Příklady z Vícekriteriální optimalizace

(Milan Hladík, 20. dubna 2020)

(A) Eficientní řešení

1. Mějme úlohu vícekriteriální optimalizace s množinou eficientních řešení $\mathcal{E}$. Jak se změní $\mathcal{E}$, když k účelovým funkcím přidáme ještě jednu navíc? (Zvětší se / zmenší se / zůstane stejná / jinak …) **4**

2. Najděte příklady úloh vícekriteriální optimalizace pro následující situace:

   (a) $\mathcal{E} \not\subseteq \bigcup_{\lambda \in \overline{S}} M_{opt}(\lambda)$, **2**

   (b) $\bigcup_{\lambda \in S} M_{opt}(\lambda) \subsetneq \mathcal{E}^v$. **2**

3. Najděte nějakou pěknou úlohu vícekriteriální optimalizace ze života, případně jinou zajímavou aplikaci a v rámci možností ji podrobně popište. **4**

(B) Konvexní VO

1. Na přednášce jsme dokázali tvrzení

$$\mathcal{E} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \overline{S}} M_{opt}(\lambda)$$

   pro konvexní úlohu vícekriteriální optimalizace. Zobecněte toto tvrzení na co největší třídu úloh. (hint: kde se používá konvexita v důkazu?) **4**

2. Uvažme vážený součet mocnin cílových funkcí:

$$\min_{x \in M} \sum_{i=1}^{s} \lambda_i f_i(x)^t,$$

   kde $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$ a $t > 0$. Za jakých podmínek každé řešení této skalární úlohy je eficientním řešením původní vícekriteriální úlohy

$$\min_{x \in M} \, (f_1(x), \dots, f_s(x))?$$

   4

3. Rozhodněte zda platí: $\mathcal{E}^v = \emptyset \;\Rightarrow \mathcal{E} = \emptyset$. **4**

(C) Lineární VO

1. Může nastat situace, kdy všechny vrcholy dané stěny jsou eficientní řešení, ale celá stěna do $\mathcal{E}$ nepatří? Může to nastat pro stěnu dimenze 1 (tj. hranu)? **2**

2. Navrhněte test jak poznat, že daná stěna je částí $\mathcal{E}$. Uvažte omezenou i neomezenou stěnu. **4**

3. Přípustné řešení $x^0 \in M$ je *slabě eficientní* pokud neexistuje jiné $x \in M$ tak, že $f(x) < f(x^0)$, tj. $f_i(x) < f_i(x^0)\ \forall i$. Zařaďte množinu slabě eficientních řešení $\mathcal{E}^w$ do hierarchie inkluzí vzhledem k $M_{opt}(\lambda)$. Speciálně, pro obecnou úlohu VP, konvexní a lineární. **10**

(D) Metody

1. Analyzujte následující skalarizaci

$$\min_{x \in M} \max_{i=1,\dots,s} f_i(x).$$

   Speciálně, prozkoumejte zda (popř. kdy) je optimální řešení eficientním pro původní úlohu, o jaký typ úlohy se jedná v lineárním a konvexním případě, případně další relevantní vlastnosti. **6**

2. Vedou následující skalarizace vždy k eficientnímu řešení (popř. za jakých podmínek)?

   (a) Buď $y_i := \max_{x \in M} f_i(x)$ a $\lambda > 0$:

$$\max \prod_{k=1}^{s} (y_k - f_k(x))^{\lambda_k} \quad \text{za podm.} \quad x \in M,\ f(x) \le y. \qquad \mathbf{4}$$

   (b) Pro libovolné $r, d \in \mathbb{R}^s$:

$$\max\ \alpha \ \ \text{za podm.}\ \ x \in M,\ f(x) - \alpha d + f = r,\ f \ge 0. \qquad \mathbf{4}$$

(E) Početní úlohy

Pro pomocné výpočty můžete použít vhodný software.

1. Mějme úlohu lineární vícekriteriální optimalizace

$$\min\,(-6x_1 - 4x_2, -x_1) \ \ \text{za podm.}\ \ x_1 + x_2 \le 100,\ 2x_1 + x_2 \le 150,\ x_1, x_2 \ge 0.$$

   (a) Najděte množinu eficientních řešení $\mathcal{E}$ i její obraz $\mathcal{E}^* = f(\mathcal{E})$. **2**

   (b) Najděte ideální bod F a aplikujte metodu globální cílové funkce s $p = 1$. **2**

   (c) Řešte úlohu pomocí ε-omezení pro $r = 2$ a $\varepsilon = 0$. Je výsledné řešení eficientní? **2**

2. Mějme 3 body v rovině $a = (1,1)$, $b = (1,4)$, $c = (4,4)$. Chceme najít bod roviny, který má minimální euklidovskou vzdálenost ke všem třem zadaným bodům.

   (a) Najděte množinu eficientních řešení $\mathcal{E}$. **2**

   (b) Řešte úlohu za předpokladu, že k bodu a chci být blíže dvakrát raději než k b, ale dvakrát méně rád než k bodu c. **2**

   (c) Řešte úlohu za předpokladu, že preference ke všem bodům a, b, c jsou vyrovnané. Dokážete výsledek zobecnit? **2**

(F) Kombinatorická VO

1. Diskutujte různé postupy pro řešení problému batohu s více kriterii. **4**

2. Navrhněte metodu na řešení dvojkriteriální úlohy obchodního cestujícího, kde první kriterium je standardní minimalizace součtu vah na cestě a druhé kriterium je minimalizace nejdelší hrany na cestě. **4**

(G) Vícekriteriální rozhodování

1. Buď $[A] = [\underline{A}, \overline{A}]$ intervalová matice. Formulujte jako lineární program úlohu nalezení konsistentní matice v $[A]$. **4**