Intervalové mocnění

David Hartman

Optimalizační seminář

Praha 2020

KAM

Group on Interval Methods

Motivace

Dynamické systémy

- Definované stavem $s(t) = (s_1(t), s_2(t), \ldots, s_n(t))$ v čase t

Motivace

Dynamické systémy

- Definované stavem $s(t) = (s_1(t), s_2(t), \ldots, s_n(t))$ v čase t
- Přeměna stavu $s(t) \to s(t+1)$ po složkách daná funkcí

$$s_i(t+1) = f_i(s_1(t), s_2(t) \ldots, s_n(t))$$

Motivace

Dynamické systémy

- Definované stavem $s(t) = (s_1(t), s_2(t), \ldots, s_n(t))$ v čase t
- Přeměna stavu $s(t) \to s(t+1)$ po složkách daná funkcí

$$s_i(t+1) = f_i(s_1(t), s_2(t) \ldots, s_n(t))$$

- Stabilní stav $s^{(0)}$ neměnnný v čase
  - Častá úloha: Studium deviací z tohoto stavu, tj. chceme

$$\Delta s_i(t) = s_i(t) - s^{(0)} \quad \text{malé}$$

Motivace

Dynamické systémy

- Definované stavem $s(t) = (s_1(t), s_2(t), \ldots, s_n(t))$ v čase t
- Přeměna stavu $s(t) \to s(t+1)$ po složkách daná funkcí

$$s_i(t+1) = f_i(s_1(t), s_2(t) \ldots, s_n(t))$$

- Stabilní stav $s^{(0)}$ neměnnný v čase
  - Častá úloha: Studium deviací z tohoto stavu, tj. chceme

$$\Delta s_i(t) = s_i(t) - s^{(0)} \quad \text{malé}$$

- Přepíšeme dynamiku pro Δs_i jako

$$\Delta s_i(t+1) = F_i(\Delta s_1(t), \Delta s_2(t) \ldots, \Delta s_n(t))$$

Motivace

Dynamické systémy

- Definované stavem $s(t) = (s_1(t), s_2(t), \ldots, s_n(t))$ v čase t
- Přeměna stavu $s(t) \to s(t+1)$ po složkách daná funkcí

$$s_i(t+1) = f_i(s_1(t), s_2(t) \ldots, s_n(t))$$

- Stabilní stav $s^{(0)}$ neměnnný v čase
  - Častá úloha: Studium deviací z tohoto stavu, tj. chceme

$$\Delta s_i(t) = s_i(t) - s^{(0)} \quad \text{malé}$$

- Přepíšeme dynamiku pro Δs_i jako

$$\Delta s_i(t+1) = F_i(\Delta s_1(t), \Delta s_2(t) \ldots, \Delta s_n(t))$$

  - Malé $\Delta s_i \Rightarrow$ ignoruj kvadratické a vyšší mocniny, tj. F_i lineární

$$\text{lze tedy přepsat jako} \quad \Delta s_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta s_j(t)$$

  - Celkově pro $\Delta s_i(t+1) = A \Delta s_j(t)$

Motivace

Dynamické systémy

- Definované stavem $s(t) = (s_1(t), s_2(t), \ldots, s_n(t))$ v čase t
- Přeměna stavu $s(t) \to s(t+1)$ po složkách daná funkcí

$$s_i(t+1) = f_i(s_1(t), s_2(t) \ldots, s_n(t))$$

- Stabilní stav $s^{(0)}$ neměnnný v čase
  - Častá úloha: Studium deviací z tohoto stavu, tj. chceme

$$\Delta s_i(t) = s_i(t) - s^{(0)} \quad \text{malé}$$

- Přepíšeme dynamiku pro Δs_i jako

$$\Delta s_i(t+1) = F_i(\Delta s_1(t), \Delta s_2(t) \ldots, \Delta s_n(t))$$

  - Malé $\Delta s_i \Rightarrow$ ignoruj kvadratické a vyšší mocniny, tj. F_i lineární

$$\text{lze tedy přepsat jako} \quad \Delta s_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta s_j(t)$$

  - Celkově pro $\Delta s_i(t+1) = A \Delta s_j(t)$
  - a pro stacionární systém $\Delta s_i(t+k) = A^{k-1} \Delta s_j(t)$

Motivace

Dynamické systémy

- Definované stavem $s(t) = (s_1(t), s_2(t), \ldots, s_n(t))$ v čase t
- Přeměna stavu $s(t) \to s(t+1)$ po složkách daná funkcí

$$s_i(t+1) = f_i(s_1(t), s_2(t) \ldots, s_n(t))$$

- Stabilní stav $s^{(0)}$ neměnnný v čase
  - Častá úloha: Studium deviací z tohoto stavu, tj. chceme

$$\Delta s_i(t) = s_i(t) - s^{(0)} \quad \text{malé}$$

- Přepíšeme dynamiku pro Δs_i jako

$$\Delta s_i(t+1) = F_i(\Delta s_1(t), \Delta s_2(t) \ldots, \Delta s_n(t))$$

  - Malé $\Delta s_i \Rightarrow$ ignoruj kvadratické a vyšší mocniny, tj. F_i lineární

$$\text{lze tedy přepsat jako} \quad \Delta s_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta s_j(t)$$

  - Celkově pro $\Delta s_i(t+1) = A \Delta s_j(t)$
  - a pro stacionární systém $\Delta s_i(t+k) = A^{k-1} \Delta s_j(t)$
- Obecně: Součástí Iterative Learning Control (ILC)

Intervalové matice

Intervalové dynamické systémy

- Zmiňované systémy lze v realitě chápat jako *intervalové*
  - Nevíme přímo hodnoty prvků matic a_{ij}, ale jen interval možných hodnot $\boldsymbol{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$

Intervalové matice

Intervalové dynamické systémy

- Zmiňované systémy lze v realitě chápat jako *intervalové*
  - Nevíme přímo hodnoty prvků matic a_{ij}, ale jen interval možných hodnot $\boldsymbol{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$
- Intervalová matice $\boldsymbol{A} = [\underline{A}, \overline{A}] = \{A \in \mathbb{R}^{n \times m}; \underline{A} \leq A \leq \overline{A}\}$
  - *Středová matice* A^c a *matice poloměru* A^Δ

$$A^c = \frac{1}{2}(\underline{A} + \overline{A}) \qquad A^\Delta = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$$

Intervalové matice

Intervalové dynamické systémy

- Zmiňované systémy lze v realitě chápat jako *intervalové*
  - Nevíme přímo hodnoty prvků matic a_{ij}, ale jen interval možných hodnot $\boldsymbol{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$
- Intervalová matice $\boldsymbol{A} = [\underline{A}, \overline{A}] = \{A \in \mathbb{R}^{n\times m}; \underline{A} \leq A \leq \overline{A}\}$
  - *Středová matice* A^c a *matice poloměru* A^Δ

$$A^c = \frac{1}{2}(\underline{A} + \overline{A}) \qquad A^\Delta = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$$

  - *intervalová obálka* (omezené) množiny $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{n\times m}$ je libovolné $\boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{IR}^{n\times m}$ t.ž. $\mathcal{B} \subseteq \boldsymbol{B}$

Intervalové matice

Intervalové dynamické systémy

- Zmiňované systémy lze v realitě chápat jako *intervalové*
  - Nevíme přímo hodnoty prvků matic a_{ij}, ale jen interval možných hodnot $\boldsymbol{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$
- Intervalová matice $\boldsymbol{A} = [\underline{A}, \overline{A}] = \{A \in \mathbb{R}^{n\times m}; \underline{A} \leq A \leq \overline{A}\}$
  - *Středová matice* A^c a *matice poloměru* A^Δ

$$A^c = \frac{1}{2}(\underline{A} + \overline{A}) \qquad A^\Delta = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$$

  - *intervalová obálka* (omezené) množiny $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{n\times m}$ je libovolné $\boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{IR}^{n\times m}$ t.ž. $\mathcal{B} \subseteq \boldsymbol{B}$
  - *intervalový obal* $\square\mathcal{B}$ množiny $\mathcal{B}$ je nejmenší intervalová obálka, tj. $\square\mathcal{B} := \bigcap_{\mathcal{B}\subseteq \boldsymbol{B}\in\mathbb{IR}^{n\times n}} \boldsymbol{B}$

Intervalové matice

Intervalové dynamické systémy

- Zmiňované systémy lze v realitě chápat jako *intervalové*
  - Nevíme přímo hodnoty prvků matic a_{ij}, ale jen interval možných hodnot $\boldsymbol{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$
- Intervalová matice $\boldsymbol{A} = [\underline{A}, \overline{A}] = \{A \in \mathbb{R}^{n\times m}; \underline{A} \leq A \leq \overline{A}\}$
  - *Středová matice* A^c a *matice poloměru* A^Δ

$$A^c = \frac{1}{2}(\underline{A} + \overline{A}) \qquad A^\Delta = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$$

  - *intervalová obálka* (omezené) množiny $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{n\times m}$ je libovolné $\boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{IR}^{n\times m}$ t.ž. $\mathcal{B} \subseteq \boldsymbol{B}$
  - *intervalový obal* $\square\mathcal{B}$ množiny $\mathcal{B}$ je nejmenší intervalová obálka, tj. $\square\mathcal{B} := \bigcap_{\mathcal{B}\subseteq \boldsymbol{B}\in\mathbb{IR}^{n\times n}} \boldsymbol{B}$
- k-tá mocnina intervalové matice $\boldsymbol{A}$ je

$$\boldsymbol{A}^k := \{A^k;\ A \in \boldsymbol{A}\}. \tag{1}$$

  - Ve skutečnosti vezmeme $\left[\boldsymbol{A}^k\right] := \square\{A^k;\ A \in \boldsymbol{A}\}$. Proč?

Intervalové matice

Intervalové dynamické systémy

- Zmiňované systémy lze v realitě chápat jako *intervalové*
  - Nevíme přímo hodnoty prvků matic a_{ij}, ale jen interval možných hodnot $\boldsymbol{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$
- Intervalová matice $\boldsymbol{A} = [\underline{A}, \overline{A}] = \{A \in \mathbb{R}^{n\times m}; \underline{A} \leq A \leq \overline{A}\}$
  - *Středová matice* A^c a *matice poloměru* A^Δ

$$A^c = \frac{1}{2}(\underline{A} + \overline{A}) \qquad A^\Delta = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$$

  - *intervalová obálka* (omezené) množiny $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{n\times m}$ je libovolné $\boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{IR}^{n\times m}$ t.ž. $\mathcal{B} \subseteq \boldsymbol{B}$
  - *intervalový obal* $\square\mathcal{B}$ množiny $\mathcal{B}$ je nejmenší intervalová obálka, tj. $\square\mathcal{B} := \bigcap_{\mathcal{B}\subseteq \boldsymbol{B}\in\mathbb{IR}^{n\times n}} \boldsymbol{B}$
- k-tá mocnina intervalové matice $\boldsymbol{A}$ je

$$\boldsymbol{A}^k := \{A^k;\ A \in \boldsymbol{A}\}. \tag{1}$$

  - Ve skutečnosti vezmeme $\left[\boldsymbol{A}^k\right] := \square\{A^k;\ A \in \boldsymbol{A}\}$. Proč?
  - Výraz (1) nemusí být intervalová matice. Proč?

Intervalové mocnnění

Příklad mocnění

$$\text{Zvolme } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0,1] & [1,1] \\ [0,1] & [1,1] \end{pmatrix} \qquad \text{a počítejme } \boldsymbol{A}^2$$

Intervalové mocnnění

Příklad mocnění

$$\text{Zvolme } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0,1] & [1,1] \\ [0,1] & [1,1] \end{pmatrix} \qquad \text{a počítejme } \boldsymbol{A}^2$$

- Umocníme si horní a dolní mez

$$\underline{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Intervalové mocnnění

Příklad mocnění

$$\text{Zvolme } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0,1] & [1,1] \\ [0,1] & [1,1] \end{pmatrix} \qquad \text{a počítejme } \boldsymbol{A}^2$$

- Umocníme si horní a dolní mez

$$\underline{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Jelikož $\underline{A} < \overline{A}$, tak pokud by měla být $\boldsymbol{A}^2$ intervalová matice potom $\boldsymbol{A}^2$ musí "obsahovat" všechny B^2 t.ž. $\underline{A} \leq B^2 \leq \overline{A}$

Intervalové mocnnění

Příklad mocnění

$$\text{Zvolme } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0,1] & [1,1] \\ [0,1] & [1,1] \end{pmatrix} \qquad \text{a počítejme } \boldsymbol{A}^2$$

- Umocníme si horní a dolní mez

$$\underline{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Jelikož $\underline{A} < \overline{A}$, tak pokud by měla být $\boldsymbol{A}^2$ intervalová matice potom $\boldsymbol{A}^2$ musí "obsahovat" všechny B^2 t.ž. $\underline{A} \leq B^2 \leq \overline{A}$

- Zkusme následující matici $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Intervalové mocnnění

Příklad mocnění

$$\text{Zvolme } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0,1] & [1,1] \\ [0,1] & [1,1] \end{pmatrix} \qquad \text{a počítejme } \boldsymbol{A}^2$$

- Umocníme si horní a dolní mez

$$\underline{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Jelikož $\underline{A} < \overline{A}$, tak pokud by měla být $\boldsymbol{A}^2$ intervalová matice potom $\boldsymbol{A}^2$ musí "obsahovat" všechny B^2 t.ž. $\underline{A} \leq B^2 \leq \overline{A}$

- Zkusme následující matici $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - Jelikož $B^2 \in \boldsymbol{A}^2 \Rightarrow B \in \boldsymbol{A}$
  - "Odmocníme" tedy B^2 a získáme B jako

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Intervalové mocnnění

Příklad mocnění

$$\text{Zvolme } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0,1] & [1,1] \\ [0,1] & [1,1] \end{pmatrix} \qquad \text{a počítejme } \boldsymbol{A}^2$$

- Umocníme si horní a dolní mez

$$\underline{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Jelikož $\underline{A} < \overline{A}$, tak pokud by měla být $\boldsymbol{A}^2$ intervalová matice potom $\boldsymbol{A}^2$ musí "obsahovat" všechny B^2 t.ž. $\underline{A} \leq B^2 \leq \overline{A}$

- Zkusme následující matici $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - Jelikož $B^2 \in \boldsymbol{A}^2 \Rightarrow B \in \boldsymbol{A}$
  - "Odmocníme" tedy B^2 a získáme B jako

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  - Ani jedna není v $\boldsymbol{A}$, a tedy $B^2 \notin \boldsymbol{A}^2$

Školní metoda

Proč nespočítat mocninu "normálně" (*intervalovou artimetikou*)

- Pro intervaly $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}$ (matice 1×1) máme

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}],$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}],$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = [\min(M), \max(M)], \text{ kde } M := \{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}.$$

Školní metoda

Proč nespočítat mocninu "normálně" (*intervalovou artimetikou*)

- Pro intervaly $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}$ (matice 1×1) máme

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}],$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}],$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = [\min(M), \max(M)], \text{ kde } M := \{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}.$$

- Mocnění je vlastně polynom, tj. obecně
  - Pro fci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je obraz intervalů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$

$$f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n); \forall i \in [n], x_i \in \boldsymbol{x}_i\}$$

Školní metoda

Proč nespočítat mocninu "normálně" (*intervalovou artimetikou*)

- Pro intervaly $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}$ (matice 1×1) máme

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}],$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}],$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = [\min(M), \max(M)], \text{ kde } M := \{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}.$$

- Mocnění je vlastně polynom, tj. obecně
  - Pro fci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je obraz intervalů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$

$$f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ \forall i \in [n], x_i \in \boldsymbol{x}_i\}$$

  - Ne vždy snadné: $f(x) = x^2$ jako $f_1(x) = x^2 = \{x^2 : x \in \boldsymbol{x}\}$

$$f_1(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} [\underline{x}^2, \overline{x}^2] & 0 \le \underline{x} \le \overline{x}, \\ [\overline{x}^2, \underline{x}^2] & \underline{x} \le \overline{x} \le 0, \\ [0, \max(\underline{x}^2, \overline{x}^2)] & \underline{x} \le 0 \le \overline{x}, \end{cases}$$

Školní metoda

Proč nespočítat mocninu "normálně" (*intervalovou artimetikou*)

- Pro intervaly $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}$ (matice 1×1) máme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &= [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}], \\
\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} &= [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}], \\
\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= [\min(M), \max(M)], \text{ kde } M := \{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}.
\end{aligned}$$

- Mocnění je vlastně polynom, tj. obecně
  - Pro fci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je obraz intervalů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$

$$f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ \forall i \in [n], x_i \in \boldsymbol{x}_i\}$$

  - Ne vždy snadné: $f(x) = x^2$ jako $f_1(x) = x^2 = \{x^2 : x \in \boldsymbol{x}\}$

$$f_1(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} [\underline{x}^2, \overline{x}^2] & 0 \le \underline{x} \le \overline{x}, \\ [\overline{x}^2, \underline{x}^2] & \underline{x} \le \overline{x} \le 0, \\ [0, \max(\underline{x}^2, \overline{x}^2)] & \underline{x} \le 0 \le \overline{x}, \end{cases}$$

  - a nebo jako $f_2(x) = x \cdot x$ může vyjít rozdílně

$$\left.\begin{aligned}
f_1(\boldsymbol{x}) &= f_1([-2, 1]) = [-2, 1]^2 = [0, 4] \\
f_2(\boldsymbol{x}) &= f_2([-2, 1]) = [-2, 1] \cdot [-2, 1] = [-2, 4]
\end{aligned}\right\} \Rightarrow f_1(\boldsymbol{x}) \subseteq f_2(\boldsymbol{x})$$

Školní metoda

Proč nespočítat mocninu "normálně" (*intervalovou artimetikou*)

- Pro intervaly $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}$ (matice 1×1) máme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &= [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}], \\
\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} &= [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}], \\
\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= [\min(M), \max(M)], \text{ kde } M := \{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}.
\end{aligned}$$

- Mocnění je vlastně polynom, tj. obecně
  - Pro fci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je obraz intervalů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$

$$f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ \forall i \in [n], x_i \in \boldsymbol{x}_i\}$$

  - Ne vždy snadné: $f(x) = x^2$ jako $f_1(x) = x^2 = \{x^2 : x \in \boldsymbol{x}\}$

$$f_1(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} [\underline{x}^2, \overline{x}^2] & 0 \le \underline{x} \le \overline{x}, \\ [\overline{x}^2, \underline{x}^2] & \underline{x} \le \overline{x} \le 0, \\ [0, \max(\underline{x}^2, \overline{x}^2)] & \underline{x} \le 0 \le \overline{x}, \end{cases}$$

  - a nebo jako $f_2(x) = x \cdot x$ může vyjít rozdílně

$$\left.\begin{aligned}
f_1(\boldsymbol{x}) &= f_1([-2, 1]) = [-2, 1]^2 = [0, 4] \\
f_2(\boldsymbol{x}) &= f_2([-2, 1]) = [-2, 1] \cdot [-2, 1] = [-2, 4]
\end{aligned}\right\} \Rightarrow f_1(\boldsymbol{x}) \subseteq f_2(\boldsymbol{x})$$

  - Obecně to je NP-těžké (Kreinovich, Lakeyev, Rohn a Kahl, 1998)

Složitost určení (obalu) mocniny

Důležitá vlastnost

- Problém je dvojí výskyt proměnné (oba stejnou hodnotu)
- Pokud není: *single-use expressions* (SUE)

Složitost určení (obalu) mocniny

Důležitá vlastnost

- Problém je dvojí výskyt proměnné (oba stejnou hodnotu)
- Pokud není: *single-use expressions* (SUE)

Tvzení 1

Druhou mocnina intervalové matice $\boldsymbol{A}$ lze vypočítat polynomiálně.

Idea důkazu

Mějme $\boldsymbol{B}$ spočtené jako druhou mocninu $\boldsymbol{A}$ intervalovou artimetikou

Složitost určení (obalu) mocniny

Důležitá vlastnost

- Problém je dvojí výskyt proměnné (oba stejnou hodnotu)
- Pokud není: *single-use expressions* (SUE)

Tvzení 1

Druhou mocnina intervalové matice $\boldsymbol{A}$ lze vypočítat polynomiálně.

Idea důkazu

Mějme $\boldsymbol{B}$ spočtené jako druhou mocninu $\boldsymbol{A}$ intervalovou artimetikou
Některé výrazy nemají SUE

- Pro $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$ máme dva výskyty a_{ij}
  1. Pro $k = j$ máme $a_{ij} = a_{jj}$
  2. Pro $k = i$ máme $a_{ii} = a_{ij}$

Složitost určení (obalu) mocniny

Důležitá vlastnost

- Problém je dvojí výskyt proměnné (oba stejnou hodnotu)
- Pokud není: *single-use expressions* (SUE)

Tvzení 1

Druhou mocnina intervalové matice $\boldsymbol{A}$ lze vypočítat polynomiálně.

Idea důkazu

Mějme $\boldsymbol{B}$ spočtené jako druhou mocninu $\boldsymbol{A}$ intervalovou artimetikou
Některé výrazy nemají SUE

- Pro $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$ máme dva výskyty a_{ij}
  1. Pro $k = j$ máme $a_{ij} = a_{jj}$
  2. Pro $k = i$ máme $a_{ii} = a_{ij}$
- Lze (pro $i \neq j$) upravit na $b_{ij} = \sum_{k:k \neq i, k \neq j} a_{ik} a_{kj} + a_{ij}(a_{ii} + a_{ij})$

Složitost určení (obalu) mocniny

Důležitá vlastnost

- Problém je dvojí výskyt proměnné (oba stejnou hodnotu)
- Pokud není: *single-use expressions* (SUE)

Tvzení 1

Druhou mocnina intervalové matice $\boldsymbol{A}$ lze vypočítat polynomiálně.

Idea důkazu

Mějme $\boldsymbol{B}$ spočtené jako druhou mocninu $\boldsymbol{A}$ intervalovou artimetikou
Některé výrazy nemají SUE

- Pro $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$ máme dva výskyty a_{ij}
  1. Pro $k = j$ máme $a_{ij} = a_{jj}$
  2. Pro $k = i$ máme $a_{ii} = a_{ij}$
- Lze (pro $i \neq j$) upravit na $b_{ij} = \sum_{k:k\neq i,k\neq j} a_{ik}a_{kj} + a_{ij}(a_{ii} + a_{ij})$
- Stejně tak pro $i = j$ dostáváme $b_{ii} = \sum_{k:k\neq i} a_{ik}a_{ki} + a_{ii})$

Složitost určení (obalu) mocniny

Důležitá vlastnost

- Problém je dvojí výskyt proměnné (oba stejnou hodnotu)
- Pokud není: *single-use expressions* (SUE)

Tvzení 1

Druhou mocnina intervalové matice $\boldsymbol{A}$ lze vypočítat polynomiálně.

Idea důkazu

Mějme $\boldsymbol{B}$ spočtené jako druhou mocninu $\boldsymbol{A}$ intervalovou artimetikou
Některé výrazy nemají SUE

- Pro $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$ máme dva výskyty a_{ij}
  1. Pro $k = j$ máme $a_{ij} = a_{jj}$
  2. Pro $k = i$ máme $a_{ii} = a_{ij}$
- Lze (pro $i \neq j$) upravit na $b_{ij} = \sum_{k:k\neq i,k\neq j} a_{ik}a_{kj} + a_{ij}(a_{ii} + a_{ij})$
- Stejně tak pro $i = j$ dostáváme $b_{ii} = \sum_{k:k\neq i} a_{ik}a_{ki} + a_{ii})$

Apliací intervalové aritmetiky dostáváme výsledek. $\square$

Od kdy je to tedy složité?

Tvzení 2

Výpočet třetí mocniny intervalové matice $\boldsymbol{A}$ je NP-těžký.

Od kdy je to tedy složité?

Tvzení 2

Výpočet třetí mocniny intervalové matice $\boldsymbol{A}$ je NP-těžký.

Idea důkazu

Konstrukce intervalové matice (pro libovolnou $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

- Vytvoříme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{U} \\ L & 0 \end{pmatrix},$$

where

$$L = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \dots & 0 & \dots \\ \hline \vdots & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \end{array}\right), \quad \mathbf{U} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_n \\ \hline \mathbf{y}_1 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ \mathbf{y}_n & & & \end{array}\right).$$

Od kdy je to tedy složité?

Tvzení 2

Výpočet třetí mocniny intervalové matice $\boldsymbol{A}$ je NP-těžký.

Idea důkazu

Konstrukce intervalové matice (pro libovolnou $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

- Vytvoříme
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{U} \\ L & 0 \end{pmatrix},$$
where
$$L = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \dots & 0 & \dots \\ \hline \vdots & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \end{array}\right), \quad \mathbf{U} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_n \\ \hline \mathbf{y}_1 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ \mathbf{y}_n & & & \end{array}\right).$$
- Vezmeme instanci $A = \begin{pmatrix} 0 & U \\ L & 0 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{U} \\ L & 0 \end{pmatrix}$

Od kdy je to tedy složité?

Tvzení 2

Výpočet třetí mocniny intervalové matice $\boldsymbol{A}$ je NP-těžký.

Idea důkazu

Konstrukce intervalové matice (pro libovolnou $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

- Vytvoříme
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{U} \\ L & 0 \end{pmatrix},$$
where
$$L = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \dots & 0 & \dots \\ \hline \vdots & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \end{array}\right), \quad \mathbf{U} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_n \\ \hline \mathbf{y}_1 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ \mathbf{y}_n & & & \end{array}\right).$$
- Vezmeme instanci $A = \begin{pmatrix} 0 & U \\ L & 0 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{U} \\ L & 0 \end{pmatrix}$
- Vypočteme mocniny
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & U \\ L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & U \\ L & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} UL & 0 \\ 0 & UL \end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & ULU \\ ULU & 0 \end{pmatrix}$$

Od kdy je to tedy složité?

Tvzení 2

Výpočet třetí mocniny intervalové matice $\boldsymbol{A}$ je NP-těžký.

Idea důkazu

Konstrukce intervalové matice (pro libovolnou $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

- Vytvoříme
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{U} \\ L & 0 \end{pmatrix},$$
where
$$L = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \dots & 0 & \dots \\ \hline \vdots & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \end{array}\right), \quad \mathbf{U} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_n \\ \hline \mathbf{y}_1 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ \mathbf{y}_n & & & \end{array}\right).$$
- Vezmeme instanci $A = \begin{pmatrix} 0 & U \\ L & 0 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{U} \\ L & 0 \end{pmatrix}$
- Vypočteme mocniny
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & U \\ L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & U \\ L & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} UL & 0 \\ 0 & UL \end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & ULU \\ ULU & 0 \end{pmatrix}$$

Nyní vyjádříme obě matice UL i ULU

Od kdy je to tedy složité?

Idea důkazu

Nyní vyjádříme obě matice UL i ULU

- Vyjádření

$$UL = \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T \\ \hline y & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0^T \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Od kdy je to tedy složité?

Idea důkazu

Nyní vyjádříme obě matice UL i ULU

- Vyjádření

$$UL = \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T \\ \hline y & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0^T \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$ULU = \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T \\ \hline y & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} x^T B y & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Od kdy je to tedy složité?

Idea důkazu

Nyní vyjádříme obě matice UL i ULU

- Vyjádření

$$UL = \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T \\ \hline y & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0^T \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$ULU = \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T \\ \hline y & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} x^T B y & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Součástí výpočtu třetí mocniny je tedy výpočet $x^T B y$

Od kdy je to tedy složité?

Idea důkazu

Nyní vyjádříme obě matice UL i ULU

- Vyjádření

$$UL = \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T \\ \hline y & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0^T \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$ULU = \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T \\ \hline y & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} x^T B y & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Součástí výpočtu třetí mocniny je tedy výpočet $x^T B y$

Ten lze najít u výpočtu maticové normy $\|A\|_{\infty,1} = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_1$

- (Poljak & Rohn 1993) Následující je NP-úplné
  vstup: MC-matice A a kladné ℓ
  dotaz: je $z^T A z \geq \ell$ pro nějaké $z \in \mathbb{Z}$

Od kdy je to tedy složité?

Idea důkazu

Nyní vyjádříme obě matice UL i ULU

- Vyjádření

$$UL = \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T \\ \hline y & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0^T \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$ULU = \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^T \\ \hline y & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} x^T B y & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Součástí výpočtu třetí mocniny je tedy výpočet $x^T B y$

Ten lze najít u výpočtu maticové normy $\|A\|_{\infty,1} = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_1$

- (Poljak & Rohn 1993) Následující je NP-úplné
  vstup: MC-matice A a kladné ℓ
  dotaz: je $z^T A z \geq \ell$ pro nějaké $z \in \mathbb{Z}$
- (Rohn 2000) Pro MC-matici je $\|A\|_{\infty,1} = \max_{z \in \mathbb{Z}} z^T A z$ NP-těžké

Lze i ukázat, že pro symetrické M-matice je NP-těžké $\|A\|_{\infty,1} \geq 1$ $\square$

Další špatná zpráva

Jednoduchý příklad na mocninu

- Mějme matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [1,2] & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Další špatná zpráva

Jednoduchý příklad na mocninu

- Mějme matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [1,2] & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Koukneme se na prvek $(A^3)_{11}$
  - Vyjde nám $(A^3)_{11} = a_{11}^3 - 6a_{11}$
  - Minimum této funkce pro $a_{11} \in \boldsymbol{a}_{11} = [1,2]$ je $a_{11}^m = \sqrt{2}$

Další špatná zpráva

Jednoduchý příklad na mocninu

- Mějme matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [1,2] & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Koukneme se na prvek $(A^3)_{11}$
  - Vyjde nám $(A^3)_{11} = a_{11}^3 - 6a_{11}$
  - Minimum této funkce pro $a_{11} \in \boldsymbol{a}_{11} = [1,2]$ je $a_{11}^m = \sqrt{2}$
  - Celkově vyjde mocnina

$$[\boldsymbol{A}^3] = \begin{pmatrix} [-4\sqrt{2}, -4] & [-6, 3] \\ [-1, 2] & [-6, -3] \end{pmatrix}.$$

Další špatná zpráva

Jednoduchý příklad na mocninu

- Mějme matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [1,2] & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Koukneme se na prvek $(A^3)_{11}$
  - Vyjde nám $(A^3)_{11} = a_{11}^3 - 6a_{11}$
  - Minimum této funkce pro $a_{11} \in \boldsymbol{a}_{11} = [1,2]$ je $a_{11}^m = \sqrt{2}$
  - Celkově vyjde mocnina

$$[\boldsymbol{A}^3] = \begin{pmatrix} [-4\sqrt{2}, -4] & [-6, 3] \\ [-1, 2] & [-6, -3] \end{pmatrix}.$$

Důsledek pro další postup

- Chceme-li říci, že stanovení mocniny intervalové matice je **polynomiální**, lze to říci jen *do dané přesnosti*.
  - Výsledky mohou být iracionální, tak přesně to nemusí být možné

Jak definovat jednoduché případy

Parametrický problém $\mathrm{IMP}(k, R)$

- *Vstupy*: $\boldsymbol{A}, R, k$
  - koeficient mocniny $k > 1$,
  - binární matice R s $e^T R e = m$,
  - Intervalově-reálná matice $\boldsymbol{A}$ s prvky reálnými a **intervalovými**
    $\forall i, j \in [n]; R_{i,j} = 1$ platí $\mathrm{rad}(\boldsymbol{A}_{i,j}) > 0$
    $\forall i, j \in [n]; R_{i,j} = 0$ platí $\mathrm{rad}(\boldsymbol{A}_{i,j}) = 0$
- *Úkol*: Spočítat mocninu $\boldsymbol{A}^k$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{1,1} & \boldsymbol{a}_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \boldsymbol{a}_{2,3} \\ \boldsymbol{a}_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

Jak definovat jednoduché případy

Parametrický problém $\mathrm{IMP}(k, R)$

- *Vstupy*: $\boldsymbol{A}, R, k$
  - koeficient mocniny $k > 1$,
  - binární matice R s $e^T R e = m$,
  - Intervalově-reálná matice $\boldsymbol{A}$ s prvky reálnými a **intervalovými**
    $\forall i, j \in [n]; R_{i,j} = 1$ platí $\mathrm{rad}(\boldsymbol{A}_{i,j}) > 0$
    $\forall i, j \in [n]; R_{i,j} = 0$ platí $\mathrm{rad}(\boldsymbol{A}_{i,j}) = 0$
- *Úkol*: Spočítat mocninu $\boldsymbol{A}^k$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{1,1} & \boldsymbol{a}_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \boldsymbol{a}_{2,3} \\ \boldsymbol{a}_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

Hledání polynomiality

- *Obecná otázka*: Nalézt R pro které $\mathrm{IMP}(k, R)$ je v P.
  - Existují R pro které $\mathrm{IMP}(3, R)$ je NP-těžké

Jak definovat jednoduché případy

Parametrický problém $\mathrm{IMP}(k, R)$

- *Vstupy*: $\boldsymbol{A}, R, k$
  - koeficient mocniny $k > 1$,
  - binární matice R s $e^T R e = m$,
  - Intervalově-reálná matice $\boldsymbol{A}$ s prvky reálnými a **intervalovými**
    $\forall i, j \in [n]; R_{i,j} = 1$ platí $\mathrm{rad}(\boldsymbol{A}_{i,j}) > 0$
    $\forall i, j \in [n]; R_{i,j} = 0$ platí $\mathrm{rad}(\boldsymbol{A}_{i,j}) = 0$
- *Úkol*: Spočítat mocninu $\boldsymbol{A}^k$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{1,1} & \boldsymbol{a}_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \boldsymbol{a}_{2,3} \\ \boldsymbol{a}_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

Hledání polynomiality

- *Obecná otázka*: Nalézt R pro které $\mathrm{IMP}(k, R)$ je v P.
  - Existují R pro které $\mathrm{IMP}(3, R)$ je NP-těžké
- *První dotaz*: Testovat matice R_n s $e^T R_n e = n$
  - Pro diagonální R_d $\mathrm{IMP}(3, R_d)$ je polynomiální (Hladik, 2017)

Jak definovat jednoduché případy

Parametrický problém $\mathrm{IMP}(k, R)$

- *Vstupy*: $\boldsymbol{A}, R, k$
  - koeficient mocniny $k > 1$,
  - binární matice R s $e^T R e = m$,
  - Intervalově-reálná matice $\boldsymbol{A}$ s prvky reálnými a **intervalovými**
    $\forall i, j \in [n]; R_{i,j} = 1$ platí $\mathrm{rad}(\boldsymbol{A}_{i,j}) > 0$
    $\forall i, j \in [n]; R_{i,j} = 0$ platí $\mathrm{rad}(\boldsymbol{A}_{i,j}) = 0$
- *Úkol*: Spočítat mocninu $\boldsymbol{A}^k$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{1,1} & \boldsymbol{a}_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \boldsymbol{a}_{2,3} \\ \boldsymbol{a}_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

Hledání polynomiality

- *Obecná otázka*: Nalézt R pro které $\mathrm{IMP}(k, R)$ je v P.
  - Existují R pro které $\mathrm{IMP}(3, R)$ je NP-těžké
- *První dotaz*: Testovat matice R_n s $e^T R_n e = n$
  - Pro diagonální R_d $\mathrm{IMP}(3, R_d)$ je polynomiální (Hladik, 2017)

Pro úlohu $\mathrm{IMP}(3, R_1)$ s maticí R_1 (jeden interval - $\boldsymbol{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$)

- Každý element $(A^3)_{ij}$ polynom stupně ≤ 3

Jak definovat jednoduché případy

Parametrický problém $\mathrm{IMP}(k, R)$

- *Vstupy*: $\boldsymbol{A}, R, k$
  - koeficient mocniny $k > 1$,
  - binární matice R s $e^T R e = m$,
  - Intervalově-reálná matice $\boldsymbol{A}$ s prvky reálnými a **intervalovými**
    $\forall i, j \in [n]; R_{i,j} = 1$ platí $\mathrm{rad}(\boldsymbol{A}_{i,j}) > 0$
    $\forall i, j \in [n]; R_{i,j} = 0$ platí $\mathrm{rad}(\boldsymbol{A}_{i,j}) = 0$
- *Úkol*: Spočítat mocninu $\boldsymbol{A}^k$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{1,1} & \boldsymbol{a}_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \boldsymbol{a}_{2,3} \\ \boldsymbol{a}_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

Hledání polynomiality

- *Obecná otázka*: Nalézt R pro které $\mathrm{IMP}(k, R)$ je v P.
  - Existují R pro které $\mathrm{IMP}(3, R)$ je NP-těžké
- *První dotaz*: Testovat matice R_n s $e^T R_n e = n$
  - Pro diagonální R_d $\mathrm{IMP}(3, R_d)$ je polynomiální (Hladik, 2017)

Pro úlohu $\mathrm{IMP}(3, R_1)$ s maticí R_1 (jeden interval - $\boldsymbol{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$)

- Každý element $(A^3)_{ij}$ polynom stupně ≤ 3
- Vyřešíme polynom $(A^3)_{ij}$ na intervalu $[\underline{x}, \overline{x}]$

Jak definovat jednoduché případy

Parametrický problém $\mathrm{IMP}(k, R)$

- *Vstupy*: $\boldsymbol{A}, R, k$
  - koeficient mocniny $k > 1$,
  - binární matice R s $e^T R e = m$,
  - Intervalově-reálná matice $\boldsymbol{A}$ s prvky reálnými a **intervalovými**
    $\forall i, j \in [n]; R_{i,j} = 1$ platí $\mathrm{rad}(\boldsymbol{A}_{i,j}) > 0$
    $\forall i, j \in [n]; R_{i,j} = 0$ platí $\mathrm{rad}(\boldsymbol{A}_{i,j}) = 0$
- *Úkol*: Spočítat mocninu $\boldsymbol{A}^k$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{1,1} & \boldsymbol{a}_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \boldsymbol{a}_{2,3} \\ \boldsymbol{a}_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

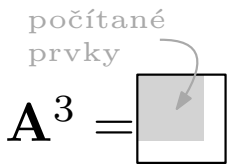
Hledání polynomiality

- *Obecná otázka*: Nalézt R pro které $\mathrm{IMP}(k, R)$ je v P.
  - Existují R pro které $\mathrm{IMP}(3, R)$ je NP-těžké
- *První dotaz*: Testovat matice R_n s $e^T R_n e = n$
  - Pro diagonální R_d $\mathrm{IMP}(3, R_d)$ je polynomiální (Hladik, 2017)

Pro úlohu $\mathrm{IMP}(3, R_1)$ s maticí R_1 (jeden interval - $\boldsymbol{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$)

- Každý element $(A^3)_{ij}$ polynom stupně ≤ 3
- Vyřešíme polynom $(A^3)_{ij}$ na intervalu $[\underline{x}, \overline{x}]$
- Podobně pro diagonální - redukuje se na polynom 2. stupně

Matice s intervalovým sloupcem

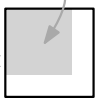


- Výpočet $\boldsymbol{A}^3_{i,j}$ rozdělen dle prvků
  1. $i \neq n \wedge j \neq n$: lze vypočítat intervalovou artimetikou (IA)

$$\sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} a_{i,k}a_{k,\ell}a_{\ell,j} + \boldsymbol{a}_{i,n}\Big(\sum_{\ell=1}^{n-1} a_{n,\ell}a_{\ell,j} + a_{n,j}(\boldsymbol{a}_{n,n} + a_{i,i})\Big) + a_{n,j}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n-1} a_{i,k}\boldsymbol{a}_{k,n}$$

Matice s intervalovým sloupcem

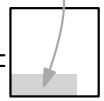
počítané prvky

$\mathbf{A}^3 =$ 

- Výpočet $\boldsymbol{A}^3_{i,j}$ rozdělen dle prvků
  1. $i \neq n \wedge j \neq n$: lze vypočítat intervalovou artimetikou (IA)

$$\sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} a_{i,k}a_{k,\ell}a_{\ell,j} + \boldsymbol{a}_{i,n}\Big(\sum_{\ell=1}^{n-1} a_{n,\ell}a_{\ell,j} + a_{n,j}(\boldsymbol{a}_{n,n} + a_{i,i})\Big) + a_{n,j}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n-1} a_{i,k}\boldsymbol{a}_{k,n}$$

počítané prvky

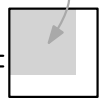
$\mathbf{A}^3 =$ 

  2. $i = n, j \neq n$: 1. a 3. term IA a zbytek $\sim$ kvadratické v $\boldsymbol{a}_{n,n}$

$$\sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} a_{n,k}a_{k,\ell}a_{\ell,j} + \boldsymbol{a}_{n,n}\sum_{\ell=1}^{n-1} a_{n,\ell}a_{\ell,j} + a_{n,j}\sum_{k=1}^{n-1} a_{n,k}\boldsymbol{a}_{k,n} + \boldsymbol{a}^2_{n,n}a_{n,j}$$

Matice s intervalovým sloupcem

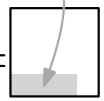
počítané prvky

$\mathbf{A}^3 =$ 

- Výpočet $\boldsymbol{A}^3_{i,j}$ rozdělen dle prvků
  1. $i \neq n \wedge j \neq n$: lze vypočítat intervalovou artimetikou (IA)

$$\sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} a_{i,k}a_{k,\ell}a_{\ell,j} + \boldsymbol{a}_{i,n}\Big(\sum_{\ell=1}^{n-1} a_{n,\ell}a_{\ell,j} + a_{n,j}(\boldsymbol{a}_{n,n} + a_{i,i})\Big) + a_{n,j}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n-1} a_{i,k}\boldsymbol{a}_{k,n}$$

počítané prvky

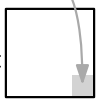
$\mathbf{A}^3 =$ 

  2. $i = n, j \neq n$: 1. a 3. term IA a zbytek $\sim$ kvadratické v $\boldsymbol{a}_{n,n}$

$$\sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} a_{n,k}a_{k,\ell}a_{\ell,j} + \boldsymbol{a}_{n,n}\sum_{\ell=1}^{n-1} a_{n,\ell}a_{\ell,j} + a_{n,j}\sum_{k=1}^{n-1} a_{n,k}\boldsymbol{a}_{k,n} + \boldsymbol{a}^2_{n,n}a_{n,j}$$

  3. $i = j = n$: Složitější

počítané prvky

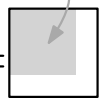
$\mathbf{A}^3 =$ 

$$\sum_{\ell=1}^{n-1}\boldsymbol{a}_{\ell,n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{i,k}a_{k,\ell} + 2\boldsymbol{a}_{n,n}a_{n,\ell}\right) + \boldsymbol{a}^3_{n,n}$$

  - Lineární v $\boldsymbol{a}_{\ell,n}, \ell \neq n$, tj. maximum/minimum dosaženo pro $a_{\ell,n} \in \{\underline{a}_{\ell,n}, \overline{a}_{\ell,n}\}$

Matice s intervalovým sloupcem

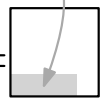
počítané prvky

$\mathbf{A}^3 =$ 

- Výpočet $\boldsymbol{A}^3_{i,j}$ rozdělen dle prvků
  1. $i \neq n \wedge j \neq n$: lze vypočítat intervalovou artimetikou (IA)

$$\sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} a_{i,k}a_{k,\ell}a_{\ell,j} + \boldsymbol{a}_{i,n}\Big(\sum_{\ell=1}^{n-1} a_{n,\ell}a_{\ell,j} + a_{n,j}(\boldsymbol{a}_{n,n} + a_{i,i})\Big) + a_{n,j}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n-1} a_{i,k}\boldsymbol{a}_{k,n}$$

počítané prvky

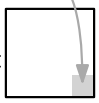
$\mathbf{A}^3 =$ 

  2. $i = n, j \neq n$: 1. a 3. term IA a zbytek $\sim$ kvadratické v $\boldsymbol{a}_{n,n}$

$$\sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} a_{n,k}a_{k,\ell}a_{\ell,j} + \boldsymbol{a}_{n,n}\sum_{\ell=1}^{n-1} a_{n,\ell}a_{\ell,j} + a_{n,j}\sum_{k=1}^{n-1} a_{n,k}\boldsymbol{a}_{k,n} + \boldsymbol{a}^2_{n,n}a_{n,j}$$

  3. $i = j = n$: Složitější

počítané prvky

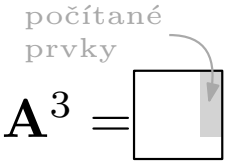
$\mathbf{A}^3 =$ 

$$\sum_{\ell=1}^{n-1}\boldsymbol{a}_{\ell,n}\sum_{k=1}^{n-1}(a_{i,k}a_{k,\ell} + 2\boldsymbol{a}_{n,n}a_{n,\ell}) + \boldsymbol{a}^3_{n,n}$$

- Lineární v $\boldsymbol{a}_{\ell,n}, \ell \neq n$, tj. maximum/minimum dosaženo pro $a_{\ell,n} \in \{\underline{a}_{\ell,n}, \overline{a}_{\ell,n}\}$
- hodnoty $\boldsymbol{a}_{n,n}$, pro které $\sum_{k=1}^{n-1}(a_{i,k}a_{k,\ell} + 2\boldsymbol{a}_{n,n}a_{n,\ell}) = 0$ rozdělí $\boldsymbol{a}_{n,n}$ do $\leq n$ intervalů (s konst. znaménkem)
- Volíme $\boldsymbol{a}_{\ell,n}$ pro každý interval a řešíme kubickou rov. v $\boldsymbol{a}_{n,n}$

Matice s intervalovým sloupcem - dokončení

- Výpočet $\boldsymbol{A}^3_{i,j}$
  4. $i \neq n, j = n$: Nejhorší



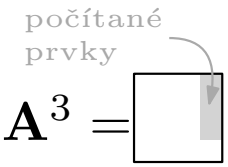
$$\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{n-1} \boldsymbol{a}_{\ell,n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_{i,k}a_{k,\ell} + \boldsymbol{a}_{i,n}a_{n,\ell} + \boldsymbol{a}_{n,n}a_{i,\ell}\right) + \boldsymbol{a}_{i,n} \sum_{k=1}^{n-1} a_{i,k}a_{k,\ell} +$$

$$\boldsymbol{a}_{i,n}\boldsymbol{a}_{i,n}a_{n,\ell} + \boldsymbol{a}_{i,n}\boldsymbol{a}_{n,n}a_{i,\ell} + \boldsymbol{a}_{i,n}\boldsymbol{a}^2_{n,n} + \boldsymbol{a}_{i,n}\boldsymbol{a}_{n,n}a_{i,i}$$

- Nevíme jak to vyřešit, ale ani, že to je NP-těžké

Matice s intervalovým sloupcem - dokončení

- Výpočet $\boldsymbol{A}^3_{i,j}$
  4. $i \neq n, j = n$: Nejhorší



$$\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{n-1} \boldsymbol{a}_{\ell,n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_{i,k}a_{k,\ell} + \boldsymbol{a}_{i,n}a_{n,\ell} + \boldsymbol{a}_{n,n}a_{i,\ell}\right) + \boldsymbol{a}_{i,n} \sum_{k=1}^{n-1} a_{i,k}a_{k,\ell} +$$

$$\boldsymbol{a}_{i,n}\boldsymbol{a}_{i,n}a_{n,\ell} + \boldsymbol{a}_{i,n}\boldsymbol{a}_{n,n}a_{i,\ell} + \boldsymbol{a}_{i,n}\boldsymbol{a}^2_{n,n} + \boldsymbol{a}_{i,n}\boldsymbol{a}_{n,n}a_{i,i}$$

- Nevíme jak to vyřešit, ale ani, že to je NP-těžké

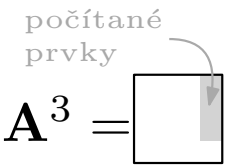
$\rightarrow$ Konstrukce **pseudopolynomiálního algorithmu**

- *Poznámka*: Prvky $A^3_{i,n}$ jsou linární v $a_{\ell,n}, \ell \neq i, n$
  Pokud jsou $a_{i,n}$ a $a_{n,n}$ pevné, potom lze vypočíst $\left[\boldsymbol{A}^3\right]_{i,n}$

- *Myšlenka*: Rozdělíme intervalovou doménu $\boldsymbol{a}_{i,n} \times \boldsymbol{a}_{n,n}$ do menších podintervalů
  # podintervalů roste kvadraticky s přesností a šířkou intervalů,

Matice s intervalovým sloupcem - dokončení

- Výpočet $\boldsymbol{A}^3_{i,j}$
  4. $i \neq n, j = n$: Nejhorší



$$\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{n-1} \boldsymbol{a}_{\ell,n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_{i,k}a_{k,\ell} + \boldsymbol{a}_{i,n}a_{n,\ell} + \boldsymbol{a}_{n,n}a_{i,\ell}\right) + \boldsymbol{a}_{i,n} \sum_{k=1}^{n-1} a_{i,k}a_{k,\ell} +$$

$$\boldsymbol{a}_{i,n}\boldsymbol{a}_{i,n}a_{n,\ell} + \boldsymbol{a}_{i,n}\boldsymbol{a}_{n,n}a_{i,\ell} + \boldsymbol{a}_{i,n}\boldsymbol{a}^2_{n,n} + \boldsymbol{a}_{i,n}\boldsymbol{a}_{n,n}a_{i,i}$$

  - Nevíme jak to vyřešit, ale ani, že to je NP-těžké

$\rightarrow$ Konstrukce **pseudopolynomiálního algorithmu**

- *Poznámka*: Prvky $A^3_{i,n}$ jsou linární v $a_{\ell,n}, \ell \neq i, n$
  Pokud jsou $a_{i,n}$ a $a_{n,n}$ pevné, potom lze vypočíst $\left[\boldsymbol{A}^3\right]_{i,n}$
- *Myšlenka*: Rozdělíme intervalovou doménu $\boldsymbol{a}_{i,n} \times \boldsymbol{a}_{n,n}$ do menších podintervalů
  # podintervalů roste kvadraticky s přesností a šířkou intervalů,

- **Výsledek**: Vždy lze alespoň pseudopolynomiálně
- **Nejspíš**: V P - Milan

Trochu hustší matice

Matice $\boldsymbol{A}$ mající **konstantně vyjádřitelnou mocninu**

- Prvky $\left[\boldsymbol{A}^k\right]_{ij}$ mají počet proměnných omezen konstantou m

Trochu hustší matice

Matice $\boldsymbol{A}$ mající **konstantně vyjádřitelnou mocninu**

- Prvky $\left[\boldsymbol{A}^k\right]_{ij}$ mají počet proměnných omezen konstantou m
- *Příklad*: Tridiagonální matice
  - Prvky mají maximálně $(5 \cdot 3^{k-1} - 3)/2$

Trochu hustší matice

Matice $\boldsymbol{A}$ mající **konstantně vyjádřitelnou mocninu**

- Prvky $\left[\boldsymbol{A}^k\right]_{ij}$ mají počet proměnných omezen konstantou m
- *Příklad*: Tridiagonální matice
  - Prvky mají maximálně $(5 \cdot 3^{k-1} - 3)/2$

Theorem 3

Pro fixní k mějme matici $\boldsymbol{A}$ s konstantně vyjádřitelnou k-tou mocninou. Potom $\left[\boldsymbol{A}^k\right]$ lze pro danou přesnost ε spočítat v poly-čase s ohledem na velikost vstupu a $\log(\varepsilon^{-1})$.

Trochu hustší matice

Matice $\boldsymbol{A}$ mající **konstantně vyjádřitelnou mocninu**

- Prvky $\left[\boldsymbol{A}^k\right]_{ij}$ mají počet proměnných omezen konstantou m
- *Příklad*: Tridiagonální matice
  - Prvky mají maximálně $(5 \cdot 3^{k-1} - 3)/2$

Theorem 3

Pro fixní k mějme matici $\boldsymbol{A}$ s konstantně vyjádřitelnou k-tou mocninou. Potom $\left[\boldsymbol{A}^k\right]$ lze pro danou přesnost ε spočítat v poly-čase s ohledem na velikost vstupu a $\log(\varepsilon^{-1})$.

Idea důkazu

Prvky $\left[\boldsymbol{A}^k\right]_{ij}$ lze tedy vyjádřit jako

- Polynomy v maximálně m proměnných - mající své intervaly

Trochu hustší matice

Matice $\boldsymbol{A}$ mající **konstantně vyjádřitelnou mocninu**

- Prvky $\left[\boldsymbol{A}^k\right]_{ij}$ mají počet proměnných omezen konstantou m
- *Příklad*: Tridiagonální matice
  - Prvky mají maximálně $(5 \cdot 3^{k-1} - 3)/2$

Theorem 3

Pro fixní k mějme matici $\boldsymbol{A}$ s konstantně vyjádřitelnou k-tou mocninou. Potom $\left[\boldsymbol{A}^k\right]$ lze pro danou přesnost ε spočítat v poly-čase s ohledem na velikost vstupu a $\log(\varepsilon^{-1})$.

Idea důkazu

Prvky $\left[\boldsymbol{A}^k\right]_{ij}$ lze tedy vyjádřit jako

- Polynomy v maximálně m proměnných - mající své intervaly
- Nutné vyjádřit dolní a horní mez - pro libovolné volby m proměnných
- Ukážeme mez dolní (analogicky horní)

Trochu hustší matice

Matice $\boldsymbol{A}$ mající **konstantně vyjádřitelnou mocninu**

- Prvky $\left[\boldsymbol{A}^k\right]_{ij}$ mají počet proměnných omezen konstantou m
- *Příklad*: Tridiagonální matice
  - Prvky mají maximálně $(5 \cdot 3^{k-1} - 3)/2$

Theorem 3

Pro fixní k mějme matici $\boldsymbol{A}$ s konstantně vyjádřitelnou k-tou mocninou. Potom $\left[\boldsymbol{A}^k\right]$ lze pro danou přesnost ε spočítat v poly-čase s ohledem na velikost vstupu a $\log(\varepsilon^{-1})$.

Idea důkazu

Prvky $\left[\boldsymbol{A}^k\right]_{ij}$ lze tedy vyjádřit jako

- Polynomy v maximálně m proměnných - mající své intervaly
- Nutné vyjádřit dolní a horní mez - pro libovolné volby m proměnných
- Ukážeme mez dolní (analogicky horní)

Prvky $\left[\boldsymbol{A}^k\right]_{ij}$ budou polynomy $p(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

- Proměnné $x_i \in \boldsymbol{a}_i, \forall i \in [m]$

Trochu hustší matice

Matice $\boldsymbol{A}$ mající **konstantně vyjádřitelnou mocninu**

- Prvky $\left[\boldsymbol{A}^k\right]_{ij}$ mají počet proměnných omezen konstantou m
- *Příklad*: Tridiagonální matice
  - Prvky mají maximálně $(5 \cdot 3^{k-1} - 3)/2$

Theorem 3

Pro fixní k mějme matici $\boldsymbol{A}$ s konstantně vyjádřitelnou k-tou mocninou. Potom $\left[\boldsymbol{A}^k\right]$ lze pro danou přesnost ε spočítat v poly-čase s ohledem na velikost vstupu a $\log(\varepsilon^{-1})$.

Idea důkazu

Prvky $\left[\boldsymbol{A}^k\right]_{ij}$ lze tedy vyjádřit jako

- Polynomy v maximálně m proměnných - mající své intervaly
- Nutné vyjádřit dolní a horní mez - pro libovolné volby m proměnných
- Ukážeme mez dolní (analogicky horní)

Prvky $\left[\boldsymbol{A}^k\right]_{ij}$ budou polynomy $p(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

- Proměnné $x_i \in \boldsymbol{a}_i, \forall i \in [m]$
- Cílem je výpočet meze $\underline{p}$ obrazu $p(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m) = [\underline{p}, \overline{p}]$

Trochu hustší matice pokračování

Idea důkazu

Trochu hustší matice pokračování

Idea důkazu

Výpočet meze $\underline{p}$ obrazu $p(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m) = [\underline{p}, \overline{p}]$

- Lze vypočítat první odhad $\boldsymbol{y} \ni \underline{p}$ (intervalová aritmetika)

Trochu hustší matice pokračování

Idea důkazu

Výpočet meze $\underline{p}$ obrazu $p(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m) = [\underline{p}, \overline{p}]$

- Lze vypočítat první odhad $\boldsymbol{y} \ni \underline{p}$ (intervalová aritmetika)
- *Základní myšlenka*: Aplikace binárního vyhledávání na $\boldsymbol{y}$ a tím ztěsňování odhadu - až po přesnost ϵ

Trochu hustší matice pokračování

Idea důkazu

Výpočet meze $\underline{p}$ obrazu $p(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m) = [\underline{p}, \overline{p}]$

- Lze vypočítat první odhad $\boldsymbol{y} \ni \underline{p}$ (intervalová aritmetika)
- *Základní myšlenka*: Aplikace binárního vyhledávání na $\boldsymbol{y}$ a tím ztěsňování odhadu - až po přesnost ϵ

- Je tedy potřeba testovat $y \leq \underline{p}$, to lze zapsat jako

$$
\begin{aligned}
&(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_m) \\
&\qquad (x_1 - \underline{a}_1 \geq 0 \wedge x_1 - \overline{a}_1 \leq 0)\ldots(x_m - \underline{a}_m \geq 0 \wedge x_m - \overline{a}_m \leq 0) \\
&\qquad \Rightarrow p(x_1, x_2, \ldots, x_m) - y \geq 0.
\end{aligned}
$$

Trochu hustší matice pokračování

Idea důkazu

Výpočet meze $\underline{p}$ obrazu $p(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m) = [\underline{p}, \overline{p}]$

- Lze vypočítat první odhad $\boldsymbol{y} \ni \underline{p}$ (intervalová aritmetika)
- *Základní myšlenka*: Aplikace binárního vyhledávání na $\boldsymbol{y}$ a tím ztěsňování odhadu - až po přesnost ϵ

- Je tedy potřeba testovat $y \leq \underline{p}$, to lze zapsat jako

$$
\begin{aligned}
&(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_m) \\
&\qquad (x_1 - \underline{a}_1 \geq 0 \wedge x_1 - \overline{a}_1 \leq 0)\ldots(x_m - \underline{a}_m \geq 0 \wedge x_m - \overline{a}_m \leq 0) \\
&\qquad \Rightarrow p(x_1, x_2, \ldots, x_m) - y \geq 0.
\end{aligned}
$$

- Pro zjistění pravdivosti - **Tarskiho eliminační metoda** (eliminace $\forall$)
  - Uvažme, že $\underline{a}_i, \overline{a}_i, y$ jsou konstanty

Trochu hustší matice pokračování

Idea důkazu

Výpočet meze $\underline{p}$ obrazu $p(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m) = [\underline{p}, \overline{p}]$

- Lze vypočítat první odhad $\boldsymbol{y} \ni \underline{p}$ (intervalová aritmetika)
- *Základní myšlenka*: Aplikace binárního vyhledávání na $\boldsymbol{y}$ a tím ztěsňování odhadu - až po přesnost ϵ
- Je tedy potřeba testovat $y \leq \underline{p}$, to lze zapsat jako

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_m)$$
$$(x_1 - \underline{a}_1 \geq 0 \wedge x_1 - \overline{a}_1 \leq 0)\ldots(x_m - \underline{a}_m \geq 0 \wedge x_m - \overline{a}_m \leq 0)$$
$$\Rightarrow p(x_1, x_2, \ldots, x_m) - y \geq 0.$$

- Pro zjistění pravdivosti - **Tarskiho eliminační metoda** (eliminace $\forall$)
  - Uvažme, že $\underline{a}_i, \overline{a}_i, y$ jsou konstanty
- Algoritmus
  1. Výpočet prvního odhadu $\boldsymbol{y}$ hodnoty $\underline{p}$
  2. Test, že $y^c \leq \underline{p}$
  3. Pokud ano, tak $\boldsymbol{y} = [y^c, \overline{y}]$
  4. Pokud ne, tak $\boldsymbol{y} = [\underline{y}, y^c]$
  5. Goto 2 pokud není $\operatorname{rad} y < \varepsilon$

Trochu hustší matice pokračování 2

Idea důkazu

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_m)$$
$$(x_1 - \underline{a}_1 \geq 0 \wedge x_1 - \overline{a}_1 \leq 0)\dots(x_m - \underline{a}_m \geq 0 \wedge x_m - \overline{a}_m \leq 0)$$
$$\Rightarrow p(x_1, x_2, \dots, x_m) - y \geq 0.$$

Trochu hustší matice pokračování 2

Idea důkazu

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_m)$$
$$(x_1 - \underline{a}_1 \geq 0 \wedge x_1 - \overline{a}_1 \leq 0)\dots(x_m - \underline{a}_m \geq 0 \wedge x_m - \overline{a}_m \leq 0)$$
$$\Rightarrow p(x_1, x_2, \dots, x_m) - y \geq 0.$$

Varianta od Collinse (Collins, 1998) se složitostí $(2k)^{2^{2m+8}} M^{2^{m+6}} d^3 a$, kde

- m je počet proměnných

  díky konstantně vyjádřitelné mocnině konstantní

Trochu hustší matice pokračování 2

Idea důkazu

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_m)$$
$$(x_1 - \underline{a}_1 \geq 0 \wedge x_1 - \overline{a}_1 \leq 0)\dots(x_m - \underline{a}_m \geq 0 \wedge x_m - \overline{a}_m \leq 0)$$
$$\Rightarrow p(x_1, x_2, \dots, x_m) - y \geq 0.$$

Varianta od Collinse (Collins, 1998) se složitostí $(2k)^{2^{2m+8}} M^{2^{m+6}} d^3 a$, kde

- m je počet proměnných

  díky konstantně vyjádřitelné mocnině konstantní
- M je počet polynomů a a počet atomických formulí

  M je $2m+1$ (a to se rovná a), a tedy také konstatní

Trochu hustší matice pokračování 2

Idea důkazu

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_m)$$
$$(x_1 - \underline{a}_1 \geq 0 \wedge x_1 - \overline{a}_1 \leq 0)\dots(x_m - \underline{a}_m \geq 0 \wedge x_m - \overline{a}_m \leq 0)$$
$$\Rightarrow p(x_1, x_2, \dots, x_m) - y \geq 0.$$

Varianta od Collinse (Collins, 1998) se složitostí $(2k)^{2^{2m+8}} M^{2^{m+6}} d^3 a$, kde

- m je počet proměnných

  díky konstantně vyjádřitelné mocnině konstantní
- M je počet polynomů a a počet atomických formulí

  M je $2m+1$ (a to se rovná a), a tedy také konstatní
- k je maximální stupeň polynomu v libovolné proměnné

  ze zadání opět konstatní

Trochu hustší matice pokračování 2

Idea důkazu

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_m)$$
$$(x_1 - \underline{a}_1 \geq 0 \wedge x_1 - \overline{a}_1 \leq 0)\dots(x_m - \underline{a}_m \geq 0 \wedge x_m - \overline{a}_m \leq 0)$$
$$\Rightarrow p(x_1, x_2, \dots, x_m) - y \geq 0.$$

Varianta od Collinse (Collins, 1998) se složitostí $(2k)^{2^{2m+8}} M^{2^{m+6}} d^3 a$, kde

- m je počet proměnných

  díky konstantně vyjádřitelné mocnině konstantní
- M je počet polynomů a a počet atomických formulí

  M je $2m+1$ (a to se rovná a), a tedy také konstatní
- k je maximální stupeň polynomu v libovolné proměnné

  ze zadání opět konstatní
- d je maximální délka reprezentace parametrů

  Racionální hodnoty $\Rightarrow$ polynomiálně omezeno

Trochu hustší matice pokračování 2

Idea důkazu

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_m)$$
$$(x_1 - \underline{a}_1 \geq 0 \wedge x_1 - \overline{a}_1 \leq 0)\dots(x_m - \underline{a}_m \geq 0 \wedge x_m - \overline{a}_m \leq 0)$$
$$\Rightarrow p(x_1, x_2, \dots, x_m) - y \geq 0.$$

Varianta od Collinse (Collins, 1998) se složitostí $(2k)^{2^{2m+8}} M^{2^{m+6}} d^3 a$, kde

- m je počet proměnných

  díky konstantně vyjádřitelné mocnině konstantní
- M je počet polynomů a a počet atomických formulí

  M je $2m+1$ (a to se rovná a), a tedy také konstatní
- k je maximální stupeň polynomu v libovolné proměnné

  ze zadání opět konstatní
- d je maximální délka reprezentace parametrů

  Racionální hodnoty $\Rightarrow$ polynomiálně omezeno

Celkem $\mathcal{O}(d^3 \log(y^\Delta/\varepsilon))$

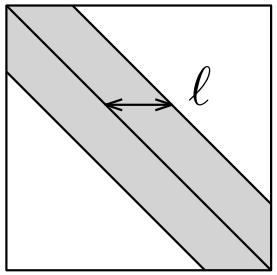
- Eliminace je $\mathcal{O}(d^3)$, viz $(2k)^{2^{2m+8}} M^{2^{m+6}} d^3 a$
- Binární vyhledávání pro počáteční poloměr y^Δ dá $\mathcal{O}(\log(y^\Delta/\varepsilon))$

$\square$

Aplikace Tarskiho metody

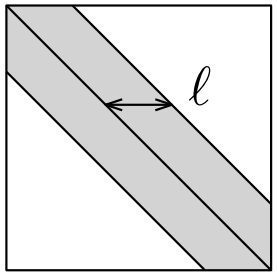
ℓ-pásové matice

- matice mající
  všechny prvky $a_{i,j} = 0$ kdykoliv $|i - j| > \ell$



Aplikace Tarskiho metody

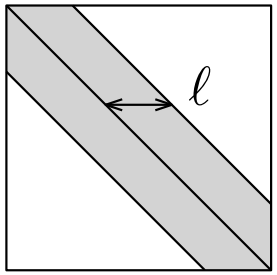
ℓ-pásové matice



- matice mající
  všechny prvky $a_{i,j} = 0$ kdykoliv $|i - j| > \ell$
- Vlastnosti mocnin
  - A je ℓ-pásová a B ℓ-pásová, potom
    - $A \cdot B$ je 2ℓ-pásová

Aplikace Tarskiho metody

ℓ-pásové matice

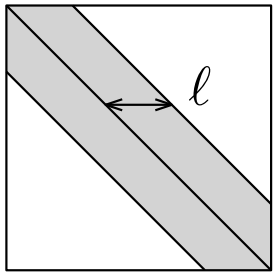


- matice mající
  všechny prvky $a_{i,j} = 0$ kdykoliv $|i - j| > \ell$
- Vlastnosti mocnin
  - A je ℓ-pásová a B ℓ-pásová, potom
    - $A \cdot B$ je 2ℓ-pásová
  - Pro ℓ, k pevné a $\boldsymbol{A}$ jsoucí ℓ-pásovou intervalovou maticí, pak
    - matice $\boldsymbol{A}$ má konstantně vyjádřitelnou k-tou mocninu s

$$m = \frac{(4\ell + 1)(2\ell + 1)^{k-1} - 2\ell - 1}{2\ell}.$$

Aplikace Tarskiho metody

ℓ-pásové matice



- matice mající
  všechny prvky $a_{i,j} = 0$ kdykoliv $|i - j| > \ell$
- Vlastnosti mocnin
  - A je ℓ-pásová a B ℓ-pásová, potom
    - $A \cdot B$ je 2ℓ-pásová
  - Pro ℓ, k pevné a $\boldsymbol{A}$ jsoucí ℓ-pásovou intervalovou maticí, pak
    - matice $\boldsymbol{A}$ má konstantně vyjádřitelnou k-tou mocninu s

$$m = \frac{(4\ell + 1)(2\ell + 1)^{k-1} - 2\ell - 1}{2\ell}.$$

Důsledek 4

Buď k a ℓ pevné a $\boldsymbol{A}$ ℓ-pásová matice. Potom výpočet $\left[\boldsymbol{A}^k\right]$ je s ohledem na přesnost ε polynomiální s ohledem na velikost vstupu a $\log(\varepsilon^{-1})$.

Spectralní metoda

Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se spektrálním rozkladem

- Lze napsat jako $A = S\Lambda S^{-1}$, kde
  - $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, kde λ_i jsou vlastní čísla
  - S matice vlastních vektorů
- Pozn: Mocniny lze snadno počítat jako $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$

Spectralní metoda

Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se spektrálním rozkladem

- Lze napsat jako $A = S\Lambda S^{-1}$, kde
  - $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, kde λ_i jsou vlastní čísla
  - S matice vlastních vektorů
- Pozn: Mocniny lze snadno počítat jako $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$

Intervalové mocniny - hrubý nástřel metody

- Intervalové mocniny $\boldsymbol{A}^k \subseteq \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{S}$
- Výpočet $\boldsymbol{\lambda}^k$ již intervalovou artimetikou

Spectralní metoda

Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se spektrálním rozkladem

- Lze napsat jako $A = S\Lambda S^{-1}$, kde
  - $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, kde λ_i jsou vlastní čísla
  - S matice vlastních vektorů
- Pozn: Mocniny lze snadno počítat jako $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$

Intervalové mocniny - hrubý nástřel metody

- Intervalové mocniny $\boldsymbol{A}^k \subseteq \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{S}$
- Výpočet $\boldsymbol{\lambda}^k$ již intervalovou artimetikou

---

Algorithm 3: k-tá mocnina intervalové matice **spektrální metodou**

Input: Matice **A**, mocnina k
Result: Obálka $\boldsymbol{C}$ mocniny $\mathbf{A}^k$

S $\leftarrow$ vlastní vektory **A** // uložené do sloupců
$\boldsymbol{\lambda} \leftarrow$ vlastní čísla **A**
$\boldsymbol{\Lambda} \leftarrow \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda})$
$\mathbf{C} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}^k\mathbf{S}^{-1}$

Odhad vlastních čísel

Theorem 5 (Bauer, Fike, 1960)

Buď $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *a nechť* A *je diagonalizovatelná, tj. pro nějakou* $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *platí* $V^{-1}AV = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, *a* $\lambda_i \in \mathbb{C}$. *Pro každé vlastní číslo* λ *matice* $(A + B)$, $\exists$ *index* $i \in 1, \ldots, n$ *t.ž.*

$$|\lambda(A + B) - \lambda_i(A)| \leq \kappa_P(V) \cdot ||B||_p$$

Odhad vlastních čísel

Theorem 5 (Bauer, Fike, 1960)

Buď $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *a nechť* A *je diagonalizovatelná, tj. pro nějakou* $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *platí* $V^{-1}AV = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, *a* $\lambda_i \in \mathbb{C}$. *Pro každé vlastní číslo* λ *matice* $(A + B)$, $\exists$ *index* $i \in 1, \ldots, n$ *t.ž.*

$$|\lambda(A + B) - \lambda_i(A)| \leq \kappa_P(V) \cdot ||B||_p$$

Adaptace na intervalové matice (volíme $p = 2$)

- Lze vyjádřit $\boldsymbol{A}$ jako $\boldsymbol{A} = [A^c - A^\Delta, A^c + A^\Delta]$, tedy pro libovolnou $A \in \boldsymbol{A}$ existuje A' t.ž. $|A'| \leq A^\Delta$ a $A = A^c + A'$, a tedy

Odhad vlastních čísel

Theorem 5 (Bauer, Fike, 1960)

Buď $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *a nechť* A *je diagonalizovatelná, tj. pro nějakou* $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *platí* $V^{-1}AV = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, *a* $\lambda_i \in \mathbb{C}$. *Pro každé vlastní číslo* λ *matice* $(A + B)$, $\exists$ *index* $i \in 1, \ldots, n$ *t.ž.*

$$|\lambda(A + B) - \lambda_i(A)| \leq \kappa_P(V) \cdot ||B||_p$$

Adaptace na intervalové matice (volíme $p = 2$)

- Lze vyjádřit $\boldsymbol{A}$ jako $\boldsymbol{A} = [A^c - A^\Delta, A^c + A^\Delta]$, tedy pro libovolnou $A \in \boldsymbol{A}$ existuje A' t.ž. $|A'| \leq A^\Delta$ a $A = A^c + A'$, a tedy

$$|\lambda(A^c + A') - \lambda_i(A^c)| \leq \kappa_2(V) \cdot ||A'||_2$$

Odhad vlastních čísel

Theorem 5 (Bauer, Fike, 1960)

Buď $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *a nechť* A *je diagonalizovatelná, tj. pro nějakou* $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *platí* $V^{-1}AV = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, *a* $\lambda_i \in \mathbb{C}$. *Pro každé vlastní číslo* λ *matice* $(A + B)$, $\exists$ *index* $i \in 1, \ldots, n$ *t.ž.*

$$|\lambda(A + B) - \lambda_i(A)| \leq \kappa_P(V) \cdot ||B||_p$$

Adaptace na intervalové matice (volíme $p = 2$)

- Lze vyjádřit $\boldsymbol{A}$ jako $\boldsymbol{A} = [A^c - A^\Delta, A^c + A^\Delta]$, tedy pro libovolnou $A \in \boldsymbol{A}$ existuje A' t.ž. $|A'| \leq A^\Delta$ a $A = A^c + A'$, a tedy

$$|\lambda(A^c + A') - \lambda_i(A^c)| \leq \kappa_2(V) \cdot ||A'||_2$$

- Since $\|A'\|_2 \leq \|A^\Delta\|_2$ then

$$|\lambda(A^c + A') - \lambda_i(A^c)| = |\lambda(A) - \lambda_i(A^c)| \leq \kappa_2(V) \cdot ||A^\Delta||_2$$

Odhad vlastních čísel

Theorem 5 (Bauer, Fike, 1960)

Buď $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *a nechť* A *je diagonalizovatelná, tj. pro nějakou* $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *platí* $V^{-1}AV = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, *a* $\lambda_i \in \mathbb{C}$. *Pro každé vlastní číslo* λ *matice* $(A + B)$, $\exists$ *index* $i \in 1, \ldots, n$ *t.ž.*

$$|\lambda(A + B) - \lambda_i(A)| \leq \kappa_P(V) \cdot ||B||_p$$

Adaptace na intervalové matice (volíme $p = 2$)

- Lze vyjádřit $\boldsymbol{A}$ jako $\boldsymbol{A} = [A^c - A^\Delta, A^c + A^\Delta]$, tedy pro libovolnou $A \in \boldsymbol{A}$ existuje A' t.ž. $|A'| \leq A^\Delta$ a $A = A^c + A'$, a tedy

$$|\lambda(A^c + A') - \lambda_i(A^c)| \leq \kappa_2(V) \cdot ||A'||_2$$

- Since $\|A'\|_2 \leq \|A^\Delta\|_2$ then

$$|\lambda(A^c + A') - \lambda_i(A^c)| = |\lambda(A) - \lambda_i(A^c)| \leq \kappa_2(V) \cdot ||A^\Delta||_2$$

- Tedy každé vlastní číslo $\lambda(A)$ leží v nějakém disku kolem $\lambda_i(A^c)$ s poloměrem $\kappa_2(V) \cdot ||A^\Delta||_2$

Odhad vlastních čísel

Theorem 5 (Bauer, Fike, 1960)

Buď $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *a nechť* A *je diagonalizovatelná, tj. pro nějakou* $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *platí* $V^{-1}AV = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, *a* $\lambda_i \in \mathbb{C}$. *Pro každé vlastní číslo* λ *matice* $(A + B)$, $\exists$ *index* $i \in 1, \ldots, n$ *t.ž.*

$$|\lambda(A + B) - \lambda_i(A)| \leq \kappa_P(V) \cdot ||B||_p$$

Adaptace na intervalové matice (volíme $p = 2$)

- Lze vyjádřit $\boldsymbol{A}$ jako $\boldsymbol{A} = [A^c - A^\Delta, A^c + A^\Delta]$, tedy pro libovolnou $A \in \boldsymbol{A}$ existuje A' t.ž. $|A'| \leq A^\Delta$ a $A = A^c + A'$, a tedy

$$|\lambda(A^c + A') - \lambda_i(A^c)| \leq \kappa_2(V) \cdot ||A'||_2$$

- Since $\|A'\|_2 \leq \|A^\Delta\|_2$ then

$$|\lambda(A^c + A') - \lambda_i(A^c)| = |\lambda(A) - \lambda_i(A^c)| \leq \kappa_2(V) \cdot ||A^\Delta||_2$$

- Tedy každé vlastní číslo $\lambda(A)$ leží v nějakém disku kolem $\lambda_i(A^c)$ s poloměrem $\kappa_2(V) \cdot ||A^\Delta||_2$
- **Předpoklad**

  Disky kolem $\lambda_i(| A)$ o poloměru $\kappa_2(V) \cdot ||A^\Delta||_2$, jsou *disjunktní*.

Algoritmus odhadu vlastních čísel

Algorithm 4: Intervalová obálka vlastních čísel matice $\boldsymbol{A}$

Input: Matice **A** s diagonalizovatelnou A^c
Result: Intervalová obálka **C** vlastních čísel **A**

$V \leftarrow$ vlastní vektory A^c
$\lambda \leftarrow$ vlastní čísla A^c
$n \leftarrow$ počet vlastních čísel A^c
$P \leftarrow ||V||_2 \cdot ||V^{-1}||_2 \cdot ||A^{\Delta}||_2$
for $i = 1, 2, \ldots, n$ **do**
  x $\leftarrow [\lambda(i) - P, \lambda(i) + P]$
  připoj **x** do **C**
end

Výpočet vlastních vektorů

Stanovení obálky vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$

- Využijeme definice $(A - \lambda I_n)x = 0$
  - Vlastní číslo řešením $\det(A - \lambda I_n)$ a vlastní vektor $(A - \lambda I_n)x = 0$

Výpočet vlastních vektorů

Stanovení obálky vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$

- Využijeme definice $(A - \lambda I_n)x = 0$
  - Vlastní číslo řešením $\det(A - \lambda I_n)$ a vlastní vektor $(A - \lambda I_n)x = 0$
- Buď $B := A - \lambda I_n$ a (z předpoklad) λ jednoduché
  - B je singulární s hodností $n - 1$

Výpočet vlastních vektorů

Stanovení obálky vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$

- Využijeme definice $(A - \lambda I_n)x = 0$
  - Vlastní číslo řešením $\det(A - \lambda I_n)$ a vlastní vektor $(A - \lambda I_n)x = 0$
- Buď $B := A - \lambda I_n$ a (z předpoklad) λ jednoduché
  - B je singulární s hodností $n - 1$
  - Pro vlastní vektor x je $Bx = 0$
  - Jelikož $x \neq 0$, tak $\exists j$ t.ž. $x_j \neq 0$ (BÚNO) $x_j = 1$

Výpočet vlastních vektorů

Stanovení obálky vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$

- Využijeme definice $(A - \lambda I_n)x = 0$
  - Vlastní číslo řešením $\det(A - \lambda I_n)$ a vlastní vektor $(A - \lambda I_n)x = 0$
- Buď $B := A - \lambda I_n$ a (z předpoklad) λ jednoduché
  - B je singulární s hodností $n - 1$
  - Pro vlastní vektor x je $Bx = 0$
  - Jelikož $x \neq 0$, tak $\exists j$ t.ž. $x_j \neq 0$ (BÚNO) $x_j = 1$
- *Myšlenka*
  - Přepíšeme $Bx = 0$ na $\tilde{B}\tilde{x} = -B_{*j}$
    - $-B_{*j}$ je j-tý sloupec B a $\tilde{B}$ je B bez j-tého sloupce

Výpočet vlastních vektorů

Stanovení obálky vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$

- Využijeme definice $(A - \lambda I_n)x = 0$
  - Vlastní číslo řešením $\det(A - \lambda I_n)$ a vlastní vektor $(A - \lambda I_n)x = 0$
- Buď $B := A - \lambda I_n$ a (z předpoklad) λ jednoduché
  - B je singulární s hodností $n - 1$
  - Pro vlastní vektor x je $Bx = 0$
  - Jelikož $x \neq 0$, tak $\exists j$ t.ž. $x_j \neq 0$ (BÚNO) $x_j = 1$
- *Myšlenka*
  - Přepíšeme $Bx = 0$ na $\tilde{B}\tilde{x} = -B_{*j}$
    - $-B_{*j}$ je j-tý sloupec B a $\tilde{B}$ je B bez j-tého sloupce
  - Systém $\tilde{B}\tilde{x} = -B_{*j}$ řešitelný, ale přeurčený
    - Lze vynechat nějaký řádek

Výpočet vlastních vektorů

Stanovení obálky vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$

- Využijeme definice $(A - \lambda I_n)x = 0$
  - Vlastní číslo řešením $\det(A - \lambda I_n)$ a vlastní vektor $(A - \lambda I_n)x = 0$
- Buď $B := A - \lambda I_n$ a (z předpoklad) λ jednoduché
  - B je singulární s hodností $n - 1$
  - Pro vlastní vektor x je $Bx = 0$
  - Jelikož $x \neq 0$, tak $\exists j$ t.ž. $x_j \neq 0$ (BÚNO) $x_j = 1$
- *Myšlenka*
  - Přepíšeme $Bx = 0$ na $\tilde{B}\tilde{x} = -B_{*j}$
    - $-B_{*j}$ je j-tý sloupec B a $\tilde{B}$ je B bez j-tého sloupce
  - Systém $\tilde{B}\tilde{x} = -B_{*j}$ řešitelný, ale přeurčený
    - Lze vynechat nějaký řádek
  - Celkově dostáváme $B^{ij}\tilde{x} = -B^{i}_{*j}$
    - Nyní je B^{ij} regulární

Výpočet vlastních vektorů

Stanovení obálky vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$

- Využijeme definice $(A - \lambda I_n)x = 0$
  - Vlastní číslo řešením $\det(A - \lambda I_n)$ a vlastní vektor $(A - \lambda I_n)x = 0$
- Buď $B := A - \lambda I_n$ a (z předpoklad) λ jednoduché
  - B je singulární s hodností $n - 1$
  - Pro vlastní vektor x je $Bx = 0$
  - Jelikož $x \neq 0$, tak $\exists j$ t.ž. $x_j \neq 0$ (BÚNO) $x_j = 1$
- *Myšlenka*
  - Přepíšeme $Bx = 0$ na $\tilde{B}\tilde{x} = -B_{*j}$
    - $-B_{*j}$ je j-tý sloupec B a $\tilde{B}$ je B bez j-tého sloupce
  - Systém $\tilde{B}\tilde{x} = -B_{*j}$ řešitelný, ale přeurčený
    - Lze vynechat nějaký řádek
  - Celkově dostáváme $B^{ij}\tilde{x} = -B^{i}_{*j}$
    - Nyní je B^{ij} regulární
- Platí i naopak
  - Je-li B^{ij} regulární pro nějaké $i, j \in [n]$ a $\tilde{x}$ řešením $B^{ij}\tilde{x} = -B^{i}_{*j}$, potom

Rozšíření $\tilde{x}$ vložením 1 získáme vlastní vektor

Algoritmus odhadu vlastních čísel

Algorithm 5: Intervalová obálka vlastních vektorů

Input: Matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ a obálka k-tého vlastního čísla $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{IR}$
Result: Intervalová obálka $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$ k-tého vlastního vektoru of $\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{B} \leftarrow \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda} I_n$;
Zvolte indexy i, j;
vypočítáme obálku $\tilde{\boldsymbol{x}}$ intervalového systému $\boldsymbol{B}^{ij} \tilde{x} = -\boldsymbol{B}^{j}_{*j}$;
if *úspěch* **then**
  rozšíříme $\tilde{\boldsymbol{x}}$ to $\boldsymbol{x}$ vložením 1;
  return $\boldsymbol{x}$
end
return algoritmus nezvládl stanovit $\boldsymbol{x}$

Volba indexů

Základní možnost: Iterace všemi $\Rightarrow$ složitost $\mathcal{O}(n^6)$

Volba indexů

Základní možnost: Iterace všemi $\Rightarrow$ složitost $\mathcal{O}(n^6)$

Výběr vhodných

- Využití podmínek regularity $\boldsymbol{B}$: $\rho(|(B^c)^{-1}|B^{\Delta}) < 1$.

Volba indexů

Základní možnost: Iterace všemi $\Rightarrow$ složitost $\mathcal{O}(n^6)$

Výběr vhodných

- Využití podmínek regularity $\boldsymbol{B}$: $\rho(|(B^c)^{-1}|B^\Delta) < 1$.
  - Pro vhodnou maticovou normu

$$\begin{aligned}\rho(|(B^c)^{-1}|B^\Delta) &\leq \||(B^c)^{-1}|B^\Delta\| \leq \||(B^c)^{-1}|\| \cdot \|B^\Delta\| \\ &= \|(B^c)^{-1}\| \cdot \|B^\Delta\| \approx \|B^c\|^{-1} \cdot \|B^\Delta\|.\end{aligned}$$

Volba indexů

Základní možnost: Iterace všemi $\Rightarrow$ složitost $\mathcal{O}(n^6)$

Výběr vhodných

- Využití podmínek regularity $\boldsymbol{B}$: $\rho(|(B^c)^{-1}|B^\Delta) < 1$.
  - Pro vhodnou maticovou normu

$$\begin{aligned}\rho(|(B^c)^{-1}|B^\Delta) &\leq \||(B^c)^{-1}|B^\Delta\| \leq \||(B^c)^{-1}|\| \cdot \|B^\Delta\| \\ &= \|(B^c)^{-1}\| \cdot \|B^\Delta\| \approx \|B^c\|^{-1} \cdot \|B^\Delta\|.\end{aligned}$$

  - Pro Frobeniovu normu vybíráme i, j minimalizací

$$\min_{ij} \ \|(B^c)^{ij}\|_F^{-1} \|(B^\Delta)^{ij}\|_F.$$

Volba indexů

Základní možnost: Iterace všemi $\Rightarrow$ složitost $\mathcal{O}(n^6)$

Výběr vhodných

- Využití podmínek regularity $\boldsymbol{B}$: $\rho(|(B^c)^{-1}|B^\Delta) < 1$.
  - Pro vhodnou maticovou normu

$$\begin{aligned}\rho(|(B^c)^{-1}|B^\Delta) &\leq \||(B^c)^{-1}|B^\Delta\| \leq \||(B^c)^{-1}|\| \cdot \|B^\Delta\| \\ &= \|(B^c)^{-1}\| \cdot \|B^\Delta\| \approx \|B^c\|^{-1} \cdot \|B^\Delta\|.\end{aligned}$$

  - Pro Frobeniovu normu vybíráme i, j minimalizací

$$\min_{ij} \ \|(B^c)^{ij}\|_F^{-1} \|(B^\Delta)^{ij}\|_F.$$

  - Lze vypočítat jako

$$\|(B^\Delta)^{ij}\|_F^2 = \sum_{k,\ell} ((B^\Delta)^{ij})_{k\ell}^2 = \|B^\Delta\|_F^2 - \sum_{\ell} (B^\Delta)_{i\ell}^2 - \sum_{k \neq i} (B^\Delta)_{kj}^2.$$

Volba indexů

Základní možnost: Iterace všemi $\Rightarrow$ složitost $\mathcal{O}(n^6)$

Výběr vhodných

- Využití podmínek regularity $\boldsymbol{B}$: $\rho(|(B^c)^{-1}|B^\Delta) < 1$.
  - Pro vhodnou maticovou normu

$$\begin{aligned}\rho(|(B^c)^{-1}|B^\Delta) &\leq \||(B^c)^{-1}|B^\Delta\| \leq \||(B^c)^{-1}|\| \cdot \|B^\Delta\| \\ &= \|(B^c)^{-1}\| \cdot \|B^\Delta\| \approx \|B^c\|^{-1} \cdot \|B^\Delta\|.\end{aligned}$$

  - Pro Frobeniovu normu vybíráme i, j minimalizací

$$\min_{ij} \ \|(B^c)^{ij}\|_F^{-1} \|(B^\Delta)^{ij}\|_F.$$

  - Lze vypočítat jako

$$\|(B^\Delta)^{ij}\|_F^2 = \sum_{k,\ell} ((B^\Delta)^{ij})_{k\ell}^2 = \|B^\Delta\|_F^2 - \sum_{\ell} (B^\Delta)_{i\ell}^2 - \sum_{k \neq i} (B^\Delta)_{kj}^2.$$

    - $\|B^\Delta\|_F^2$ vyžaduje $\mathcal{O}(n^2)$ (lze předpočítat)

Volba indexů

Základní možnost: Iterace všemi $\Rightarrow$ složitost $\mathcal{O}(n^6)$

Výběr vhodných

- Využití podmínek regularity $\boldsymbol{B}$: $\rho(|(B^c)^{-1}|B^\Delta) < 1$.
  - Pro vhodnou maticovou normu

$$\begin{aligned}\rho(|(B^c)^{-1}|B^\Delta) &\leq \||(B^c)^{-1}|B^\Delta\| \leq \||(B^c)^{-1}|\| \cdot \|B^\Delta\| \\ &= \|(B^c)^{-1}\| \cdot \|B^\Delta\| \approx \|B^c\|^{-1} \cdot \|B^\Delta\|.\end{aligned}$$

  - Pro Frobeniovu normu vybíráme i, j minimalizací

$$\min_{ij} \ \|(B^c)^{ij}\|_F^{-1} \|(B^\Delta)^{ij}\|_F.$$

  - Lze vypočítat jako

$$\|(B^\Delta)^{ij}\|_F^2 = \sum_{k,\ell} ((B^\Delta)^{ij})_{k\ell}^2 = \|B^\Delta\|_F^2 - \sum_{\ell} (B^\Delta)_{i\ell}^2 - \sum_{k \neq i} (B^\Delta)_{kj}^2.$$

    - $\|B^\Delta\|_F^2$ vyžaduje $\mathcal{O}(n^2)$ (lze předpočítat)
    - součty čtverců řádků a sloupců $\sum_\ell (B^\Delta)_{i\ell}^2$ vyžaduje $\mathcal{O}(n^2)$

Volba indexů

Základní možnost: Iterace všemi $\Rightarrow$ složitost $\mathcal{O}(n^6)$

Výběr vhodných

- Využití podmínek regularity $\boldsymbol{B}$: $\rho(|(B^c)^{-1}|B^\Delta) < 1$.
  - Pro vhodnou maticovou normu

$$\begin{aligned}\rho(|(B^c)^{-1}|B^\Delta) &\leq \||(B^c)^{-1}|B^\Delta\| \leq \||(B^c)^{-1}|\| \cdot \|B^\Delta\| \\ &= \|(B^c)^{-1}\| \cdot \|B^\Delta\| \approx \|B^c\|^{-1} \cdot \|B^\Delta\|.\end{aligned}$$

  - Pro Frobeniovu normu vybíráme i, j minimalizací

$$\min_{ij} \ \|(B^c)^{ij}\|_F^{-1} \|(B^\Delta)^{ij}\|_F.$$

  - Lze vypočítat jako

$$\|(B^\Delta)^{ij}\|_F^2 = \sum_{k,\ell} ((B^\Delta)^{ij})_{k\ell}^2 = \|B^\Delta\|_F^2 - \sum_{\ell} (B^\Delta)_{i\ell}^2 - \sum_{k \neq i} (B^\Delta)_{kj}^2.$$

    - $\|B^\Delta\|_F^2$ vyžaduje $\mathcal{O}(n^2)$ (lze předpočítat)
    - součty čtverců řádků a sloupců $\sum_\ell (B^\Delta)_{i\ell}^2$ vyžaduje $\mathcal{O}(n^2)$
    - Celkem tedy

$$\|(B^\Delta)^{ij}\|_F^2 = \sum_{k,\ell} ((B^\Delta)^{ij})_{k\ell}^2 = \|B^\Delta\|_F^2 - \sum_{\ell} (B^\Delta)_{i\ell}^2 - \sum_{k} (B^\Delta)_{kj}^2 + (B^\Delta)_{ij}^2.$$

Algoritmus výběru

Algorithm 6: Selection of i, j

Input: Matrix $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Result: $\operatorname{argmin}_{i,j} \frac{\|(B^{\Delta})^{ij}\|_F^2}{\|(B^c)^{ij}\|_F^2}$

Compute $\|B^c\|_F^2$ and $\|B^{\Delta}\|_F^2$;

Compute $\sum_\ell (B^c)_{i\ell}^2$ and $\sum_k (B^c)_{ki}^2$ for all $i = 1, \ldots, n$;

Compute $\sum_\ell (B^{\Delta})_{i\ell}^2$ and $\sum_k (B^{\Delta})_{ki}^2$ for all $i = 1, \ldots, n$;

Compute $\|(B^c)^{ij}\|_F^2 = \|B^c\|_F^2 - \sum_\ell (B^c)_{i\ell}^2 - \sum_k (B^c)_{kj}^2 + (B^c)_{ij}^2$ for all $i, j = 1, \ldots, n$;

Compute $\|(B^{\Delta})^{ij}\|_F^2 = \|B^{\Delta}\|_F^2 - \sum_\ell (B^{\Delta})_{i\ell}^2 - \sum_k (B^{\Delta})_{kj}^2 + (B^{\Delta})_{ij}^2$ for all $i, j = 1, \ldots, n$;

return *argmin*$_{i,j} \frac{\|(B^{\Delta})^{ij}\|_F^2}{\|(B^c)^{ij}\|_F^2}$

Thank you