y)(A^T y \geq 0 \Rightarrow b^T y \geq 0).$$

Důkaz $\Rightarrow$ Nechť $Ax = b$, $x \geq 0$, $A^T y \geq 0$. Potom $b^T y = y^T b = y^T Ax = (A^T y)^T x \geq 0$.
$\Leftarrow$ Nechť to platí. Uvažujme úlohu

$$\min\left\{0^T x; Ax = b, x \geq 0\right\} \tag{P}$$

a k ní duální úlohu

$$\max\left\{b^T y; A^T y \leq 0\right\}. \tag{D}$$

(D) je přípustná, protože $y = 0$ je přípustné. Dále, účelová funkce je omezená: je-li $A^T y \leq 0$, potom $A^T(-y) \geq 0 \Rightarrow b^T(-y) \geq 0 \Rightarrow b^T y \leq 0$, tedy (D) má optimální řešení, a podle věty o dualitě (Věta 12) má i (P) optimální řešení, $Ax = b$, $x \geq 0$. ■

Důsledek $Ax = b$, $x \geq 0$ nemá *přípustné řešení právě když existuje* y_0 *tak, že* $A^T y_0 \geq 0$ & $b^T y_0 < 0$.

Věta 20 *Je-li úloha (P) přípustná, potom má optimální řešení právě když platí*

$$(\forall x \geq 0)(Ax = 0 \Rightarrow c^T x \geq 0).$$

Důkaz (P) má optimální řešení $\Leftrightarrow$ (D) je přípustná $\Leftrightarrow$ $A^T y \leq c$ má řešení $\Leftrightarrow$ $A^T(y_1 - y_2) + y_3 = c$ má nezáporné řešení $\Leftrightarrow$ $(A^T, -A^T, I)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq 0$ má řešení $\Leftrightarrow (\forall x)\left[\begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \end{pmatrix} x \geq 0 \Rightarrow c^T x \geq 0\right] \Leftrightarrow (\forall x)\left[Ax = 0, x \geq 0 \Rightarrow c^T x \geq 0\right]$.
■

Věta 21 *Je-li (P) přípustná, potom je neomezená právě když* $(\exists x_0 \geq 0)(Ax_0 = 0 \;\&\; c^T x_0 < 0)$.

Důkaz Optimální $\Leftrightarrow \ldots$, neomezená $\Leftrightarrow (\ldots) \Leftrightarrow (\exists x_0 \geq 0)(Ax_0 = 0 \;\&\; c^T x_0 < 0)$.
■

Kapitola 3

Aplikace lineárního programování

3.1 Teorie her

3.1.1 Základní pojmy

Pojmy: čisté strategie, výplatní matice. Příklad: střih, šachy. Smíšené str.: $x \geq 0$, $e^T x = 1$ podobně y. Nechť se hraje N her. Potom pravděpodobnost střetu i-té a j-té str. je $x_i y_j$, počet $x_i y_j N$, výplata $\sum\limits_{ij} a_{ij} x_i y_j N = (x^T A y) N$, průměrný zisk $x^T A y$.

Optimální strategie (pakliže existují)

$$x^T A y^* \leq x^{*T} A y^* \leq x^{*T} A y \quad \forall \text{ smíšené strategie } x, y$$

Především ukážeme, že existují-li optimální smíšené strategie x^*, y^*, potom číslo

$$\omega = x^{*T} A y^*$$

je na jejich volbě nezávislé a nazývá se cena hry. Nechť

$$x^T A \tilde{y} \leq \tilde{x}^T A \tilde{y} \leq \tilde{x}^T A y \quad \forall x, y \text{ smíšené}$$

Potom $x^{*T} A \tilde{y} \leq \tilde{x}^T A \tilde{y} \leq \tilde{x}^T A y^* \leq x^{*T} A y^* \leq x^{*T} A \tilde{y} \Rightarrow$ všude rovnosti $\Rightarrow$

$$\tilde{x}^T A \tilde{y} = x^{*T} A y^*.$$

3.1.2 Existence optimálních smíšených strategií

Označme $e = (1, 1, \ldots, 1)^T$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

Věta 22 *Pro danou hru zadanou výplatní maticí A, nechť α je libovolné číslo splňující $\alpha > \max\limits_{ij}(-a_{ij})$ a nechť $\overline{A} = A + \alpha E$. Potom dvojice duálních úloh lineárního programování*

$$\min\{e^T x; \overline{A}^T x \geq e, x \geq 0\} \tag{P'}$$

$$\max\{e^T y; \overline{A} y \leq e, y \geq 0\} \tag{D'}$$

má optimální řešení. Nechť x_0, y_0 jsou libovolná optimální řešení (P'), (D'). Potom

$$x^* = \frac{x_0}{e^T x_0}, \quad y^* = \frac{y_0}{e^T y_0}$$

jsou optimální strategie obou hráčů,

$$\omega = x^{*T} A y^*$$

je cena hry a množiny optimálních strategií obou hráčů jsou dány vztahy

$$X_{\text{opt}} = \{x; A^T x \geq \omega e, e^T x = 1, x \geq 0\},$$

$$Y_{\text{opt}} = \{y; Ay \leq \omega e, e^T y = 1, y \geq 0\}.$$

Důkaz Z $\alpha > \max\limits_{ij}(-a_{ij}) \geq -a_{ij}$ plyne $a_{ij} + \alpha > 0 \ \forall ij$, tedy $\overline{A} = A + \alpha E > 0$. Úloha (D') je přípustná ($y = 0$ je přípustné) a pro každé j platí $\overline{a}_{ij} y_j \leq (\overline{A} y)_j \leq 1$, tedy $0 \leq y_j \leq \frac{1}{\overline{a}_{ij}}$ $\Rightarrow$ množina přípustných řešení (D') je omezená $\Rightarrow$ (D') má optimální řešení $\Rightarrow$ (P') má optimální řešení.

Nechť x_0, y_0 jsou optimální řešení (P'), (D'). Potom podle věty o dualitě je $e^T x_0 = e^T y_0$ a z $\overline{A}^T x_0 \geq e$ plyne $x_0 \neq 0$, tedy $e^T x_0 > 0$, tudíž vektory $x^* = \frac{x_0}{e^T x_0}$, $y^* = \frac{y_0}{e^T y_0}$ jsou nezáporné a $e^T x^* = \frac{e^T x_0}{e^T x_0} = 1 = e^T y^*$, tedy jsou to smíšené strategie.

Nechť x, y jsou libovolné smíšené strategie. Potom z $\overline{A} y_0 \leq e$ plyne $x^T \overline{A} y_0 \leq e^T x = 1$, tedy $x^T \overline{A} y^* \leq \frac{1}{e^T y_0}$ a analogicky z $\overline{A}^T x_0 \geq e$ plyne $y^T \overline{A}^T x_0 \geq e^T y = 1$, tj. $x_0^T \overline{A} y \geq 1$, $x^{*T} \overline{A} y = \frac{1}{e^T x_0}$, celkem

$$x^T\overline{A}y^* \le \frac{1}{e^T x_0} \le x^{*T}\overline{A}y.$$

Avšak $x^T\overline{A}y^* = x^T(A+\alpha E)y^* = x^T Ay^* + \alpha$, analogicky $x^{*T}\overline{A}y = x^{*T}Ay + \alpha$, tedy $x^TAy^* \le x^{*T}Ay$ $\forall$ smíšené strategie x, y a dosazením $y := y^*$, $x := x^*$ máme

$$x^TAy^* \le x^{*T}Ay^* \le x^{*T}Ay,$$

tedy podle definice jsou x^*, y^* optimální strategie obou hráčů.

Je-li $\tilde{y}$ libovolná optimální strategie, potom z $x^TA\tilde{y} \le \omega$ plyne pro $x = (0,\dots,1,\dots 0)$, že $(A\tilde{y})_i \le \omega$ $\forall i$, tedy $A\tilde{y} \le \omega e$, a ovšem $e^T\tilde{y} = 1$, $\tilde{y} \ge 0$, tedy $\tilde{y} \in Y_{\text{opt}}$. Naopak, nechť $\tilde{y} \in Y_{\text{opt}}$. Potom z $A\tilde{y} \le \omega e$ plyne pro každou smíšenou strategii x, že $x^TA\tilde{y} \le \omega(x^Te) = \omega$, tedy

$$x^TA\tilde{y} \le \omega \le x^{*T}Ay$$

a podle definice jsou $\tilde{y}$, x^* optimální smíšené strategie, tedy $\tilde{y}$ je optimální smíšená strategie. Tím jsme dokázali, že Y_{opt} je množina všech optimálních smíšených strategií hráče 2, podobně X_{opt} pro hráče 1. ∎

Věta 23 *(von Neumann). Každá konečná maticová hra má optimální smíšené strategie obou hráčů.*

Důkaz Pro každou hru s maticí A lze najít $\alpha > \max\limits_{ij}(-a_{ij})$ a potom podle Věty 22 existují optimální smíšené strategie. ∎

3.2 Dopravní problém

$$\begin{aligned}\min\Big\{&\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij};\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i(i=1,\dots,m),\\ &\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j(j=1,\dots,n), x_{ij}\ge 0\ \forall ij\Big\}\end{aligned} \tag{DP}$$

je to tedy problém rozvozu (např. uhlí) od zdrojů ke spotřebitelům. Zřejmě je to LP problém. Obecně lze spíše očekávat omezení tvaru $\sum\limits_j x_{ij} \le a_i$, $\sum\limits_i x_{ij} \ge b_j$, ale lze doplnit na rovnosti zavedením fiktivních zdrojů resp. spotřebitelů.

3.2.1 Podmínky přípustnosti a optimality

Věta 24 *Platí:*

(i) (DP) je přípustný právě když $\sum_i a_i = \sum_j b_j$,

(ii) je-li (DP) přípustný, má optimální řešení,

(iii) přípustné řešení x (DP) je jeho optimálním řešením, právě když existují $p \in R^m$, $q \in R^n$ taková, že

$$\begin{aligned} p_i + q_j &\le c_{ij} \qquad \forall ij \\ x_{ij}(c_{ij} - p_i - q_j) &= 0 \qquad \forall ij \end{aligned}$$

Důkaz

(i) (DP) má řešení $\Rightarrow \sum_i a_i = \sum_i \sum_j x_{ij} = \sum_j \sum_i x_{ij} = \sum_j b_j$. Naopak, pro $s = \sum_i a_i = \sum_j b_j$ definujme $x_{ij} = a_i b_j / s \ \forall ij$, potom $x \ge 0$, $\sum_j x_{ij} = (a_i/s) \sum_j b_j = a_i$, podobně $\sum_i x_{ij} = b_j$, tedy x je přípustné.

(ii) Je-li (DP) přípustný, potom $\forall ij$ je $0 \le x_{ij} \le \sum_j x_{ij} = a_i \le s$, tedy množina přípustných řešení je omezená a tudíž účelová funkce na ní nabývá minima.

(iii) Matice soustavy má v ij-tém sloupci 1 v i-tém a $(m+j)$-tém řádku, jinde 0. Píšeme-li duální vektor ve tvaru $y = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, potom duální soustava je $p_i + q_j \le c_{ij}$ a podmínka optimality dává $x_{ij}(c_{ij} - p_i - q_j) = 0$.

∎

3.2.2 Algoritmus

Označme $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j$. Myšlenka algoritmu: Dodržovat duální přípustnost $\bar{c} \ge 0$ a podmínku optimality $\bar{c}_{ij} x_{ij} = 0 \ \forall ij$, rozvážet po povolených cestách ($x_{ij} > 0 \Rightarrow \bar{c}_{ij} = 0$). Základní myšlenka: Jsou-li $\bar{a}$, $\bar{b}_j$ množství, která zbývá vyvézt, $\bar{a}_i > 0$, $\bar{b}_j > 0$, konstruuj posloupnost $i = i_1 j_1 i_2 j_2, \ldots, i_k j_k = j$ takovou, že $\bar{c}_{i_l j_l} = 0$, $x_{i_{l+1} j_l} > 0$, potom po této cestě lze rozvést a $\sum_i \bar{a}_i$ se sníží.

Tabulka pro řešení (DP):

	$\overline{b}_1$	$\overline{b}_2$	$\overline{b}_3$	$\dots$	$\overline{b}_n$
$\overline{a}_1$	$\overline{c}_{11}$	$\overline{c}_{12}$	$\overline{c}_{13}$	$\dots$	
$\overline{a}_2$	$\overline{c}_{21}$	$\boxed{x_{22}}$	$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$				
$\overline{a}_m$					

$\overline{a}_i$ ... dosud nerozvezené množství
$\overline{b}_j$ ... dosud nedodané množství
Protože $\overline{c}_{ij}x_{ij} = 0$, píšeme $\boxed{x_{ij}}$ pro vyzn. x; bez rámečku je to $\overline{c}_{ij}$.

Algoritmus (duální algoritmus pro řešení (DP)).

0. Začni s tabulkou, kde $\overline{a}_i = a_i$, $\overline{b}_j = b_j$, $\overline{c}_{ij} = c_{ij} - \min\limits_k c_{ik}$, $x_{ij} = 0\ \forall ij$.

1. Sestav I, J jako nejmenší množiny indexů s vlastnostmi

$$\begin{aligned} &\overline{a}_i > 0 \Rightarrow i \in I \\ &i \in I, \overline{c}_{ij} = 0 \Rightarrow j \in J \\ &j \in J, x_{ij} > 0 \Rightarrow i \in I. \end{aligned}$$

2. Je-li $\overline{b}_j = 0\ \forall j \in J$, vypočti

$$\Delta = \min\{\overline{c}_{ij}; i \in I, j \notin J\},$$

   polož

$$\begin{aligned} \overline{c}_{ij} &:= \overline{c}_{ij} - \Delta \quad \text{pro} \quad i \in I, j \notin J \\ \overline{c}_{ij} &:= \overline{c}_{ij} + \Delta \quad \text{pro} \quad i \notin I, j \in J \end{aligned}$$

   a jdi na krok 1.

3. Jinak nalezni $j \in J$ pro které $\overline{b}_j > 0$ a sestav řetěz

$$i = i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_t j_t = j$$

   takový, že $\overline{a}_i > 0, \overline{c}_{i_l j_l} = 0\ \forall l, x_{i_{l+1} j_l} > 0\ \forall l$. Vypočti $\varepsilon = \min\{\overline{a}_i, \overline{b}_j, \min\limits_l x_{i_{l+1} j_l}\}$ a polož $\overline{a}_i := \overline{a}_i - \varepsilon$, $\overline{b}_j := \overline{b}_j - \varepsilon$, $x_{i_l j_l} := x_{i_l j_l} + \varepsilon$, $x_{i_{l+1} j_l} := x_{i_{l+1} j_l} - \varepsilon\ \forall l$.

4. Je-li $\overline{a} = \overline{b} = 0$ stop! Optimální řešení. Jinak jdi na 1.

Dokážeme, že v každém kroku platí:

1. $\overline{c}_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j$ pro jisté p, q,

2. $\overline{c}_{ij} \geq 0 \ \forall ij$,

3. $\overline{c}_{ij} x_{ij} = 0 \ \forall ij$,

4. $\sum_j x_{ij} + \overline{a}_i = a_i$, $\sum_i x_{ij} + \overline{b}_j = b_j \ \forall ij$,

5. $x \geq 0$.

ad 1): na začátku položme $p_i = \min_k c_{ik}$, $q_j = 0 \ \forall ij$, potom má ten tvar. Jinak k úpravě dochází je v kroku 6. Nechť indukcí $\overline{c}_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j$. Položme $p'_i = p_i + \Delta$ pro $i \in I$, $p'_i = p_i$ pro $i \notin I$, $q'_j = q_j - \Delta$ pro $j \in J$, $q'_j = q_j$ pro $j \notin J$, potom $\overline{c}'_{ij} = c_{ij} - p'_i - q'_j$.
ad 2) Na začátku evidentně $\overline{c} \geq 0$. Při úpravě: je-li $i \in I$, $j \notin J$, je $\Delta \leq \overline{c}_{ij}$, tedy $\overline{c}'_{ij} = c_{ij} - \Delta \geq 0$, je-li $i \notin I$, $j \in J$, potom $\Delta \geq 0$ a tedy $\overline{c}'_{ij} = \overline{c}_{ij} + \Delta \geq \overline{c}_{ij} \geq 0$.
ad 3) Indukcí: při prvé konstrukci x_{ij} je zřejmé. Jinak, je-li v kroku 4 $x_{i_l j_l} := x_{i_l j_l} + \varepsilon$, je v kroku 3 $\overline{c}_{i_l j_l} = 0$; je-li $x_{i_{l+1} j_l} := x_{i_{l+1} j_l} - \varepsilon$, muselo být $x_{i_{l+1} j_l} > 0$ a tedy indukcí $\overline{c}_{i_{l+1} j_l} = 0$. V kroku 6: $\overline{c} := \overline{c} - \Delta \Rightarrow \overline{c}_{ij} > 0 \Rightarrow x_{ij} = 0$; $\overline{c} := \overline{c} + \Delta \Rightarrow i \notin I$, $j \in J \Rightarrow x_{ij} = 0$ (jinak $i \in I$).
ad 4) Zřejmé na začátku. Jinak v kroku 4 $\overline{a}_i := \overline{a}_i - \varepsilon$, $x_{ij_1} := x_{ij_1} + \varepsilon$ tedy $\overline{a}'_i + \sum_j x'_{ij} = \overline{a}_i + \sum_j x_{ij} = a_i$, podobně ostatní.
ad 5) $x_{i_{l+1} j_l} := x_{i_{l+1} j_l} - \varepsilon \Rightarrow x_{i_{l+1} j_l} \geq \varepsilon \Rightarrow x'_{i_{l+1} j_l} \geq 0$.

Věta 25 *Nechť počáteční data a_i, b_j, c_{ij} jsou celočíselná a nechť úloha je přípustná, tj. $\sum a_i = \sum b_j$. Potom algoritmus po konečném počtu kroků dává celočíselné optimální řešení úlohy (DP) a všechny průběžné tabulky jsou rovněž celočíselné.*

Důkaz Celočíselnost tabulek plyne z použití pouze operací $+$, $-$, min. V bodu 4 algoritmu je $\varepsilon \geq 1$, tedy po aktualizaci $\sum \overline{a}_i$ klesne aspoň o 1. Kroky 3, 4 se tedy nemohou provádět více než $(\sum a_i)$-krát. Dochází-li k návratu z 6 na 1, potom pro nové množiny I', J' konstruované v kroku 1 především $\Delta > 0$ ($i \in I$, $j \notin J \Rightarrow \overline{c}_{ij} > 0$, jinak $j \in J$). Dále, je-li $i \in I$, $\overline{c}_{ij} = 0$, potom i $\overline{c}'_{ij} = 0$ ($\overline{c}'_{ij} > 0 \Rightarrow i \notin I$, $j \in J$, spor); je-li $j \in J$, $x_{ij} > 0$, je opět $x_{ij} > 0$, tedy $i \in I$. Jinými slovy, $I \subseteq I'$, $J \subseteq J'$. Ale pro $\Delta = \overline{c}_{i_0 j_0}$ je $i_0 \in I$, $j_0 \notin J$, $\overline{c}'_{i_0 j_0} = \overline{c}_{i_0 j_0} - \Delta = 0$, tedy $j_0 \in J'$; proto $J \subseteq J'$, $J \neq J'$. Tedy po nejvýše n návratech od 6 k 1 musí projít a snížit $\sum a_i$, z toho plyne konečnost.

Tedy po konečně mnoha krocích dojde k řešení, kde $\overline{c} \geq 0$, $\overline{c}_{ij} x_{ij} = 0 \ \forall ij$, $\sum_j x_{ij} = a_i$, $\sum_i x_{ij} = b_j \Rightarrow$ optimální. ■

Kapitola 4

Problém lineární komplementarity

4.1 P-matice

$A : n \times n$, $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $I = (i_1, \ldots, i_m)$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$. Matice tvaru

$$A_I = \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \ldots & a_{i_1 i_m} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \ldots & a_{i_2 i_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_m i_1} & a_{i_m i_2} & \ldots & a_{i_m i_m} \end{pmatrix}$$

se nazývá hlavní submatice matice A, $\det A_I$ hlavní minor.

Definice 1 *A je P-matice, jestliže všechny její hlavní minory jsou kladné.*

Důsledek Je-li $A = (a_{ij})$ P-matice, potom $\det A > 0$, $a_{ii} > 0$ $\forall i$. Je-li A P-matice, potom každá A_I je P-matice.

Lemma 1 *Jestliže A je P-matice a T je nezáporná diagonální matice, potom $A + T$ je P-matice.*

Důkaz Nejdříve nechť

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & t_{ii} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix},$$

potom pro $i \notin I$ je $\det(A+T)_I = \det A_I$, pro $i \in I$ je $\det(A+T)_I = \det A_I + t_{ii} \det A_{I-\{i\}} \geq \det A_I > 0$. Pro obecnou diagonální matici T indukcí. ■

Věta 26 (Fiedler, Pták 1962). *A je P-matice právě když pro každé $x \neq 0$ existuje i tak, že $x_i(Ax)_i > 0$.*

Důkaz $\Rightarrow$ Nechť A je P-matice a nechť existuje $x \neq 0$ tak, že $x_i(Ax)_i \leq 0$ $\forall i$. Nechť $I = \{i; x_i \neq 0\}$, $x_I = (x_i)_{i \in I}$, $y_I = ((Ax)_i)_{i \in I}$, potom $y_I = A_I x_I$ a $y_i x_i \leq 0$ $\forall i \in I$, tj. existuje diagonální $T \geq 0$, že $y_I = -T x_I$ (tj. $t_{ii} = -\frac{y_i}{x_i} = -\frac{y_i x_i}{x_i^2}$, $i \in I$), tedy $-T x_I = A_I x_I$, $(A_I + T) x_I = 0 \Rightarrow \det(A_I + T) = 0$, spor s lemmatem.

Naopak, nechť $(\forall x \neq 0)$ $(\exists i)$ $x_i(Ax)_i > 0$, a uvažujme libovolnou A_I. Nechť λ je libovolné reálné vlastní číslo A_I, tj. $A_I x = \lambda x$, $x \neq 0$. Dodefinujme $\tilde{x}_i = 0$ pro $i \notin I$, $\tilde{x}_i = x_i$ pro $i \in I$, potom $\tilde{x}_i(A\tilde{x})_i > 0$ pro jisté i, tedy $i \in I$, $(A\tilde{x})_i = (A_I x)_i$ $\Rightarrow x_i(A_I x)_i > 0 \Rightarrow 0 < x_i(A_I x)_i = \lambda x_i^2 \Rightarrow \lambda > 0$. Všechna reálná vlastní čísla A_I kladná $\Rightarrow$

$$\det A_I = \prod_i \lambda_i = \prod_{\lambda_i \in R} \lambda_i \cdot \prod_{\mathrm{Im}\lambda_j > 0} (\lambda_j \overline{\lambda}_j) > 0$$

(neboť determinant matice je roven součinu jejích vlastních čísel). ■

Věta 27 (Coxson 1994). *Problém ověření, zda daná matice A je P-matice, je NP-těžký.*

Důkaz vybočuje z rámce této přednášky a proto jej zde neuvádíme.

Věta 28 *Symetrická matice A je P-matice právě tehdy, když je pozitivně definitní.*

Důkaz $\Rightarrow$: P-matice $\Rightarrow$ vedoucí hlavní minory $> 0 \Rightarrow$ pozitivně definitní podle Sylvesterova kritéria.
$\Leftarrow$: pos. def. $\Rightarrow \forall x \neq 0$ $\sum_i x_i(Mx)_i = x^T M x > 0 \Rightarrow x_i(Mx)_i > 0$ pro jisté i. ■

4.2 Problém lineární komplementarity

$$\left.\begin{array}{l} y = Mz + q \\ y^T z = 0 \\ y \geq 0, z \geq 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(LCP)}$$

kde M je čtvercová. S vyloučením y lze psát ekvivalentně

$$
\begin{aligned}
&Mz + q \geq 0\\
&z^T(Mz + q) = 0\\
&z \geq 0
\end{aligned}
$$

resp. jedinou rovnicí

$$x^+ = Mx^- + q$$

kde $x^+ = (x_i^+)$, $x^- = (x_i^-)$, $\alpha^+ = \max\{\alpha, 0\}$, $\alpha^- = \max\{-\alpha, 0\}$ (stačí $x = y - z$). V základní formulaci je $y^T z = 0$ ekvivalentní $y_i z_i = 0 \ \forall i$. Naším cílem bude dokázat, že (LCP) má právě jedno řešení pro každou pravou stranu q právě když M je P-matice. Uvedeme i konstruktivní metodu (konečný algoritmus) jak toto řešení najít. V průběhu důkazu použijeme dvě pomocná tvrzení.

4.3 Murtyho algoritmus

Algoritmus (Murty 1974, pro řešení (LCP) s P-maticí M)

0. Sestav tabulku $B|\overline{A}|\overline{q}$, kde $\overline{A} = (I, -M)$, $\overline{q} = q$, $B = (1, \ldots, n)$ (tj. $y_1, \ldots, y_n$ jsou v bázi).
1. Je-li $\overline{q} \geq 0$, ukonči: y, z je řešení (LCP).
2. Jinak urči
$$k = \min\{j;\, \overline{q}_j < 0\}.$$
3. Je-li z_k v bázi, zvol pivota $\overline{a}_{kk}$, jinak zvol pivota $\overline{a}_{k,n+k}$ [tj. zaveď do báze proměnnou doplňkovou k té, která je v bázi].
4. Proveď eliminaci s tímto pivotem a jdi na 1.

Podstatné rysy jsou tyto:

a) pro každé k je právě jedna z proměnných y_k, z_k v bázi,

b) jí odpovídající sloupec jednotkové matice má 1 v řádku k, tj. $\forall k$ je buď $y_k = \overline{q}_k$ nebo $z_k = \overline{q}_k$.

To se snadno dokáže indukcí. To zaručuje $y^T z = 0$ & $y = Mz + q$, tedy ukončí se v okamžiku kdy $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Příklad

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 1 & 0 & \boxed{-1} & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc|c} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \boxed{-1} & -1 \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} 3 & \boxed{-1} & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

tj. řešení je $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Na první pohled je nevýhodou algoritmu direktivní volba pivota; není nijak patrné, že musí být nenulový. Je tomu tak však v případě, že M je P-matice [kdyby $\overline{a}_{kk} > 0$, potom $\overline{q}_k := \frac{\overline{q}_k}{\overline{a}_{kk}} < 0$ a záporná složka se neodstraní].

Věta 29 *Jestliže M je P-matice, potom v každém kroku Murtyho algoritmu je pivot záporný [tj. algoritmus je proveditelný].*

Důkaz Uvažujme běžný krok s bází B, tj. $B_k \in \{k, n+k\}$ $\forall k$ a nebázickou částí N, $N_k \in \{k, n+k\}$, $B_k \neq N_k$ $\forall k$. Pivot se vybírá v k-tém řádku a k-tém sloupci nebázické části, tedy jako $(A_B^{-1} A_N)_{kk}$. Dokážeme, že $-A_B^{-1} A_N$ je P-matice; tím je dáno, že diagonální prvky jsou kladné, tedy pivot $= (A_B^{-1} A_N)_{kk} < 0$.

Nechť $y = -A_B^{-1} A_N z$, $z \neq 0$, tj. $A_B y + A_N z = 0$. Definujme $x \in R^{2n}$ přepisem $x_B = y$, $x_N = z$, potom $A_B y + A_N z = (I, -M)x = x_1 - Mx_2 = 0$. Kdyby $x_2 = 0$, potom $x_1 = 0$, tedy i $y = z = 0$ spor. Proto $x_2 \neq 0$ tedy existuje i, že $(x_1)_i (x_2)_i > 0$. Ale $(x_1)_i = y_i$, $(x_2)_i = z_i$ je-li $B_i = i$, a $(x_1)_i = z_i$, $(x_2)_i = y_i$ je-li $B_i = n + i$, v obou případech $(x_1)_i (x_2)_i = y_i z_i > 0$. Tedy $-A_B^{-1} A_N$ je P-matice $\Rightarrow$ pivot záporný. ■

Lemma 2 *Nechť M je P-matice a nechť $(y^1, z^1) \neq (y^2, z^2)$ jsou řešení soustavy*

$$\begin{aligned} y &= Mz + q \\ y_i z_i &= 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

[bez požadavku nezápornosti!]. Potom existuje i tak, že platí

$$y_i^1 z_i^2 + y_i^2 z_i^1 < 0$$

[tj. buď $y_i^1 z_i^2 < 0$, nebo $y_i^2 z_i^1 < 0$].

Důkaz $y^1 = Mz^1 + q$, $y^2 = Mz^2 + q$ implikují $y^1 - y^2 = M(z^1 - z^2)$. Protože $z^1 \neq z^2$ (jinak $(y^1, z^1) = (y^2, z^2)$), existuje podle věty 26 index i tak, že

$$0 < (y_i^1 - y_i^2)(z_i^1 - z_i^2) = y_i^1 z_i^1 - y_i^1 z_i^2 - y_i^2 z_i^1 + y_i^2 z_i^2 = -y_i^1 z_i^2 - y_i^2 z_i^1,$$

tedy $y_i^1 z_i^2 + y_i^2 z_i^1 < 0$. ■

Lemma 3 *Nechť S je posloupnost s těmito vlastnostmi:*

(i) každý prvek S patří do $\{1, \ldots, n\}$,

(ii) mezi každými dvěma výskyty čísla k v S existuje výskyt čísla většího než k.

Potom S je konečná a každý prvek $k \in \{1, \ldots, n\}$ se v posloupnosti vyskytne nejvýše 2^{n-k}-krát.

Důkaz Indukcí pro $k = n, n-1, \ldots, 1$. Podle (ii) se $k = n$ nemůže vyskytnout více než jednou. Nechť tvrzení je dokázáno pro $n, \ldots, k+1$. Potom mezi každými dvěma výskyty k existuje výskyt čísla $> k$, tj. výskyt $k - 1 \leq$ součet výskytů čísel větších než $k \leq 2^{n-(k+1)} + \ldots + 2^0 = 2^{n-k-1} + \ldots + 1 = 2^{n-k} - 1$, tj. počet výskytů k je $\leq 2^{n-k}$. Tudíž celková délka posloupnosti $\leq 2^{n-1} + \ldots + 1 = 2^n - 1$. ■

Věta 30 *Nechť M je P-matice. Potom Murtyho algoritmus dává v konečném počtu kroků jediné řešení (LCP).*

Důkaz Podle lemmatu 3: nechť S je posloupnost čísel k z kroku 2 algoritmu. Vlastnost (i) je zřejmě splněna. Uvažujme dva nejbližší výskyty k v S, nechť odpovídají (y^1, z^1) a (y^2, z^2). Potom pro každé $i < k$ jsou všechna čísla y_i^1, z_i^1, y_i^2, z_i^2 nezáporná, tj.

$$y_i^1 z_i^2 + y_i^2 z_i^1 \geq 0.$$

Dále dvě z čísel y_k^1, z_k^1, y_k^2, z_k^2 jsou záporná a dvě nulová, tedy opět

$$y_k^1 z_k^2 + y_k^2 z_k^1 \geq 0.$$

Avšak $(y^1, z^1) \neq (y^2, z^2)$ (k-tá bázická prom. je různá), tedy podle lemmatu 2 existuje $i > k$ takové, že

$$y_i^1 z_i^2 + y_i^2 z_i^1 < 0,$$

tj. jedno z nich je $< 0 \Rightarrow \neq 0 \Rightarrow i$ muselo mezitím být v S. Tedy podle lemmatu 3 je S konečná, každé k se může vyskytnout nejvýše 2^{n-k}-krát. Tedy (LCP) má řešení.
Jednoznačnost: Nechť (y^1, z^1), (y^2, z^2) jsou různá řešení (LCP). Potom $z_1 \neq z_2$ (jinak $(y_1, z_1) = (y_2, z_2)$) a podle lemmatu 2 je buď $y_i^1 z_i^2 < 0$ nebo $y_i^2 z_i^1 < 0 \Rightarrow$ jedno z řešení není nezáporné $\Rightarrow$ spor; tedy řešení jediné. ■

4.4 Existence a jednoznačnost řešení (LCP)

Věta 31 (Samelson, Thrall a Wesler 1958, nezávisle Ingleton 1966, Murty 1972). *(LCP) má pro každou pravou stranu q právě jedno řešení právě tehdy, když M je P-matice.*

Důkaz $\Leftarrow$: Je-li M P-matice, potom Murtyho algoritmus dává po konečně mnoha krocích řešení, o kterém je dokázáno, že je jediné.
$\Rightarrow$: Nechť M není P-matice, tedy existuje $x \neq 0$, že $x_i(Mx)_i \leq 0$ $\forall i$. Položme $y = Mx$, tedy $y_i x_i \leq 0$ $\forall i$, a $y^+ - y^- = M(x^+ - x^-)$, tj. $q := y^+ - Mx^+ = y^- - Mx^-$. Ukážeme, že (y^+, x^+) i (y^-, x^-) jsou vzájemně různá řešení (LCP) $y = Mx + q$, $y \geq 0$, $x \geq 0$, $y^T x = 0$. Jestliže $y_i^+ x_i^+ \neq 0$, potom > 0, tedy $y_i^+ > 0$ a $x_i^+ > 0$, tedy $y_i^- = x_i^- = 0$ a $y_i x_i = y_i^+ x_i^+ > 0$ spor. Analogicky kdyby $y_i^- x_i^- > 0$, potom $y_i^+ = x_i^+ = 0$, $y_i x_i = (-y_i^-)(-x_i^-) > 0$ spor. Tudíž jsou obě řešení. Kdyby $x^+ = x^-$, potom $\forall i$ $x_i = 0$, tedy $x = 0$ spor, neboť $x \neq 0$. Tedy $x^+ \neq x^-$, tedy obě řešení jsou různá. Není-li M P-matice, existuje tedy (LCP), který má aspoň dvě různá řešení. ■

Třída P-matic, pro které Murtyho algoritmus funguje, je příliš úzká, zformulujeme proto jiný algoritmus, který je obecnější, ale může selhat. Popíšeme nejprve tzv. lexikografické pravidlo.

4.5 Lexikografické pravidlo

Lexikografické uspořádání vektorů: $x \prec y \Leftrightarrow$ existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ tak, že $x_i = y_i \ \forall i < k \ \& \ x_k < y_k$ (na principu uspořádání slov ve slovníku).
Zřejmě: $x \neq y \Rightarrow x \prec y$ nebo $y \prec x$; $0 \prec x \ \& \ 0 \prec y \Rightarrow 0 \prec x + y$; mezi konečně mnoha ex. nejmenší, označme ho lexmin; $y \prec x$, $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha y \prec \alpha x$.

Lexikografické pravidlo u algoritmu simplexového typu: v běžném kroku, označme β_i i-tý řádek matice $\begin{array}{|c|c|}\hline \bar{b} & A_B^{-1} \\ \hline \multicolumn{2}{|c|}{\gamma} \\ \hline \end{array}$

Pravidlo:

$$\frac{1}{\bar{a}_{rs}} \beta_r = \text{lexmin} \left\{ \frac{1}{\bar{a}_{js}} \beta_j ; \ \bar{a}_{js} > 0 \right\} .$$

Tvrzení V každém kroku algoritmu:

(a) výběr r je jednoznačný

(b) $\beta_j \succ 0 \ \forall j$

(c) jestliže s vstoupí a p vystoupí, potom zavedeme-li v dalším kroku p do báze, potom s opět vystoupí z báze.

(d) v simplexovém algoritmu řádek γ lexikograficky roste, z toho vyplývá konečnost.

Důkaz

(a) nechť není, tj. $\frac{1}{\bar{a}_{rs}} \beta_r = \frac{1}{\bar{a}_{js}} \beta_j \Rightarrow \beta_r, \beta_j$ lineárně závislé $\Rightarrow$ r-tý a j-tý řádek A_B^{-1} lineárně závislé - není možné

(b) na začátku jde o matici $\begin{array}{|c|c|}\hline b & I \\ \hline \end{array}$ a v každém řádku je první nenulový prvek kladný $\Rightarrow \beta_j \succ 0 \ \forall j$

$$\begin{array}{ccc|c} \dots & \bar{a}_{js} & \dots & \beta_j \\ & \vdots & & \vdots \\ \dots & \bar{a}_{rs} & \dots & \beta_r \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|l} \dots & 0 & \dots & \beta_j - \frac{\bar{a}_{js}}{\bar{a}_{rs}} \beta_r \\ & \vdots & & \vdots \\ \dots & 1 & \dots & \frac{1}{\bar{a}_{rs}} \beta_r \end{array}$$

Jelikož $\frac{1}{\bar{a}_{rs}} \beta_r \prec \frac{1}{\bar{a}_{js}} \beta_j$, je buď $\bar{a}_{js} \leq 0$, potom $\beta_j - \frac{\bar{a}_{js}}{\bar{a}_{rs}} \beta_r \succ 0$, nebo $\bar{a}_{js} > 0$, potom $\frac{1}{\bar{a}_{rs}} \beta_r \prec \frac{1}{\bar{a}_{js}} \beta_j$ implikuje $\beta_j - \frac{\bar{a}_{js}}{\bar{a}_{rs}} \beta_r \succ 0$.

(c) $B_r = p$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & \dots & \overline{a}_{js} & \dots & & \beta_j \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \dots & \overline{a}_{rs} & \dots & & \beta_r \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc|c} -\frac{\overline{a}_{js}}{\overline{a}_{rs}} & \dots & 0 & \dots & & \beta_j - \frac{\overline{a}_{js}}{\overline{a}_{rs}}\beta_r \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{\overline{a}_{rs}} & \dots & 1 & \dots & & \frac{1}{\overline{a}_{rs}}\beta_r \end{array}$$

Chceme-li zavést zpět proměnnou, která vystoupila z báze, lex. pravidlo dává

$$\text{lexmin}\left\{\beta_r,\ \text{lexmin}\left\{\beta_r - \frac{\overline{a}_{rs}}{\overline{a}_{js}};\ \ \overline{a}_{js} < 0\right\}\right\} = \beta_r,$$

tedy pivot je opět v řádku r a tabulka se vrátí do původního stavu.

(d) Na počátku $\begin{array}{|c|c|} \hline b & I \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} := \gamma$

$$y^T A_B = c_B^T \Rightarrow A_B^T y = c_B \Rightarrow y = (A_B^T)^{-1} c_B$$

tj.

$$\gamma = (-b^T y, -y) = (-b^T (A_B^T)^{-1} c_B, -(A_B^T)^{-1} c_B)$$

$$\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline \overline{a}_{rs} & & \beta_r \\ \hline & & \\ \hline \overline{c}_s & & \gamma \end{array}$$

Pro řádek v dalším kroku platí

$$\begin{aligned} \gamma : &= \gamma - \frac{\overline{c}_s}{\overline{a}_{rs}}\beta_r \\ &= \gamma + \left(\frac{-\overline{c}_s}{\overline{a}_{rs}}\right)\beta_r > \gamma, \end{aligned}$$

tedy γ v každém kroku lexikograficky roste a proto se simplexový algoritmus nemůže vrátit do stejné báze, proto je konečný.

■

4.6 Lemkeho algoritmus

řeší modifikovaný (LCP)

$$y = Mz + z_0 e + q \tag{4.1}$$

$$y^T z = 0 \tag{4.2}$$

$$y \geq 0, z_0 \geq 0, z \geq 0 \tag{4.3}$$

a směřuje k $z_0 = 0$ (potom řešení (LCP)). Jde po tzv. téměř komplementárních bázích: bázické řešení (y, z, z_0) se nazývá téměř komplementární, jestliže existuje $k \in \{1, \ldots, n\}$ tak, že

(i) $\forall j \neq k$ je právě jedna z proměnných y_j, z_j v bázi,

(ii) y_k ani z_k nejsou v bázi,

(iii) z_0 je v bázi.

Algoritmus (Lemke 1965) [Udržuje (4.2), (4.3), směřuje k (4.1)]

0. Sestav počáteční tabulku $B|\overline{A}|\overline{b}$, kde $B = \{1, \ldots, n\}$, $\overline{A} = (I, -M, -e)$, $\overline{b} = q$. Je-li $\overline{b} \geq 0$, stop: $y = q$, $z = 0$ je řešení (LCP).
1. Nalezni t, pro které $\overline{b}_t = \min\limits_j \overline{b}_j$, a zaveď z_0 do báze s pivotem v řádku t [potom $\overline{b} \geq 0$ a z_0 je v bázi].
2. Nechť $\overline{A}_s$ je sloupec proměnné doplňkové k té, která právě vystoupila z báze. Je-li $\overline{A}_s \leq 0$, stop! "Ray termination" (algoritmus selhává).
3. Jinak urči r pomocí lexikografického pravidla.
4. Proveď eliminaci s pivotem $\overline{a}_{rs}$ a polož $B_r = s$.
5. Je-li $z_0 = 0$, stop! Řešení (LCP). Jinak jdi na krok 2.

Vysvětlení ke kroku 1.

$$
\begin{array}{ccc|c}
y_t & & z_0 & \\
\hline
\vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & -1 & \overline{b}_t \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & & -1 & \overline{b}_j \\
\vdots & & \vdots & \vdots
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{ccc|l}
y_t & & z_0 & \\
\hline
\vdots & & \vdots & \\
-1 & \ldots & 1 & -\overline{b}_t > 0 \text{ (neboť } \overline{b} \ngeq 0,\ \overline{b}_t = \min\limits_j \overline{b}_j) \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
-1 & & 0 & \overline{b}_j - b_t \geq 0 \text{ (neboť } \overline{b}_t = \min\limits_j \overline{b}_j) \\
\vdots & & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Algoritmus udržuje téměř komplementární řešení. Po provedení 1. kroku jsou y_j, $j \neq t$, v bázi, a z_0 je v bázi, tedy téměř komplementární řešení, přičemž y_t vystoupila z báze. Indukcí: je-li to tak, jestliže např. y_s vystoupí z báze, a z_s vstupuje, potom nějaká jiná vystupuje a tím vzniká nebázická dvojice y_j, z_j.

Věta 32 *Lemkeho algoritmus s použitím lexikografického pravidla je konečný [tj. po konečně mnoha krocích buď dává řešení (LCP), nebo konstatuje "ray termination" a selhává, ačkoliv (LCP) může mít řešení].*

Důkaz Předpokládejme, že algoritmus se zacyklí, tj. konstruuje nekonečnou posloupnost téměř komplementárních bází $B^0, B^1, \ldots$. Definujme

$$p = \min\{j; B^j = B^l \text{ pro jisté } l > j\}.$$

a) Nechť $p > 0$, $B^p = B^q$ pro jisté $q > p$. Nechť y_k, z_k není v této bázi. Tzn. že jedna z nich, např. y_k, vystoupila při přechodu od B^{p-1} k B^p. Analogicky pro q : buď y_k vystoupila, potom $B^{p-1} = B^{q-1}$, nebo vystoupila z_k, potom y_k vstupuje a je $B^{p-1} = B^{q+1}$, v obou případech spor s definicí p.

b) Nechť $p = 0$, tj. $B^0 = B^q$ pro jisté $q > 0$. Potom y_t, z_t nejsou v B^q, tedy B^q vzniklo z B^{q-1} vystoupením jedné z nich z báze. Kdyby y_t vystoupila z báze, musel by sloupec proměnné y_t obsahovat kladný prvek. Kdyby z_t vystoupila z báze, muselo by v dalším kroku y_t vstoupit do báze, ale to by znamenalo "ray termination", ke kterému nedošlo - v obou případech spor.

$$\begin{array}{r|cc|}
 & y_t & z_0 \\
 & -1 & 0 \\
 & -1 & 0 \\
 & \vdots & \vdots \\
B^0: & -1 & 1 \\
 & \vdots & \vdots \\
 & -1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

■

Věta 33 *Nechť M má tyto dvě vlastnosti [tzv. kopozitivní plus]:*

(i) $x^T M x \geq 0$ *pro každé* $x \geq 0$,

(ii) jestliže $x^T M x = 0$ *pro jisté* $x \geq 0$, *potom* $(M + M^T)x = 0$.

Potom platí: jestliže soustava

$$y = Mz + q \tag{$*$}$$
$$y \geq 0, z \geq 0$$

má řešení, potom i (LCP) má řešení, které se nalezne Lemkeho algoritmem v konečném počtu kroků [tj. nenastane "ray termination"].

Důkaz Předpokládejme, že nastane "ray termination". Ukážeme, že potom existuje $z' \geq 0$, že $M^T z' \leq 0$ a $q^T z' < 0$, takže podle Farkasovy věty (*) nemá řešení.

Nechť tedy v jistém kroku při řešení y, z, z_0 nastane "ray termination", tj. $\overline{A}_s \leq 0$. Nechť y_k, z_k není v bázi. Definujme vektor $\tilde{x} = \begin{pmatrix} y' \\ z' \\ z'_0 \end{pmatrix}$ přepisem $\tilde{x}_B = -\overline{A}_s$, $\tilde{x}_s = 1$, $\tilde{x}_j = 0$ jinde, takže $y' = Mz' + z'_0 e$. Jelikož s-tá proměnná nebyla v bázi ani její komplement, neporuší se jejím zavedením komplementarita; tedy $y'^T z' = 0$ a rovněž $y'^T z = y^T z' = 0$.

1. Dokážeme, že $z' \neq 0$: předpokládejme $z' = 0$, takže $y' = z'_0 e$. Kdyby $z'_0 = 0$, potom i $y' = 0$, ale $\tilde{x}_s = 1$. Tedy $z'_0 > 0$, $y' > 0$. Tedy $n + 1$ kladných, v bázi n a jedna přidaná - tedy v bázi byly proměnné y_j, $j \neq s$, z_0. Tzn. že předtím vystoupila z_s. Tedy předchozí bázi dostaneme zavedením z_s do báze. Ale v momentální bázi je $y = z_0 e + q$, $y_s = 0 \Rightarrow q_s = -z_0$ a $q_j = -z_0 + y_j > -z_0 = q_s \; \forall j \neq s \Rightarrow q_s = \min_j q_j$, jediné $\Rightarrow s = t \Rightarrow$ počáteční tabulka $\Rightarrow$ po zavedení z_s druhá tabulka $\Rightarrow$ zacyklení - spor. Tedy $z' \neq 0$.

2. $y' = Mz' + z'_0 e \Rightarrow 0 = z'^T y' = z'^T M z' + z'_0 (e^T z') \Rightarrow z'^T M z' = 0$, $z'_0 = 0 \Rightarrow (M + M^T) z' = 0 \Rightarrow y' = Mz' \geq 0$, $M^T z' = -Mz' \leq 0$.

3. Z $y = Mz + z_0 e + q$ nyní plyne $0 = z'^T y = z'^T M z + z_0 (e^T z') + q^T z' = z^T M^T z' + z_0 (e^T z') + q^T z' = -z^T y' + z_0 (e^T z') + q^T z' = z_0 (e^T z') + q^T z'$, tedy $q^T z' = -z_0 (e^T z') < 0$.

Tedy $z' \geq 0$, $M^T z' \leq 0$, $q^T z' < 0$ - spor s existencí řešení soustavy (*). ■

Podrobnější důkaz bodu 1.:

Je-li $z' = 0$, potom sloupec s nebyl v bázi $\Rightarrow$ nemohl to být sloupec z_0. $y' = z'_0 e$ a tudíž $z'_0 > 0$ (jinak $y' = z' = z'_0 = 0$). Tedy $y' = z'_0 e$. Tzn. že $\tilde{x}_s = y'_s$ a y'_j, $j \neq s$, z'_0 jsou v bázi. Tedy v původní bázi y_j, $j \neq s$, z_0. Tedy $y = z_0 e + q$, z toho $q_s = -z_0$, $q_j = -z_0 + z_j > -z_0 = q_s \Rightarrow q_s = \min\limits_j q_j \Rightarrow s = t$, takže to je původní báze. y_s vstupuje $\Rightarrow z_s$ vystupuje, tedy zavedením z_s dostaneme předchozí bázi, ale ta je shodná s tou která následuje po první - ale po ní vystoupilo jisté y_j nebo z_j, $j \neq s$, kdežto tady z_s - tedy jsou obě různé a z toho plyne opakování báze. [Nebo: výstup. pr. jednoznačná, ale tady obě různé - spor.]

Pozitivně definitní matice: $x^T Ax > 0$, $\forall x \neq 0$, semidefinitní: $x^T Ax \geq 0$, $\forall x$.

Lemma 4 *Nechť A je pozitivně semidefinitní a nechť $x^T Ax = 0$ pro jisté x. Potom $(A + A^T)x = 0$.*

Důkaz Nejdříve nechť A je symetrická. $\forall \lambda \in R^1$ je

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\lambda x + Ax)^T A(\lambda x + Ax) = \lambda^2 x^T Ax + \lambda x^T A^T Ax + \lambda (Ax)^T Ax + (Ax)^T A(Ax) = \\ &= 2\lambda \parallel Ax \parallel_2^2 + (Ax)^T A(Ax) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow (A + A^T)x = 0. \end{aligned}$$

Není-li A symetrická, potom $\frac{1}{2}(A + A^T)$ je symetrická a $x^T \left(\frac{1}{2}(A + A^T)\right) x = x^T Ax \geq 0$, tedy jestliže $x^T Ax = 0$, je i $x^T \left(\frac{1}{2}(A + A^T)x\right) = 0 \Rightarrow (A + A^T)x = 0$.
■

Důsledek Pozitivně semidefinitní matice je kopozitivní plus.

Důkaz $x^T Mx \geq 0$ $\forall x$, tedy i $\forall x \geq 0$
$x^T Mx = 0$, $x \geq 0 \Rightarrow x^T Mx = 0 \Rightarrow (M + M^T)x = 0$. ■

Kapitola 5

Kvadratické programování

Míníme tím úlohu

$$\min \left\{ \frac{1}{2} x^T D x + c^T x; Ax \geq b, x \geq 0 \right\} \tag{QP}$$

(pro $D = 0$ je to (LP)). Jelikož $x^T D x = x^T \left(\frac{1}{2}(D + D^T) \right) x$, lze D předpokládat symetrickou. Navíc budeme předpokládat, že D je pozitivně semidefinitní (tj. účelová funkce je konvexní). Nechť $Q(x) = \frac{1}{2} x^T D x + c^T x$. $\forall x, x^*$ platí

$$Q(x) = Q(x^*) + (Dx^* + c)^T (x - x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T D (x - x^*)$$

(Taylorova věta). Skutečně, pro pravou stranu máme

$$\frac{1}{2} x^{*T} D x^* + c^T x^* + x^T D x^* - x^{*T} D x^* + c^T x - c^T x^* + \frac{1}{2} x^T D x - \frac{1}{2} x^T D x^*$$
$$- \frac{1}{2} x^{*T} D x + \frac{1}{2} x^{*T} D x^* = Q(x).$$

5.1 Převedení na LCP

Věta 34 *Nechť D je symetrická pozitivně semidefinitní. Potom x^* je optimální řešení (QP), právě když je optimálním řešením úlohy lineárního programování*

$$\min \left\{ (Dx^* + c)^T x; Ax \geq b, x \geq 0 \right\}. \tag{LP}$$

Důkaz Nechť x^* je optimální řešení (QP). Potom pro libovolné přípustné řešení x (QP) a libovolné $\lambda \in [0, 1]$ z konvexity množiny přípustných řešení plyne

$$
\begin{aligned}
Q(x^*) \quad &\leq \quad Q(x^* + \lambda(x - x^*)) = Q(x^*) + (Dx^* + c)^T \lambda(x - x^*) + \frac{1}{2}\lambda^2 (x - x^*)^T D(x - x^*) \\
&\Rightarrow \quad (Dx^* + c)^T (x - x^*) + \frac{1}{2}\lambda(x - x^*)^T D(x - x^*) \geq 0 \quad \forall \lambda \in (0, 1] \\
&\Rightarrow \quad (Dx^* + c)^T (x - x^*) \geq 0 \Rightarrow (Dx^* + c)^T x^* \leq (Dx^* + c)^T x
\end{aligned}
$$

kde x je libovolné přípustné řešení (LP) $\Rightarrow$ x^* optimální řešení (LP). Naopak, nechť x^* je optimální řešení (LP). Potom pro libovolné přípustné řešení (QP) je

$$
Q(x) = Q(x^*) + (Dx^* + c)^T (x - x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T D(x - x^*) \geq Q(x^*),
$$

tedy x^* je optimální řešení (QP). ■

Věta 35 *Nechť D je symetrická pozitivně semidefinitní. Potom x^* je optimálním řešením (QP) právě když existuje p^* tak, že $z = \begin{pmatrix} x^* \\ p^* \end{pmatrix}$ je řešením problému lineární komplementarity*

$$
\begin{aligned}
&y = Mz + q \\
&y \geq 0, z \geq 0 \\
&y^T z = 0
\end{aligned}
\qquad (\mathrm{LCP_{QP}})
$$

kde

$$
M = \begin{pmatrix} D & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix}
$$

Důkaz 1) Nechť x^* je optimální řešení (QP), potom je i optimální řešení

$$
\min \left\{ (Dx^* + c)^T x; Ax \geq b, x \geq 0 \right\}
$$

a tedy existuje optimální řešení duální úlohy (ozn. p^*)

$$
\max \left\{ b^T p; A^T p \leq Dx^* + c, p \geq 0 \right\},
$$

tedy platí $Ax^* \geq b$, $x^* \geq 0$, $Dx^* + c - A^T p^* \geq 0, p^* \geq 0$,

$$
p^{*T}(Ax^* - b) = 0,
$$

$$x^{*T}(Dx^* + c - A^T p^*) = 0.$$

Označíme-li

$$z = \begin{pmatrix} x^* \\ p^* \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} Dx^* - A^T p^* + c \\ Ax^* - b \end{pmatrix},$$

je $y \geq 0$, $z \geq 0$, $y^T z = 0$ a

$$y = \begin{pmatrix} D & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix}$$

tj. x^*, p^* splňují (LCP$_{\mathrm{QP}}$). Naopak, je-li to tak, je

$$Dx^* - A^T p^* + c \geq 0, \quad Ax^* - b \geq 0, \quad x^* \geq 0, \quad p^* \geq 0,$$

$$x^{*T}(Dx^* - A^T p^* + c) = 0 = p^{*T}(Ax^* - b),$$

což jsou podmínky optimality pro (LP) a úlohu k ní duální. Tedy x^* řeší (LP) a podle předchozí věty i (QP). ■

5.2 Algoritmus

Matice $M = \begin{pmatrix} D & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$ splňuje

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} D & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Dx - A^T p \\ Ax \end{pmatrix} = x^T D x \geq 0$$

je tedy pozitivně semidefinitní a podle důsledku lemmatu 4 je kopozitivní plus.

Věta 36 *Nechť D je symetrická pozitivně semidefinitní. Potom:*

1. *Má-li (QP) optimální řešení, potom se nalezne Lemkeho algoritmem aplikovaným na úlohu (LCP$_{\mathrm{QP}}$) [tj. nenastane "ray termination"].*

2. *Nastane-li při řešení (LCP$_{\mathrm{QP}}$) "ray termination", potom buď (QP) nemá přípustné řešení, nebo je účelová funkce na množině přípustných řešení (QP) neomezená.*

Poznámka Přípustnost lze testovat fází I simplexového algoritmu. Tedy existují 3 možnosti ukončení jako u lineárního programování.

Důkaz Protože $\begin{pmatrix} D & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$ je kopozitivní plus, má-li (QP) optimální řešení, potom i ($\mathrm{LCP_{QP}}$) má řešení, tedy se nalezne Lemkeho algoritmem.

Nechť tedy skončí v "ray termination" a předpokládejme, že (QP) je přípustný. Dokážeme, že (QP) je v tom případě neomezený. Jelikož končí v "ray termination", nemá podle věty o Lemkeho algoritmu soustava

$$y = \begin{pmatrix} D & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \geq 0,$$

tj. soustava

$$\begin{pmatrix} I & 0 & -D & A^T \\ 0 & I & -A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \geq 0$$

řešení. To podle Farkasovy věty znamená, že existují d_1, d_2, že

$$d_1 \geq 0,\ d_2 \geq 0, \quad -Dd_1 - A^T d_2 \geq 0, \quad Ad_1 \geq 0, \quad c^T d_1 - b^T d_2 < 0,$$

tj.

$$Dd_1 + A^T d_2 \leq 0, \quad Ad_1 \geq 0, \quad c^T d_1 - b^T d_2 < 0, \quad d_1 \geq 0,\ d_2 \geq 0.$$

Dokážeme, že

$$Dd_1 = 0, \quad c^T d_1 < 0.$$

Především

$$0 \geq d_1^T (Dd_1 + A^T d_2) = \underbrace{d_1^T D d_1}_{\geq 0} + \underbrace{(Ad_1)^T}_{\geq 0} \underbrace{d_2}_{\geq 0} \geq 0$$

$\Rightarrow d_1^T D d_1 = 0 \Rightarrow Dd_1 = 0 \Rightarrow A^T d_2 \leq 0$. Dále z přípustnosti $Ax \geq b$, $x \geq 0$, plyne opět podle Farkasovy věty, $(\forall y)(A^T y \geq 0, y \leq 0 \Rightarrow b^T y \geq 0)$, tj. $(\forall y)(A^T y \leq 0, y \geq 0 \Rightarrow b^T y \leq 0)$. Protože $A^T d_2 \leq 0$, $d_2 \geq 0$, je $b^T d_2 \leq 0$, tedy z $c^T d_1 - b^T d_2 < 0$ plyne $c^T d_1 < b^T d_2 \leq 0 \Rightarrow c^T d_1 < 0$.

Nyní, z přípustnosti plyne, že $Ax \geq b$, $x \geq 0$ má řešení $x_0 \geq 0$. Potom $A(x_0 + \lambda d_1) = Ax_0 + \lambda A d_1 \geq Ax_0 \geq b$, $x_0 + \lambda d_1 \geq 0$, tedy $x_0 + \lambda d_1$ je přípustné $\forall \lambda \geq 0$ a

$$\begin{aligned} Q(x_0 + \lambda d_1) &= Q(x_0) + (Dx_0 + c)^T \lambda d_1 + \frac{1}{2}\lambda^2 d_1^T D d_1 = \\ &= Q(x_0) + \lambda c^T d_1 \overset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} -\infty, \end{aligned}$$

tedy Q je na $\{x_0 + \lambda d_1; \lambda \geq 0\}$ neomezená zdola. ■

Jsou tedy možná 3 různá ukončení.

Algoritmus

1. Sestav ($\mathrm{LCP}_{\mathrm{QP}}$) a řeš Lemkeho algoritmem.
2. Algoritmus dává řešení $z^* = \begin{pmatrix} x^* \\ p^* \end{pmatrix}$ - stop: x^* je optimální řešení.
3. Skončí-li v "ray termination", ověř neprázdnost množiny přípustných řešení X fází I simplexového algoritmu.
4. $X \neq \emptyset$ - stop: (QP) neomezená.
5. $X = \emptyset$ - stop: úloha nepřípustná.

Kapitola 6

Konvexní množiny a funkce

6.1 Konvexní množiny

Úvod: značení vektorů (sloupcové), $x^T y$, $(AB)^T = B^T A^T$.

Normy: 1) $\| x \| \geq 0$ & $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, 2) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$, 3) $\| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \|$.

Příklady: $\| x \|_1 = \sum\limits_i x_i$, $\| x \|_2 = \sqrt{x^T x}$, $\| x \|_\infty = \max\limits_i |x_i|$.

Tvrzení: zobrazení $x \longmapsto \| x \|$ je spojité. **D.:** $| \, \| x \| - \| y \| \, | \leq \| x - y \|$

Věta o nabývání inf, sup na kompaktní množině

Věta 37 *Jsou-li $\| x \|_\alpha$, $\| x \|_\beta$ libovolné normy v R^n, potom existují konstanty $c > 0$, $d > 0$ takové, že*

$$c \| x \|_\beta \leq \| x \|_\alpha \leq d \| x \|_\beta$$

pro každé $x \in R^n$.

Důkaz Nechť $d = \max\limits_{\| x \|_\beta = 1} \| x \|_\alpha$. Nejdřív pro $\| x \|_\beta = \| x \|_2$: $\{x; \| x \|_2 = 1\}$ je kompaktní, tedy se nabývá; $\forall x \neq 0$, $\| \frac{x}{\| x \|_2} \|_2 = 1 \Rightarrow \| \frac{x}{\| x \|_2} \|_\alpha \leq d \Rightarrow \| x \|_\alpha \leq d \| x \|_2$ podobně dolní mez. Nyní

$$\begin{aligned} c \| x \|_2 &\leq \| x \|_\alpha \leq d \| x \|_2 \\ c \| x \|_2 &\leq \| x \|_\beta \leq d' \| x \|_2 \\ \frac{c}{d} \| x \|_\beta &\leq \| x \|_\alpha \leq \tfrac{d}{c} \| x \|_\beta \end{aligned}$$

■

Důsledek: Konvergence v R^n nezávisí na normě ($\| x_n - x^* \|_\alpha \to 0 \Rightarrow \| x_n - x^* \|_\beta \to 0$). Obvykle proto používáme eukleidovskou normu.

Okolí: $B(x,\varepsilon) = \{x'; \| x' - x \|_2 < \varepsilon\}$. $x \in C^0$: ex. $\varepsilon > 0$, že $B(x,\varepsilon) \subset C$. $x \in \mathrm{Ext}(C)$: ex. $\varepsilon > 0$, že $B(x,\varepsilon) \cap C = \emptyset$. Jinak ∂C (hranice). $\overline{C} = C \cup \partial C$.

$\overline{x,y} = \{x + t(y-x); t \in [0,1]\} = \{ty + (1-t)x; t \in [0,1]\} = \{\lambda y + \mu x; \lambda + \mu = 1, \lambda \geq 0, \mu \geq 0\}$. $C \subset R^n$ se nazývá konvexní, jestliže $x \in C$, $y \in C \Rightarrow \overline{x,y} \subset C$. Evidentní: průnik konvexních je konvexní, sjednocení obecně ne.

Věta 38 *Je-li C konvexní, jsou i C^0 a $\overline{C}$ konvexní.*

(bez důkazu)

Věta 39 *(o oddělitelnosti konvexních množin). Nechť C_1, C_2 jsou neprázdné konvexní disjunktní množiny. Potom existuje $c \neq 0$ a číslo α tak, že*

$$\forall x_1 \in C_1 \ \ \forall x_2 \in C_2, \qquad c^T x_1 \geq \alpha \geq c^T x_2 \qquad (\text{lze i bez } \alpha)$$

Jinými slovy C_1, C_2 patří do opačných poloprostorů oddělených nadrovinou $\{x; c^T x = \alpha\}$.

Důkaz 1) Nechť $C_2 = \{a\}$, $a \notin \overline{C}_1$. Zvolme $b \in C_1$, potom $\{x; \| x - a \| \leq \| b - a \| \} \cap \overline{C}_1 = B(a; \| b - a \|) \cap \overline{C}_1$ kompaktní, tedy funkce $\| x - a \|$ na ní nabývá infima x^*, tj.

$$\| x^* - a \| = \min \left\{ \| x - a \|; x \in \overline{C}_1 \right\}.$$

Nechť $x \in \overline{C}_1$, potom $\forall t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\| x^* + t(x - x^*) - a \| &\geq \| x^* - a \| \\
\| x^* - a + t(x - x^*) \|^2 &\geq \| x^* - a \|^2 \\
(x^* - a + t(x - x^*))^T (x^* - a + t(x - x^*)) &\geq (x^* - a)^T (x^* - a) \\
t^2 \| x - x^* \|^2 + 2t(x - x^*)^T (x^* - a) &\geq 0 \\
t \| x - x^* \|^2 + 2(x - x^*)^T (x^* - a) &\geq 0 \qquad \forall t \in (0,1) \\
\frac{1}{2} \lim_{t \to 0_+} \left(t \| x - x^* \|^2 + 2(x - x^*)^T (x^* - a) \right) = (x - x^*)^T (x^* - a) &\geq 0
\end{aligned}$$

Položíme-li tedy $c := x^* - a$, je

$$c^T x \geq c^T x^* \quad \forall x \in \overline{C}_1, \quad \text{tedy i} \quad \forall x \in C_1$$

ale

$$(x^* - a)^T (x^* - a) = c^T (x^* - a) \geq 0 \ \Rightarrow \ c^T x^* \geq c^T a \ \ \Rightarrow c^T x \geq c^T a.$$

2) Nechť $C_2 = \{a\}$, $a \in \partial C_1$. Potom existuje posloupnost bodů $a_n \in \mathrm{Ext}(C)$, $a_n \to a$. Ke každému existuje c_n, že

$$(\forall x \in C_1) \quad c_n^T x \geq c_n^T a_n$$

znormováním lze předpokládat $\| c_n \| = 1$. Existuje vybraná posloupnost $\{c_{n_k}\} \to c$, pak $\| c \| = 1$ a $\forall x \in C_1$ limitním přechodem

$$c^T x \geq c^T a.$$

3) Nechť $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Potom $C := C_1 - C_2 = \{x_1 - x_2; x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$ je konvexní $[\lambda_1(x_1 - x_2) + \lambda_2(y_1 - y_2) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1) - (\lambda_1 x_2 + \lambda_2 y_2) \in C_1 - C_2]$ a $0 \notin C_1 - C_2$. Tedy existuje $c \neq 0$, že $x \in C \Rightarrow c^T x \geq c^T 0 = 0$, tj. $x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_2 \Rightarrow x_1 - x_2 \in C \Rightarrow c^T(x_1 - x_2) \geq 0 \Rightarrow c^T x_1 \geq c^T x_2$. ■

Věta 40 *(Farkas). Nechť $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$. Potom soustava*

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

má řešení právě když platí

$$(\forall y)(A^T y \geq 0 \;\Rightarrow\; b^T y \geq 0)$$

neboli nemá řešení právě když

$$(\exists y)(A^T y \geq 0 \;\&\; b^T y < 0).$$

Důkaz 1) Má-li řešení x, potom $\forall y$, $A^T y \geq 0$, $b^T y = b^T A x = x^T A^T y \geq 0$.

2) Naopak nechť soustava nemá řešení. To znamená, že

$$b \notin C := \{Ax; x \geq 0\}.$$

Tedy existuje vektor c - označme ho zde y - takový, že

$$(\forall z \in C)(y^T z > y^T b)$$

tj.

$$(\forall x \geq 0)(y^T A x > y^T b)$$

spec. pro $x = 0$ dostáváme $y^T b < 0$, tudíž z $(A^T y)^T x \geq 0$ $\forall x \geq 0$ musí být $A^T y \geq 0$ (je-li $(A^T y)_j < 0$, volíme $x = \lambda e_j \geq 0$, potom $\lim_{\lambda \to \infty} (A^T y)^T x - \infty$). Tedy $A^T y \geq 0$ a $b^T y < 0$, spor. ■

Důsledek $Ax \leq b$ má řešení právě když

$$(\forall y \geq 0)(A^T y = 0 \;\Rightarrow\; b^T y \geq 0)$$

Důkaz $Ax \leq b$ má řešení $\Leftrightarrow$ $A(x_1 - x_2) + x_3 = b$, $x_{1,2,3} \geq 0$ má řešení, $\Leftrightarrow$ $(\forall y)(A^T y \geq 0, A^T y \leq 0, y \geq 0 \Rightarrow b^T y \geq 0)$. ■

Věta 41 *(Jordan) Nechť* $A \in R^{m\times n}$, $b \in R^m$. *Potom soustava*

$$Ax < b$$

má řešení právě když

$$(\forall y)(A^T y = 0,\ y \geq 0,\ y \neq 0 \Rightarrow b^T y \geq 0).$$

Důkaz 1) Má-li řešení a je-li $A^T y = 0$, $y \geq 0$, $y \neq 0$, potom $0 < y^T(b - Ax) = y^T b - (A^T y)^T x = y^T b$.

2) Nechť $Ax < b$ nemá řešení. Nechť $C_1 = \{Ax; x \in R^n\}$, $C_2 = \{z; z < b\}$, neprázdné disjunktní konvexní, tedy existuje $y \neq 0$, že $y^T Ax \geq y^T z$ $\forall x \in R^n$ $\forall z < b$. $(A^T y)_j \neq 0 \Rightarrow$ volbou $x = \pm\lambda e_j$ není splněno, tedy $A^T y = 0$. Kdyby $y_j < 0$, volme $z = \lambda e_j$, $\lambda \to -\infty$. Tedy $y \geq 0$. Pro $x = 0 : 0 \geq y^T z$ $\forall z < b$, tedy $\lim\limits_{z \to b_-}$ dává $0 \geq y^T b$. ■

6.2 Pozitivně (semi)definitní matice

Matice A se nazývá pozitivně (semi)definitní jestliže $x^T Ax \geq 0$ $\forall x$ ($x^T Ax > 0$ $\forall x \neq 0$). A je symetrická, jestliže $A^T = A$. Protože $x^T Ax = x^T \left(\frac{1}{2}(A + A^T)\right) x$ $\forall x$, lze se zabývat pouze vyšetřováním symetrických matic.

Věta 42 *(Sylvester). Symetrická matice A je pozitivně definitní právě když*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

pro $k = 1, \dots, n$.

Věta 43 *Nechť A je pozitivně semidefinitní a nechť*

$$x^T Ax = 0$$

pro jisté x. Potom

$$(A + A^T)x = 0.$$

Důkaz a) Nechť A je symetrická. Potom $\forall \lambda \in R^1$

$$(\lambda x + Ax)^T A(\lambda x + Ax) \geq 0$$

tj.

$$\begin{aligned}(\lambda x + Ax)^T(\lambda Ax + A^2 x) &= \lambda^2 x^T Ax + \lambda x^T A^2 x + \lambda (Ax)^T Ax + (Ax)^T A^2 x \geq 0 \\ &= \lambda^2 x^T Ax + 2\lambda \parallel Ax \parallel^2 + (Ax)^T A^2 x \\ &= 2\lambda \parallel Ax \parallel^2 + x^T A^3 x \geq 0 \quad \forall \lambda \in R^1\end{aligned}$$

$\Rightarrow \parallel Ax \parallel = 0 \Rightarrow Ax = 0$

b) A obecná: $x^T Ax = 0 \Rightarrow x^T \left(\frac{1}{2}(A + A^T)\right) x = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(A + A^T)x = 0.$ ■

Věta 44 *Symetrická matice A má pouze reálná vlastní čísla a pro její nejmenší a největší vlastní číslo platí*

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(A) &= \min_{\|x\|_2 = 1} x^T Ax \\ \lambda_{\max}(A) &= \max_{\|x\|_2 = 1} x^T Ax.\end{aligned}$$

Důkaz $A(x_1 + x_2 i) = (\lambda_1 + \lambda_2 i)(x_1 + x_2 i) \Rightarrow (x_1 - x_2 i)^T A(x_1 + x_2 i) = (\lambda_1 + \lambda_2 i)(x_1^T x_1 + x_2^T x_2)$

$$\lambda_1 + \lambda_2 i = \frac{x_1^T Ax_1 + x_2^T Ax_2 + (x_1^T Ax_2 - x_2^T Ax_1)i}{x_1^T x_1 + x_2^T x_2}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{x_1^T Ax_2 - x_1^T A^T x_2}{x_1^T x_1 + x_2^T x_2} = 0.$$

Je-li $Ax = \lambda x$, $\parallel x \parallel_2 = 1$, potom $\lambda = x^T Ax \leq \max_{\|x\|_2 = 1} x^T Ax$. Nechť $\mu = \max_{\|x\|_2 = 1} x^T Ax$. Potom $x^T Ax \leq \mu$ $\forall x$, $\parallel x \parallel_2 = 1$; tj. $\left(\frac{x}{\|x\|}\right)^T A \left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq \mu \Rightarrow x^T Ax \leq \mu x^T x$ $\Rightarrow x^T(\mu I - A)x \geq 0 \Rightarrow \mu I - A$ je pozitivně semidefinitní a existuje x_0, že $x_0^T(\mu I - A)x_0 = 0 \Rightarrow (\mu I - A)x_0 = 0$, $Ax_0 = \mu x_0 \Rightarrow \mu$ je vlastní číslo A, tedy největší. Navíc, x je vlastní vektor příslušný k $\lambda_{\max}(A)$ právě když $\lambda_{\max}(A) = \frac{x^T Ax}{x^T x}$. ■

Důsledek Symetrická matice je pozitivně (semi)definitní právě když všechna její vlastní čísla jsou kladná (nezáporná), tj. $\lambda_{\min}(A) > 0$, resp. ≥ 0.

6.3 Konvexní funkce

Funkce f je *konvexní* v konvexní množině $X \subseteq R^n$, jestliže $\forall x_1, x_2 \in X\ \forall \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ f(\lambda x_1 + \lambda x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$.

Příklad $f(x) = x^2$.

Věta 45 *(Jenssenova nerovnost). Nechť f je konvexní v X, nechť $x_1, \ldots, x_m \in X$, $\lambda_i \geq 0\ \forall i$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Potom*

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i).$$

Důkaz indukcí podle m: pro $m = 1$ a $m = 2$ zřejmě platí. Nechť $m > 2$ a $\lambda_1 < 1$, pak

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{1}^{m} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)\sum_{i=2}^{m} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} x_i\right) \\ &\leq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f\left(\sum_{i=2}^{m} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} x_i\right) \\ &\leq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1)\sum_{i=2}^{m} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} f(x_i) = \sum_{1}^{m} \lambda_i f(x_i). \end{aligned}$$

∎

Vlastnosti
1) f, g konvexní, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0 \Rightarrow \alpha f + \beta g$ konvexní
2) f, g konvexní $\Rightarrow \max\{f, g\}$ konvexní
3) f konvexní, $\alpha \in R^1 \Rightarrow \{x; f(x) \leq \alpha\}$ konvexní množina

Věta 46 *Je-li f konvexní v X, potom je spojitá v X^0.*

(bez důkazu); příklad: $f(x) = x$ pro $x \in [0, 1)$, $f(1) = 2$ je konvexní, ale není spojitá v $[0, 1]$.

Značení: $C(X)$, $C^1(X)$, $C^2(X)$ třída funkcí spojitých v X majících 1. resp. 2. parciální derivace v X, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$ gradient, $H = \nabla^2 f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ hessián.

Věta 47 *Nechť X je otevřená konvexní množina, $f \in C^1(X)$. Potom f je konvexní v X právě když*

$$f(x) + (y - x)^T \nabla f(x) \leq f(y) \tag{6.1}$$

pro každé $x, y \in X$.

Důkaz $\Rightarrow$: $\forall \lambda \in [0,1]$ platí $f(x+\lambda(y-x)) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$, tj.

$$\frac{f(x+\lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x)$$

$\lim\limits_{\lambda \to 0_+}$ dává $(y-x)^T \nabla f(x) \leq f(y) - f(x)$, což je (6.1).

$\Leftarrow$ Nechť to platí a nechť $x, y \in X$, $z = \lambda_1 x + \lambda_2 y$, $\lambda_{1,2} \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Potom

$$\begin{array}{rcll} f(z) + (y-z)^T \nabla f(z) & \leq & f(y) & / \cdot \lambda_2 \\ f(z) + (x-z)^T \nabla f(z) & \leq & f(x) & / \cdot \lambda_1 \end{array}$$

$$f(z) + (\lambda_1 x + \lambda_2 y - z)^T \nabla f(z) \quad \leq \quad \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y)$$

tj.

$$f(z) = f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \leq \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y).$$

■

Věta 48 *Nechť X je otevřená konvexní množina a nechť $f \in C^2(X)$. Potom f je konvexní v X právě když $\nabla^2 f$ je pozitivně semidefinitní v každém bodě X.*

Důkaz $\Rightarrow$: Nechť $\nabla^2 f$ není pozitivně semidefinitní v jistém bodě $x \in X$, tj. existuje $d \neq 0$, že $d^T \nabla^2 f(x) d < 0$. Protože $\lim\limits_{\alpha \to 0} d^T \nabla^2 f(x+\alpha d) d = d^T \nabla^2 f(x) d < 0$, existuje vzhledem ke spojitosti $\nabla^2 f$ číslo $\alpha_0 > 0$ tak, že pro každé $\alpha \in [0, \alpha_0]$ je $d^T \nabla^2 f(x+\alpha d) d < 0$. Potom podle Taylorovy věty existuje $\alpha \in [0, \alpha_0]$, že

$$f(x+\alpha_0 d) - f(x) = \alpha_0 d^T \nabla f(x) + \frac{1}{2} \alpha_0^2 d^T \nabla^2 f(x_0 + \alpha d) d < \alpha_0 d^T \nabla f(x)$$

tj. pro $y = x + \alpha_0 d$ máme

$$f(y) < f(x) + (y-x)^T \nabla f(x),$$

spor s větou 47.

$\Leftarrow$ Je-li $\nabla^2 f$ pozitivně semidefinitní, pak $\forall x, y$ je podle Taylorovy věty

$$f(y) = f(x) + (y-x)^T \nabla f(x) + \frac{1}{2}(y-x)^T \nabla^2 f(z)(y-x) \geq f(x) + (y-x)^T \nabla f(x)$$

pro jisté $z \in \overline{x,y}$ tedy je konvexní. ■

Tvrzení Nechť D je symetrická matice. Potom $\nabla(x^T Dx + c^T x) = 2Dx + c$, $\nabla^2(x^T Dx + c^T x) = 2D$. Tudíž kvadratická funkce $x^T Dx + c^T x$ je konvexní právě když D je pozitivně semidefinitní.

Důkaz

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_i x_i(Dx)_i + \sum_i c_i x_i\right) &= \sum_{i\neq k} x_i \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_j D_{ij}x_j + (Dx)_k + x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_j D_{kj}x_j + c_k \\
&= \sum_{i\neq k} x_i D_{ik} + (Dx)_k + x_k D_{kk} + c_k = \\
&= \sum_i x_i D_{ik} + (Dx)_k + c_k = \sum_i D_{ki}x_i + (Dx)_k + c_k \\
&= 2(Dx)_k + c_k
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \nabla(x^T Dx + c^T x) = 2Dx + c$. Pak

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} = 2D_{kl} \Rightarrow \nabla^2(x^T Dx + c^T x) = 2D.$$

■

6.4 Optimalizace konvexních funkcí

Definice Nechť $f : X \to R^1$. Bod x^* je globální minimum f v X, jestliže $f(x^*) \leq f(x)$ $\forall x \in X$. (Nazývá se optimální řešení.) Nazývá se lokální minimum, jestliže existuje $\varepsilon > 0$, že $f(x^*) \leq f(x)$ $\forall x \in B(x^*, \varepsilon) \cap X$.

Tvrzení Nechť f je spojitá v X a nechť pro jisté $x_0 \in X$ je množina

$$L(x_0) = \{x \in X; f(x) \leq f(x_0)\}$$

kompaktní. Potom f má globální minimum v X.

Důkaz $L(x_0) \neq \emptyset$, protože $x_0 \in L(x_0)$. Protože f je spojitá v $L(x_0)$, nabývá v ní minima: existuje $x^* \in L(x_0)$, že $f(x^*) = \min\{f(x); x \in L(x_0)\}$. Nyní, nechť $x \in X$; a) je-li $f(x) > f(x_0)$, potom $f(x) > f(x_0) \geq f(x^*)$, b) je-li $f(x) \leq f(x_0)$, je $x \in L(x_0)$, tedy $f(x) \geq f(x^*)$. V obou případech $f(x) \geq f(x^*)$, tedy x^* je globální minimum f v X. ■

Věta 49 *Nechť f je konvexní v konvexní množině X. Potom každé její lokální minimum je rovněž globálním minimem.*

Důkaz Nechť jisté lokální minimum x^* není globální, tj. existuje $y \in X$, že $f(y) < f(x^*)$. Potom $\forall \lambda \in (0, 1]$ je

$$f(x^* + \lambda(y - x^*)) \leq f(x^*) + \lambda(f(y) - f(x^*)) < f(x^*),$$

tedy v každém okolí x^* existuje bod z X s menší hodnotou, tj. x^* není lokální minimum. ■

Věta 50 *Nechť f je konvexní v konvexní množině X. Potom množina všech globálních minim je konvexní.*

Důkaz Nechť $f(x^*) = f(x^{**}) = \min_X f(x)$. Potom $\forall\lambda \in [0,1]$ platí

$$\begin{aligned} & f(x^* + \lambda(x^{**} - x^*)) \leq f(x^*) + \lambda(f(x^{**}) - f(x^*)) = f(x^*) \\ \Rightarrow\quad & f(x^* + \lambda(x^{**} - x^*)) = f(x^*) \end{aligned}$$

$\Rightarrow x^* + \lambda(x^{**} - x^*)$ je globální minimum $\forall\lambda \in [0,1]$. ■

Věta 51 *Je-li X konvexní polyedr a f je konvexní v X, potom*

$$\max_X f(x) = f(\hat{x})$$

pro jistý vrchol $\hat{x}$ polyedru X.

Důkaz Nechť $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m$ jsou vrcholy X. Protože X je konvexním obalem svých vrcholů, existují ke každému $x \in X$ čísla $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ taková, že $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i \hat{x}_i$, a podle Jenssenovy nerovnosti (věta 45)

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \hat{x}_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(\hat{x}_i) \leq \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i\right) \max_i f(\hat{x}_i) = \max_i f(\hat{x}_i) = f(\hat{x}_j)$$

kde $f(\hat{x}_j) = \max_i f(\hat{x}_i)$, tedy $\max_X f(x) = f(\hat{x}_j)$. ■

Kapitola 7

Teorie nelineárního programování

7.1 Úlohy bez vazeb

Věta 52 *Nechť $X \subseteq R^n$ je otevřená, $f \in C^1(X)$, a nechť x^* je lokální minimum f v X. Potom*

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Důkaz Platí

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x^* - \alpha \nabla f(x^*)) - f(x^*)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} (-\nabla f(x^*)^T \nabla f(\xi)) = - \parallel \nabla f(x^*) \parallel_2^2 .$$

Kdyby $\nabla f(x^*) \neq 0$, je $\lim \ldots < 0$, tedy pro dostatečně malé $\alpha > 0$ je $x^* - \alpha \nabla f(x^*) \in X$ a $f(x^* - \alpha \nabla f(x^*)) < f(x^*) \Rightarrow x^*$ není lokální minimum. ■

Definice Bod x^*, pro který $\nabla f(x^*) = 0$, se nazývá stacionární bod.

Věta 53 *Nechť $X \subseteq R^n$ je otevřená konvexní množina a nechť $f \in C^1(X)$ je konvexní. Potom $x^* \in X$ je globální (= lokální) minimum f v X, právě když*

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Důkaz Podle předchozí věty je podmínka nutná. Je-li $\nabla f(x^*) = 0$, potom podle charakteristiky konvexní funkce (věta 47) platí $\forall x \in X$

$$f(x^*) + (x - x^*)^T \nabla f(x^*) \leq f(x)$$

tj. $f(x^*) \leq f(x)$, čili x^* je globální minimum. ■

Věta 54 *Nechť X je otevřená, $f \in C^2(X)$ a nechť x^* je lokální minimum f v X. Potom $\nabla^2 f(x^*)$ je pozitivně* semidefinitní.

Důkaz Nechť není, tj. existuje d, že $d^T \nabla^2 f(x^*) d < 0$. Potom

$$\begin{aligned} f(x^* + \alpha d) &= f(x^*) + \alpha d^T \nabla f(x^*) + \frac{1}{2}\alpha^2 d^T \nabla^2 f(x^*) d + o(\alpha^2) \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2}\alpha^2 d^T \nabla^2 f(x^*) d + o(\alpha^2) \end{aligned}$$

tj.

$$f(x^* + \alpha d) - f(x^*) = \alpha^2 \left(\frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d + \frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2} \right)$$

a jelikož $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2} = 0$, je $f(x^* + \alpha d) - f(x^*) < 0$ pro dodatečně malé α, tedy x^* není lokální minimum. ■

Věta 55 *Nechť X je otevřená, $f \in C^2(X)$ a nechť pro jisté $x^* \in X$ platí $\nabla f(x^*) = 0$ a $\nabla^2 f(x^*)$ je pozitivně* definitní. *Potom x^* je [ostré] lokální minimum f v X.*

Důkaz Pro každé $x^* + d$ je

$$\begin{aligned} f(x^* + d) &= f(x^*) + d^T \nabla f(x^*) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d + o(\| d \|_2^2) \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d + o(\| d \|_2^2) \\ &= f(x^*) + \| d \|_2^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d}{\| d \|_2} \right)^T \nabla^2 f(x^*) \frac{d}{\| d \|_2} + \frac{o(\| d \|_2^2)}{\| d \|_2^2} \right). \end{aligned}$$

Platí

$$\left(\frac{d}{\| d \|_2} \right)^T \nabla^2 f(x^*) \left(\frac{d}{\| d \|_2} \right) \geq \lambda_{\min} \left(\nabla^2 f(x^*) \right) > 0$$

a protože $\lim\limits_{\|d\| \to 0} \frac{o(\|d\|_2^2)}{\|d\|_2^2} = 0$, je $\frac{o(\|d\|_2^2)}{\|d\|_2^2} \leq \frac{1}{2} \lambda_{\min}(\nabla^2 f(x^*))$ pro dost malá $\| d \|_2$. Pro tato d je potom $f(x^* + d) > f(x^*)$, tedy x^* je ostré lokální minimum. ■

7.2 Úlohy s vazbami

7.2.1 Věta Fritze Johna

Nyní se budeme zabývat obecnou úlohou

$$\min\{f(x);\ g(x) \le 0,\ h(x) = 0, x \in X\} \tag{NLP}$$

kde $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))^T$ je vektorová funkce, stejně tak $h(x) = (h_1(x), \dots, h_p(x))^T$, $X \subseteq R^n$ (obvykle se bere $X = R^n$). Pro $\alpha \in R^1$ definujme $\alpha^+ = \max\{\alpha, 0\}$, takže $\alpha \le 0 \Leftrightarrow \alpha^+ = 0$. To umožňuje převádět nerovnosti na rovnice: $g^+(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) \le 0$ a $g^+(x) = 0 \Leftrightarrow \| g^+(x) \|_2^2 = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \| h(x) \|^2 = \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i h_i^2(x) = \sum_i 2h_i(x) \frac{\partial h_i}{\partial x_k}$$

Je-li $g_i^+(x) < 0$: v okolí $g_i(x) < 0$, tedy $g_i^+(x) = 0$, $\frac{\partial}{\partial x_k} g_i^{+2}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} 0 = 0$ a přitom $2g_i^+(x) \nabla g_i(x) = 0 = \frac{\partial}{\partial x_k} g_i^{2+}(x)$. Je-li $g_i(x) = 0$, tj. $g_i^+(x) = 0$, tj.

$$g_i^{+2}(x) = \begin{cases} g_i^2(x) & \text{pro} \quad g_i(x) < 0 \\ 0 & \text{pro} \quad g_i(x) = 0 \end{cases}$$

Věta 56 *(Fritz John, někdy Karush-John). Nechť $f, g, h \in C^1(X)$ a nechť $x^* \in X$ je lokální optimum úlohy*

$$\min\{f(x);\ g(x) \le 0, h(x) = 0, x \in X\}.$$

Potom existují $\nu \in R^1$, $\lambda \in R^m$, $\mu \in R^p$, $(\nu, \lambda, \mu) \ne 0$ tak, že

$$\begin{aligned} \nabla(\nu f + \lambda^T g + \mu^T h)(x^*) &= 0 \\ \lambda^T g(x^*) &= 0 \\ \nu \ge 0,\ \lambda &\ge 0. \end{aligned}$$

Důkaz Označme $F = \{x; g(x) \le 0, h(x) = 0, x \in X\}$. Protože x^* je lokální optimum, existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\overline{B(x^*, \varepsilon)} \subset X$ a $f(x^*) \le f(x)$ pro každé $x \in \overline{B(x^*, \varepsilon)} \cap F$. Pro každé přirozené k definujme

$$f_k(x) = f(x) + k\left(\| g^+(x) \|^2 + \| h(x) \|^2\right) + \| x - x^* \|^2, \quad x \in X.$$

Potom f_k je spojitá v $\overline{B(x^*, \varepsilon)}$, tedy tam nabývá minima v jistém bodě x_k. Potom $f_k(x_k) \le f_k(x^*) = f(x^*)$, tedy

$$f(x_k) + k\left(\| g^+(x_k) \|^2 + \| h(x_k) \|^2\right) + \| x_k - x^* \|^2 \le f(x^*) \tag{7.1}$$

a odtud

$$\| g^+(x_k) \|^2 + \| h(x_k) \|^2 \leq \frac{1}{k} \left(f(x^*) - f(x_k) - \| x_k - x^* \|^2 \right).$$

Protože $x_k \in \overline{B(x^*, \varepsilon)}$, existuje vybraná posloupnost $x_{k_j} \to \tilde{x} \in \overline{B(x^*, \varepsilon)}$. Jelikož čitatel napravo je omezený, jde k 0 pro $k \to \infty$, tedy

$$0 \leq \| g^+(\tilde{x}) \|^2 + \| h(\tilde{x}) \|^2 \leq 0$$

$\Rightarrow \| g^+(\tilde{x}) \| = \| h(\tilde{x}) \| = 0 \Rightarrow \tilde{x} \in F$ a $\| \tilde{x} - x^* \| \leq \varepsilon$, tedy $\tilde{x} \in F \cap \overline{B(x, \varepsilon)}$. Z (7.1) plyne

$$f(x_k) + \| x_k - x^* \|^2 \leq f(x^*)$$

a limitním přechodem $f(\tilde{x}) + \| \tilde{x} - x^* \|^2 \leq 0$. Jelikož $\tilde{x} \in F \cap \overline{B(x, \varepsilon)}$, je $f(x^*) \leq f(\tilde{x})$ a tedy $f(\tilde{x}) + \| \tilde{x} - x^* \|^2 \leq f(x^*) \leq f(\tilde{x}) \Rightarrow \| \tilde{x} - x^* \|^2 \leq 0 \Rightarrow \tilde{x} = x^*$. Závěrem, existuje vybraná posloupnost, že $x_{k_j} \to x^*$. Nyní, protože $x_{k_j} \to x^*$, existuje j_0, že $j \geq j_0 \Rightarrow x_{k_j} \in B(x^*, \varepsilon)$ a jelikož f_{k_j} nabývá minima v bodě x_{k_j}, je

$$\nabla f_k(x_k) = 0 \quad \text{(píšeme } k \text{ místo } k_j).$$

Tj. z definice f_k dostáváme

$$\nabla f_k(x_k) = \nabla f(x_k) + \sum_j 2k g_j^+(x_k) \nabla g_j(x_k) + \sum_i 2k h_i(x_k) \nabla h_i(x_k) + 2(x_k - x^*) = 0.$$

Položme

$$\omega_k = \max \left\{ \max_j 2k g_j^+(x_k),\, \max_i 2k |h_i(x_k)|,\, 2 \right\},$$

tedy $\omega_k \geq 2$ a vydělením

$$\underbrace{\frac{1}{\omega_k}}_{\in [0, \frac{1}{2}]} \nabla f(x_k) + \sum_j \underbrace{\frac{2k g_j^+(x_k)}{\omega_k}}_{\in [0,1]} \nabla g_j(x_k) + \sum_i \underbrace{\frac{2k h_i(x_k)}{\omega_k}}_{\in [-1,1]} \nabla h_i(x_k) + \underbrace{\frac{2}{\omega_k}}_{\in [0,1]} (x_k - x^*) = 0$$

tedy existuje vybraná posloupnost, že $\frac{1}{\omega_{k_l}} \to \nu$, $\frac{2k_l g_j^+(x_{k_l})}{\omega_{k_l}} \to \lambda_j$, $\frac{2k_l h_i(x_{k_l})}{\omega_{k_l}} \to \mu_i$. Limitním přechodem tedy dostaneme

$$\nu \nabla f(x^*) + \sum_j \lambda_j \nabla g_j(x^*) + \sum_i \mu_i \nabla h_i(x^*) = 0$$

tedy

$$\nabla(\nu f + \sum_j \lambda_j g_j + \sum_i \mu_i h_i)(x^*) = 0,$$

což je první podmínka. Dále, je-li $g_j(x^*) < 0$ pro jisté j, potom $g_j(x_{k_l}) < 0$ pro dost velká l, tedy $g_j^+(x_{kl}) = 0$ a tedy $\lambda_j = 0$. Tedy pro každé j je $\lambda_j g_j(x^*) = 0$, $\Rightarrow \lambda^T g(x^*) = 0$. Dále, posloupnosti konvergující k ν a λ_j jsou nezáporné, tedy i $\nu \geq 0$, $\lambda \geq 0$. Je-li $\omega_k = 2$ pro nekonečně mnoho k, je $\nu = \frac{1}{2}$, jinak je buď $\lambda_j = 1$ nebo $\mu_i = 1$, tedy vždy $(\nu, \lambda, \mu) \neq 0$. ■

7.2.2 Kuhn-Tuckerovy podmínky

Podmínky

$$\left.\begin{array}{c}\nabla(\nu f + \lambda^T g + \mu^T h)(x^*) = 0\\ \lambda^T g(x^*) = 0\\ \nu \geq 0,\ \lambda \geq 0\end{array}\right\}\text{(PFJ)}$$

se nazývají podmínky Fritze Johna. Důležitý je zvláštní případ $\nu > 0$ (tj. $\nu \neq 0$). Potom vydělením dostáváme

$$\left.\begin{array}{c}\nabla(f + \tilde{\lambda}^T g + \tilde{\mu}^T h)(x^*) = 0\\ \tilde{\lambda}^T g(x^*) = 0\\ \tilde{\lambda} \geq 0\end{array}\right\}\text{(KTP)}$$

(Kuhn-Tuckerovy podmínky). Smysl předpokladu $\nu > 0$ lze nahlédnout dvojím způsobem: 1) pro $\nu = 0$ podmínky nic nevypovídají o minimalizované funkci f, 2) ověřování (KTP): položme $J = \{j; \lambda_j > 0\}$, potom máme

$$\begin{array}{c}\nabla(f + \sum_{j\in J} \lambda_j g_j + \sum_i \mu_i h_i)(x^*) = 0\\ g_j(x^*) = 0,\ \ j \in J\\ h_i(x^*) = 0\ \ \forall i\end{array}$$

to je $n+|J|+p$ rovnic pro $n+|J|+p$ neznámých; v případě $\nu > 0$ by bylo neznámých o 1 více než rovnic. Metoda (teoretická): vyřešit soustavu $\forall J \subseteq \{1,\dots,m\}$ a ověřit že $\lambda_j \geq 0$ pro $j \in J$, $g_j(x^*) \leq 0$ pro $j \notin J$, $x^* \in X$.
$\nu = 0$ lze dosáhnout za dodatečných podmínek (podmínky regularity).

Věta 57 *(KTP jako nutné). Nechť $f, g, h \in C^1(X)$, nechť $x^* \in X$ je lokální optimální řešení (NLP) a nechť gradienty $\nabla g_j(x^*)$, $\forall j \in J = \{j; g_j(x^*) = 0\}$, $\nabla h_i(x^*)$ $\forall i$ jsou lineárně nezávislé. Potom x^* splňuje (KTP).*

Důkaz Předpokládejme $\nu = 0$. Potom $(\lambda, \mu) \neq 0$, a platí $\nabla(\lambda^T g + \mu^T h)(x^*) = 0$. Protože $\lambda_j = 0$ pro $g_j(x^*) < 0$, platí

$$\sum_{g_j(x^*)=0} \lambda_j \nabla g_j(x^*) + \sum_i \mu_i \nabla h_i(x^*) = 0,$$

tedy jsou lineárně závislé, spor. Proto $\nu > 0$ a vydělením dostaneme (KTP). ∎

Věta 58 *(KTP jako postačující). Nechť $f, g \in C^1(X)$ jsou konvexní, $h = Ax - b$ a nechť $x^* \in F$ splňuje (KTP). Potom x^* je* globálním *optimálním řešením (NLP).*

Důkaz Především, $\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = a_{ij}$, tedy $\nabla h_i = (A)_{i-\text{tý řádek}} = (A^T)_i$ a tedy $\sum\limits_i \mu_i \nabla h_i = \sum\limits_i \mu_i (A^T)_i = A^T \mu$. Nyní, nechť $x \in F$. Protože f je konvexní, platí $f(x^*) + (x - x^*)^T \nabla f(x^*) \leq f(x)$, tedy

$$
\begin{aligned}
f(x^*) &\leq (x^* - x)^T \nabla f(x^*) + f(x) \\
&= (x - x^*)^T (\sum_j \lambda_j \nabla g_j(x^*) + \sum_i \mu_i \nabla h_i(x^*)) + \sum_j \lambda_j g_j(x^*) + f(x) = \\
&= \sum_j \lambda_j \left[g_j(x^*) + (x - x^*)^T \nabla g_j(x^*) \right] + (x - x^*)^T A^T \mu + f(x) \\
&\leq \sum_j \lambda_j g_j(x) + [A(x - x^*)]^T \mu + f(x) \leq f(x)
\end{aligned}
$$

(protože $\lambda_j \geq 0$, $g_j(x) \leq 0 \, \forall j$ a $Ax = Ax^* = b$) a tedy x^* je globálním optimum. ■

Věta 59 *Nechť $f, g \in C^1$ jsou konvexní a nechť existuje $x_0 \in X$ tak, že $g(x_0) < 0$ [Slaterova podmínka]. Potom $x^* \in X$ je globálním optimálním řešením úlohy*

$$\min\{f(x);\, g(x) \leq 0\} \tag{NLP$_0$}$$

právě když splňuje (KTP).

Důkaz ⇒ Nechť $\nu = 0$ v (PFJ). Potom $\sum\limits_j \lambda_j \nabla g_j(x^*) = 0$, a tedy

$$
\begin{aligned}
0 &= (x_0 - x^*)^T \sum_j \lambda_j \nabla g_j(x^*) + \sum_j \lambda_j g_j(x^*) = \sum_j \lambda_j \left[g_j(x^*) + (x_0 - x^*)^T \nabla g_j(x^*) \right] \\
&\leq \sum_j \lambda_j g_j(x_0) < 0
\end{aligned}
$$

neboť $\lambda_j > 0$ pro jisté j, spor.
⇐ plyne z předchozí věty. ■

7.2.3 Reformulace PFJ pomocí LP pro úlohy s nerovnostmi

Věta 60 *Nechť $f, g \in C^1$, a nechť x je přípustné řešení úlohy*

$$\min\{f(x);\, g(x) \leq 0\}. \tag{NLP$_0$}$$

Potom x je bodem Fr. Johna právě když úloha lineárního programování

$$\min\{\delta;\, d^T \nabla f(x) \leq \delta, g_j(x) + d^T \nabla g_j(x) \leq \delta \; \forall j,\ -1 \leq d_j \leq 1 \; \forall j\} \tag{LP$_\text{x}$}$$

má nulovou optimální hodnotu.

Důkaz Především ($\mathrm{LP_x}$) je omezená a $d = 0$, $\delta = 0$ je přípustné řešení, tedy $\min\{\delta; \ldots\} \leq 0$.
$\Rightarrow$ Nechť x je bodem Fr. Johna tj.

$$\nu \nabla f(x) + \sum_j \lambda_j \nabla g_j(x) = 0$$
$$\sum_j \lambda_j g_j(x) = 0$$
$$\nu \geq 0 \quad \lambda_j \geq 0 \; \forall j$$

Potom

$$\begin{aligned} 0 &= \nu d^T \nabla f(x) + \sum_j \lambda_j d^T \nabla g_j(x) + \sum_j \lambda_j g_j(x) = \\ &= \nu d^T \nabla f(x) + \sum_j \lambda_j (g_j(x) + d^T \nabla g_j(x)) \leq (\nu + \sum_j \lambda_j)\delta. \end{aligned}$$

Jestliže v optimálním řešení je $\delta < 0$, potom vzhledem k $(\nu, \lambda) \neq 0$ je $0 = \ldots < 0$, spor.
$\Leftarrow$ Nechť $\min \delta = 0$. Ukážeme nejprve, že úloha

$$\begin{aligned} d^T \nabla f(x) &< 0 \\ d^T \nabla g_j(x) &< 0, \qquad j \in J = \{j;\, g_j(x) = 0\} \end{aligned}$$

nemá řešení. Kdyby měla, potom $g_j(x) + \alpha d^T \nabla g_j(x) < 0 \; \forall j \in J$, $\forall \alpha > 0$, a lze volit $\alpha \in (0, 1)$ tak, že $g_j(x) + \alpha d^T \nabla g_j(x) < 0 \; \forall j \notin J$, $\alpha d^T \nabla f(x) < 0$, a platí $|\alpha d_j| \leq |\alpha| \cdot |d_j| \leq |d_j| \leq 1$, potom $\min \delta < 0$, spor. Tedy nemá řešení. Podle Jordanovy věty, $Ax < b$ nemá řešení $\Leftrightarrow (\exists y)\; (A^T y = 0, y \geq 0, y \neq 0 \;\&\; b^T y \leq 0)$ tedy $Ax < 0$ nemá řešení $\Leftrightarrow (\exists y)\; (A^T y = 0, y \geq 0, y \neq 0)$. Jestliže tedy

$$\begin{pmatrix} \nabla^T f(x) \\ \nabla^T g_j(x) \end{pmatrix} d < 0, \qquad j \in J$$

nemá řešení, potom existují ν, λ_j, $j \in J$, že $\nu \nabla f(x) + \sum_{j \in J} \lambda_j \nabla g_j(x) = 0$, $(\nu, \lambda) \geq 0$, $(\nu, \lambda) \neq 0$. Doplňme $\lambda_j = 0$ pro $j \notin J$, potom

$$\nu \nabla f(x) + \sum_j \lambda_j \nabla g_j(x) = 0$$

a $\lambda_j > 0 \Rightarrow j \in J \Rightarrow g_j(x) = 0$, tedy $\lambda_j g_j(x) = 0 \; \forall j$, tj. $\lambda^T g(x) = 0$. Dále $(\nu, \lambda) \geq 0$, $(\nu, \lambda) \neq 0$. Tedy x je bodem Fr. Johna. ■

7.2.4 KTP pro LP

Uvažujme úlohu (LP)

$$\min\{c^T x; Ax = b, x \geq 0\}.$$

Potom (KTP) jsou:

$$\begin{gathered}\nabla(c^T x + \lambda^T(-x) + \mu^T(b - Ax) = 0 \\ \lambda^T x = 0 \\ \lambda \geq 0\end{gathered}$$

tj.

$$\begin{gathered}c - \lambda - A^T\mu = 0 \\ \lambda^T x = 0 \\ \lambda \geq 0\end{gathered}$$

a eliminací λ:

$$\begin{gathered}A^T\mu \leq c \\ x^T(c - A^T\mu) = 0\end{gathered}$$

čili μ je duální proměnná a dostáváme obvyklé podmínky optimality (LP).