Příklady ze Základů nelineární optimalizace

(Milan Hladík, 10. října 2022)

Na zápočet potřeba aspoň 30% bodů z každé série.

(A) Série: Zobecněné konvexní funkce

1. Klasifikujte následující funkce (konvexní, kvazikonvexní, pseudokonvexní, kvazilineární, konkávní, ...):

   (a) xy na $\mathbb{R}^2_+$, **4**

   (b) $\frac{1}{xy}$ na $\mathbb{R}^2_+$, **4**

   (c) $\frac{x}{y}$ na $\mathbb{R}^2_+$, **4**

   (d) $\sqrt{x}e^{-x}$ na $\mathbb{R}_+$. **4**

   Chceme co nejpřesnější určení, to znamená například ukázat, že daná funkce je kvazikonvexní, ale už není explicitně kvazikonvexní.

2. Najděte pěkný příklad kvazikonvexní funkce. **4**

3. Ukažte takovouto jednodimenzionální charakterizaci kvazikonvexní funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Existuje $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ takové, že $f(x)$ je

   - nerostoucí na $(-\infty, a)$ a neklesající na $[a, \infty)$,
   - nebo nerostoucí na $(-\infty, a]$ a neklesající na (a, ∞). **6**

4. Buďte $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a uvažujme jejich součin $f(x) \cdot g(x)$.

   (a) Jakou funkci dostaneme, pokud f, g jsou obě konkávní a nezáporné? **4**

   (b) Jakou funkci dostaneme, pokud f, g jsou obě konvexní a nezáporné? **4**

5. Rozhodněte, jaký je vztah mezi explicitní kvazikonvexitou a pseudokonvexitou pro hladké funkce. **6**

6. Rozhodněte o platnosti tvrzení: Je-li $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pseudolineární a má inverzi, pak $f^{-1}(x)$ je též pseudolineární. **4**

(B) Série: Podmínky optimality

1. Zobecněte Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky na optimalizační úlohu včetně rovnicových omezení

$$\min f(s);\ g(x)_i \leq 0,\ h_j(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, k.$$

Rozdělme si to do několika kroků:

(a) Zobecněte Gordanovu větu na tvar: *$Ax < 0$, $Bx = 0$ neřešitelné $\Leftrightarrow$ $B^T y + A^T z = 0$, $z \geq 0$, $z \neq 0$ řešitelné.* **4**

(b) Zobecněte lemma: *Je-li x^0 je lokálním minimem, pak neexistuje $d \in \mathbb{R}^n$ tak, že $d^T \nabla f(x^0) < 0$, $d^T \nabla g_i(x^0) < 0$ $\forall i \in I(x^0)$, $d^T \nabla h_j(x^0) = 0$ $\forall j = 1, \dots, k$.* **4**

(c) Zobecněte podmínky Fritze Johna: *Je-li x^0 je lokálním minimem, pak existuje $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ a $\nu \in \mathbb{R}^k$ tak, že*

$$\begin{aligned}(\mu, \lambda) \geq 0,\ (\mu, \lambda) &\neq 0,\\ \lambda^T g(x^0) &= 0,\\ \mu \nabla f(x^0) + \lambda^T \nabla g(x^0) + \nu^T \nabla h(x^0) &= 0.\end{aligned}$$ **4**

(d) Zobecněte Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky: *Nechť x^0 je lokálním minimem a vektory $\nabla g_i(x^0)$, $i \in I(x^0)$, $\nabla h_j(x^0)$, $j = 1, \dots, k$, jsou lineárně nezávislé. Pak existuje $\lambda \in \mathbb{R}^n$ a $\nu \in \mathbb{R}^k$ tak, že*

$$\begin{aligned}\lambda &\geq 0,\\ \lambda^T g(x^0) &= 0,\\ \nabla f(x^0) + \lambda^T \nabla g(x^0) + \nu^T \nabla h(x^0) &= 0.\end{aligned}$$ **4**

2. Dokažte pozorování z přednášky: $T \subseteq G$. **6**

3. Dokažte pozorování z přednášky: $int\, G \subseteq int\, T$. **6**

4. Pomocí KKT podmínek vyřešte úlohy:

(a) max $c^T x;\ x^T A x \leq 1,\ x \in \mathbb{R}^n$, kde $c \neq 0$ a matice A je positivně definitní. **4**

(b) max $xy;\ x + y^2 \leq 2,\ x, y \geq 0$. (*Hint.* Rozborem případů z KKT podmínek.) **6**

(C) Série: Lagrangeova dualita

1. Uvažujme úlohu

$$\min\ x^TQx + q^Tx;\ x^TA_ix + a_i^Tx + b_i \leq 0,\ i = 1, \ldots, m,$$

kde $Q, A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $q, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$, $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ a navíc Q je positivně definitní a A_i jsou positivně semidefinitní. Najděte Lagrangeovu duální úlohu a kategorizujte ji. **6**

2. Rozhodněte, zda platí:

   (a) Duální úloha k duální úloze je vždy ta primární. **2**

   (b) Pro konvexní případ, duální úloha k duální úloze je vždy ta primární. **4**

3. Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Uvažujme úlohu

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{i=1,\ldots,m} (A_{i*}x + b_i).$$

   (a) Zapište úlohu jako lineární program a najděte jeho klasický duál. **2**

   (b) Najděte Lagrangeův duál pro přepis

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{i=1,\ldots,m} y_i;\ y = Ax + b.$$ **4**

   (c) Porovnejte optimální hodnotu s aproximací

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \ln(\textstyle\sum_{i=1}^m \exp(A_{i*}x + b_i)).$$ **4**

   (d) Porovnejte optimální hodnotu s aproximací ($\gamma > 0$ je parametr)

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{\gamma} \ln(\textstyle\sum_{i=1}^m \exp(\gamma(A_{i*}x + b_i))).$$ **4**

(D) Série: Semidefinitní programování

1. Přepište podmínky ve tvaru semidefinitního programu

   (a) $xy \geq 1$, $x, y \geq 0$ **2**

   (b) $x^4 + y^4 \leq 1$ **4**

2. Uvažujme neorientovaný graf $G = (V, E)$, $V = \{1, \ldots, n\}$, s intervalovými vahami na hranách $[a_{ij}, b_{ij}]$, $(i, j) \in E$, reprezentující nepřesně naměřené vzdálenosti mezi objekty $i, j \in V$. Sestavte úlohu semidefinitního programování rozhodující zda existují body $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ takové, aby vzdálenost x_i a x_j byla v intervalu $[a_{ij}, b_{ij}]$ pro $(i, j) \in E$. **4**

3. Zformulujte jako úlohu semidefinitního programování nalezení elipsy obsahující body $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$, vylučující body $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}^d$ tak, aby elipsa byla (a) co „nejkulatější“ nebo (b) měla nejmenší součet délek poloos. **4**

4. Zformulujte jako úlohu semidefinitního programování

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{i=1,\ldots,m} |\log(a_i^T x) - \log(b_i)|,$$

   což je vlastně úloha lineární regrese s maximovou normou po zlogaritmování dat. **4**

5. Uvažme 2-SAT úlohu, kde každá klauzule je disjunkcí právě dvou literálů. Najděte 0.878-aproximační metodu na maximalizaci počtu splnitelných klauzulí. **8**