

# Fuzzy prístup k neurčitosti: Koľko stupňov má „mierne teplá“ voda?

Elif Garajová

1. decembra 2014

# Obsah

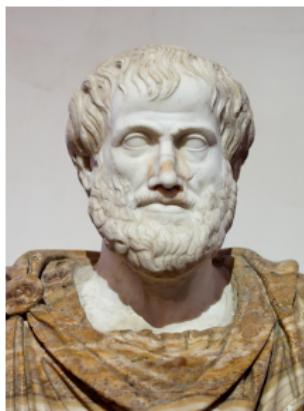
① Od klasickej logiky k fuzzy

② Úvod do fuzzy teórie

③ Aplikácie

④ Fuzzy optimalizácia

# Dvojhodnotová logika



Aristoteles (384–322 p.n.l.)

- považovaný za otca logiky
- „Výrok je buď pravdivý alebo nepravdivý.“
- Problém budúcej pravdy: „Zajtra bude námorná bitka.“

# Viachodnotová logika



Jan Lukasiewicz (1878–1956)

- pol'ský logik a filozof
- trojhodnotová logika (pravdivé/nepravdivé/možné)
- n-hodnotové logiky (Post, Lukasiewicz, Tarski)
- nekonečne-hodnotová logika

# Fuzzy logika



Lotfi Zadeh (\*1921)

- azerbajdžanský matematik, informatik a elektrotechnický inžinier
- 1965 – teória fuzzy množín (fuzzy = neurčitý, neostrový)
- 1973 – teória fuzzy logiky

*Prof. William Kahan, UC Berkeley*

“Fuzzy theory is wrong, wrong, and pernicious. What we need is more logical thinking, not less. The danger of fuzzy logic is that it will encourage the sort of imprecise thinking that has brought us so much trouble. Fuzzy logic is the cocaine of science.”

*Lotfi Zadeh*

“A basic difference between perceptions and measurements is that, in general, measurements are crisp whereas perceptions are fuzzy. In a fundamental way, this is the reason why to deal with perceptions it is necessary to employ a logical system that is fuzzy rather than crisp.”

# Fuzzy logika

- stupne pravdivosti z intervalu  $[0, 1]$
- pravdivostné tabuľky  $\rightarrow$  pravdivostné funkcie
- rôzne pravdivostné funkcie: Gödelova, Lukasiewiczova, produktová, Hájkova fuzzy logika, ...

$$x \wedge y = \min(x, y)$$

$$x \vee y = \max(x, y)$$

$$\neg x = 1 - x$$

# Fuzzy množiny

- charakteristická funkcia  $\chi_A \rightarrow$  stupeň príslušnosti  $\mu_A(x)$
- príslušnosť k množine v rozsahu  $[0, 1]$

$$\mu_A(x) = 0$$

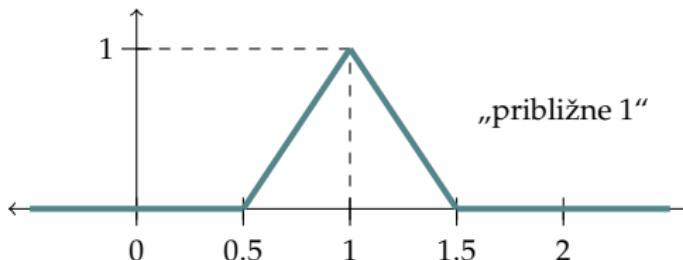
$x$  iste nepatrí do  $A$

$$\mu_A(x) = 1$$

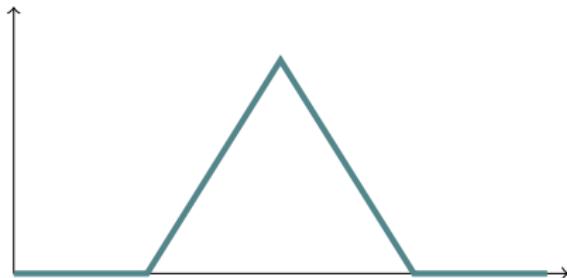
$x$  iste patrí do  $A$

$$0 < \mu_A(x) < 1$$

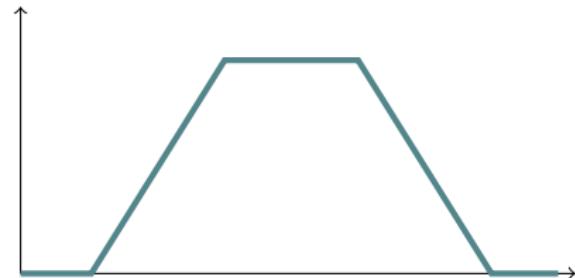
$x$  je fuzzy prvkom  $A$



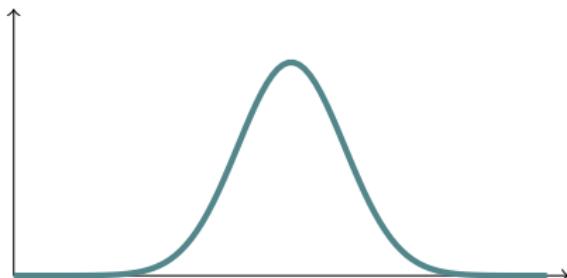
# Bežné druhy funkcií príslušnosti



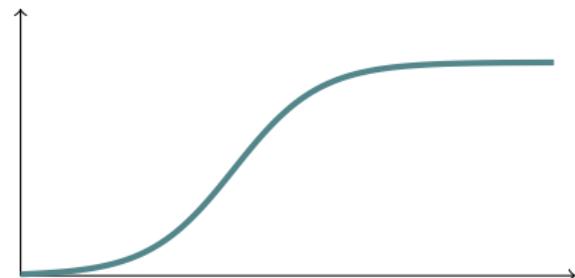
Trojuholníková f.



Lichobežníková f.



Gaussovská f.



Sigmoidálna f.

# Konštrukcia funkcie príslušnosti

Subjektívne hodnotenie modelovanie ľudského jednania,  
konštrukcia funkcie na základe subjektívneho  
hodnotenia vhodnej vzorky ľudí, psychotesty

Ad-hoc metódy výber z malej skupiny často používaných  
druhov funkcií, zjednodušenie na voľbu centrálnej  
hodnoty a sklonu funkcie

Frekvencie a pravdepodobnosti využitie frekvenčných  
histogramov a ich konverzia

Experimentálne metódy získanie dát formou experimentov a  
meraní

# $\alpha$ -rezy

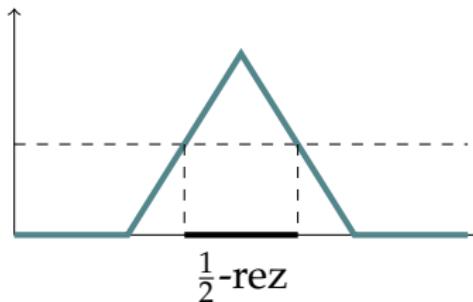
## Definícia

Bud'  $A$  fuzzy podmnožina ostrej množiny  $X$  a  $\alpha \in [0, 1]$ .

Definujeme  $\alpha$ -hladinu  $\mu_A^{-1}(\alpha)$  a  $\alpha$ -rez  $R_A(\alpha)$  množiny  $A$  nasledovne:

$$\mu_A^{-1}(\alpha) := \{x \in X \mid \mu_A(x) = \alpha\},$$

$$R_A(\alpha) := \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$



# Fuzzy množinové operácie

## Štandardná Zadehova definícia

Prienik:  $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Zjednotenie:  $\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Doplnek:  $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

## Alternatívne definície prieniku:

Produktová definícia:  $\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$

Lukasiewiczova definícia: 
$$\begin{cases} \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1 & \text{pre } \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1 > 0, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Slabá definícia: 
$$\begin{cases} \mu_A(x) & \text{pre } \mu_B(x) = 1, \\ \mu_B(x) & \text{pre } \mu_A(x) = 1, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

# Fuzzy vs. pravdepodobnosť

## Fuzzy:

- Do akej miery udalosť nastane?
- Neurčitosť ohľadom samotnej udalosti
- Ako teplá bude voda v jazere? → vlažná (0.5), studená (0)

## Pravdepodobnosť:

- S akou pravdepodobnosťou udalosť nastane?
- Neurčitosť ohľadom výskytu udalosti
- Bude voda v jazere teplá? → Bud' bude, alebo nebude.

# Fuzzy čísla

## Definícia

**Trojuholníkové fuzzy číslo**  $A = (a_1, a_2, a_3)$  definujeme pomocou funkcie príslušnosti

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < a_1, \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{pre } a_1 \leq x \leq a_2, \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & \text{pre } a_2 \leq x \leq a_3, \\ 0 & \text{pre } x > a_3. \end{cases}$$

# Fuzzy aritmetika

$$A + B = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

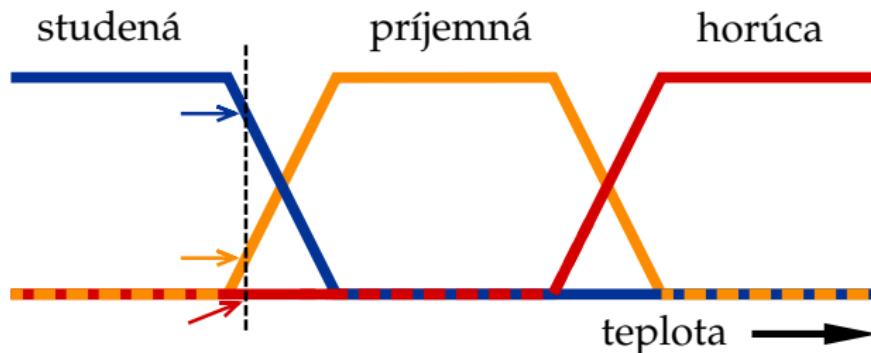
$$A - B = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$$

Bud'  $R_A(\alpha) = [a_\alpha^L, a_\alpha^R]$ ,  $R_B(\alpha) = [b_\alpha^L, b_\alpha^R]$ . Potom  $A \cdot B$  definujeme pomocou  $\alpha$ -reuzu  $[c_\alpha^L, c_\alpha^R]$ , kde

$$c_\alpha^L := \min\{a_\alpha^L b_\alpha^L, a_\alpha^L b_\alpha^R, a_\alpha^R b_\alpha^L, a_\alpha^R b_\alpha^R\},$$

$$c_\alpha^R := \max\{a_\alpha^L b_\alpha^L, a_\alpha^L b_\alpha^R, a_\alpha^R b_\alpha^L, a_\alpha^R b_\alpha^R\}.$$

# Meranie teploty



Hodnotenie teploty:

- pomerne studená
- trochu príjemná
- nie je horúca

IF temperature IS very cold THEN stop fan  
IF temperature IS cold THEN turn down fan  
IF temperature IS normal THEN maintain level  
IF temperature IS hot THEN speed up fan

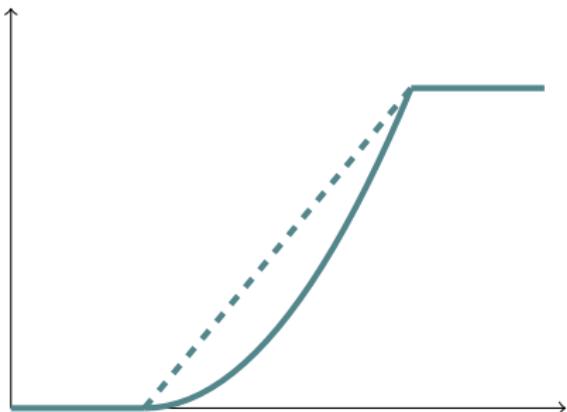
# Lingvistické premenné a modifikátory

## Definícia

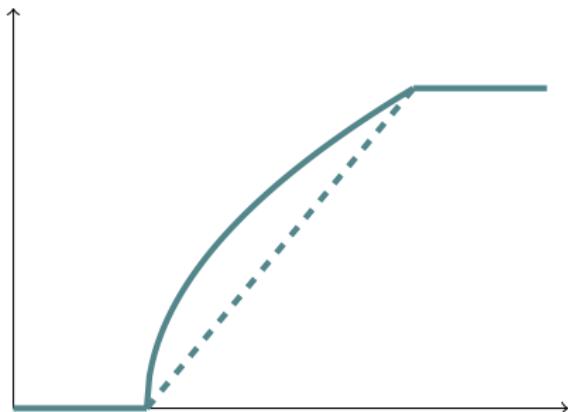
Premennú, ktorej možné hodnoty tvorí množina slov alebo viet nazývame **lingvistická premenná**.

- **lingvistická premenná:** teplota vody
- **hodnoty premennej:** studená, teplá, horúca
- **modifikátory:** trochu, pomerne, veľmi, nie príliš, ...

# Transformácia funkcie príslušnosti



Obr.: veľmi horúca,  $\mu' = \mu^2$



Obr.: mierne horúca,  $\mu' = \sqrt{\mu}$

# Aplikácie fuzzy množín

- automobily, vlaky (ABS, radenie, ovládanie rýchlosť)
- pračky, umývačky riadu (nastavenie programu)
- fotoaparáty (autofocus, analýza obrazu)
- lekárska diagnostika
- klimatizácia (teplota)
- vysávače (sacia sila)

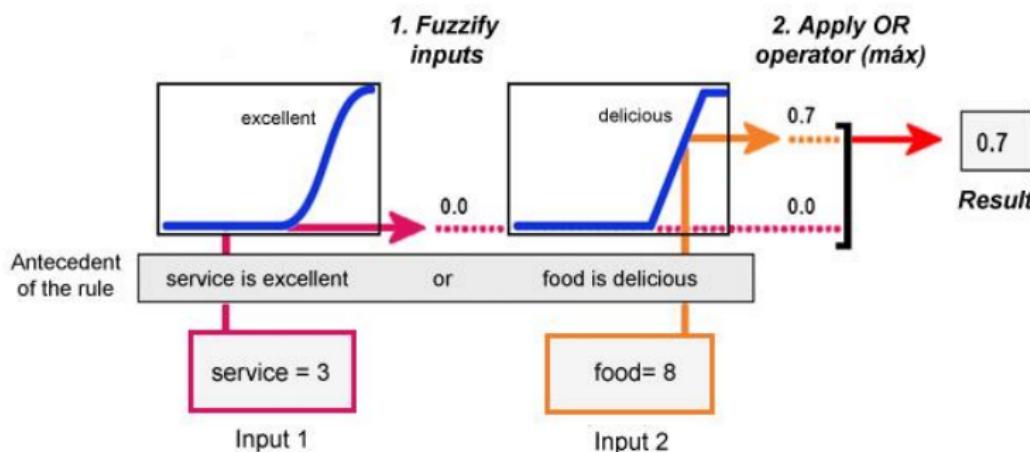


1987 - Sendai

# Mamdaniho metóda

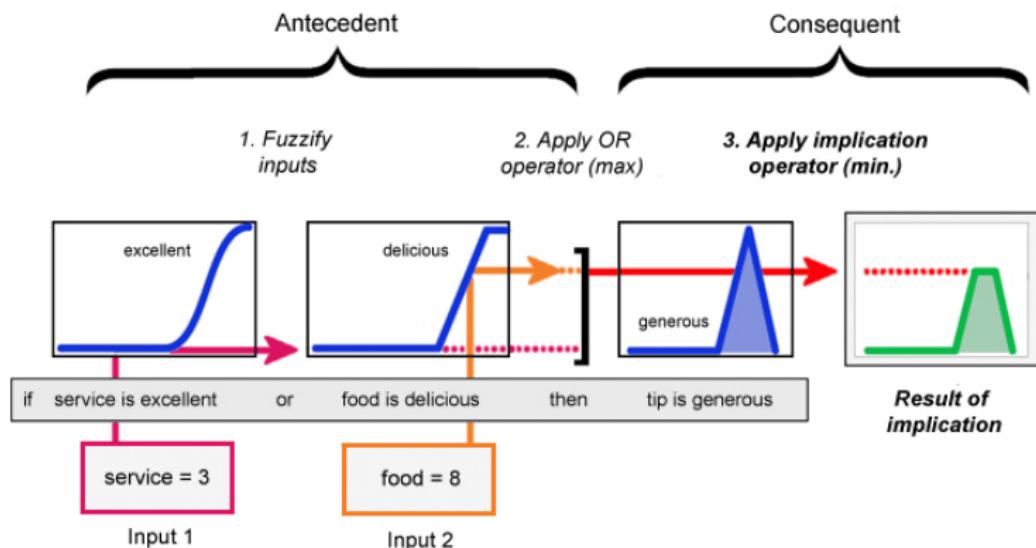
- ① Fuzzyifikácia (prevod ostrej nameranej hodnoty na stupeň príslušnosti k fuzzy množine)
- ② Vyvodenie dôsledku na základe definovaných pravidiel
- ③ Agregácia jednotlivých dôsledkov
- ④ Defuzzifikácia (prevod získaného fuzzy stupňa na ostrú hodnotu)

# Fuzzifikácia

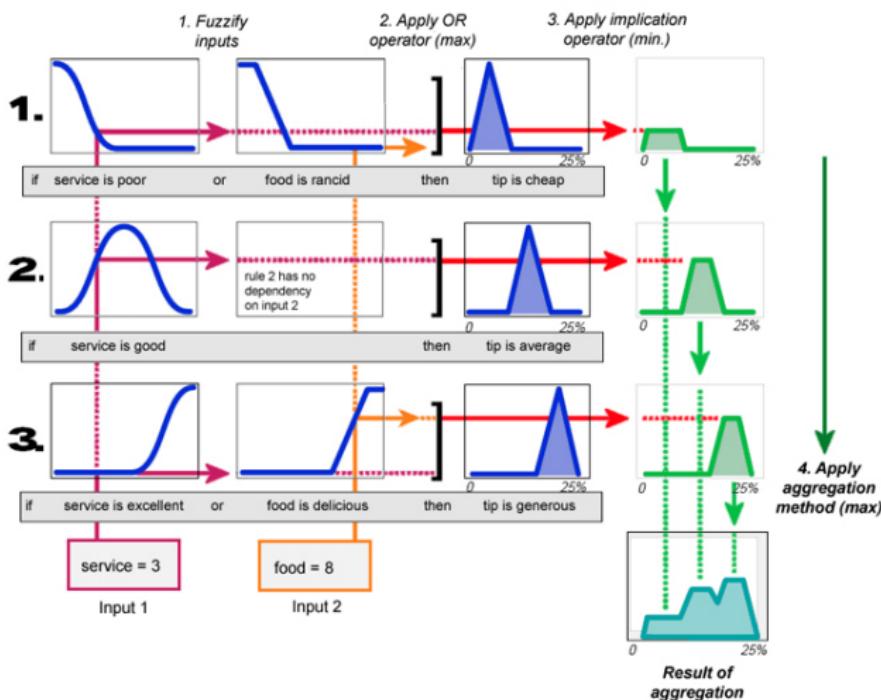


Zdroj: Universidad Politécnica de Madrid

# Vyvodenie dôsledku



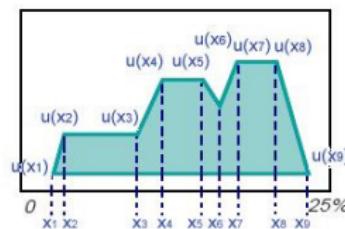
# Agregácia dôsledkov



# Defuzzifikácia

**5. Defuzzify the aggregate output (centroid)**

$$g = \frac{\sum_{i=1}^9 x_i \cdot u(x_i)}{\sum_{i=1}^9 u(x_i)} = 16,7$$



tip = 16,7%  
*Result of defuzzification*

# Fuzzy optimalizácia

- fuzzy účelová funkcia:
  - cieľe môžu mať rovnaké postavenie ako podmienky
    - pr. Chceme dosiahnuť *vysoký* zisk.
- fuzzy podmienky:
  - využitie fuzzy čísel
    - pr. „Voda musí mať *primeranú* teplotu.“
- slabé podmienky:  $Ax \tilde{\leq} b$ 
  - dosiahnutie lepšej hodnoty účelovej funkcie
  - dosiahnutie prípustnosti úlohy

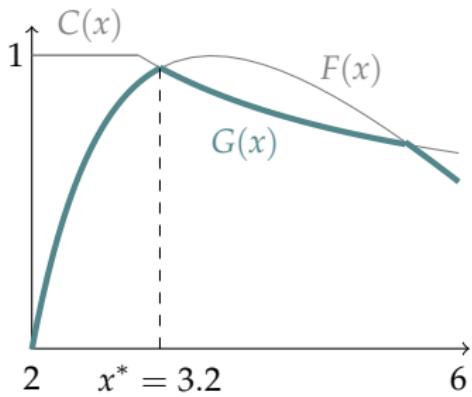
# Príklad fuzzy úlohy

$$\max 10 - x - \frac{25}{x^2}$$

$$C_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < 2 \\ 1 & \text{pre } 2 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{pre } x > 6 \end{cases} \quad x \text{ musí byť medzi 2 a 6}$$

$$C_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \leq 3 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{x} & \text{pre } x > 3 \end{cases} \quad \text{chceme } x \leq 3, \text{ povolíme väčšie}$$

# Príklad fuzzy úlohy (pokr.)



- $F(x)$  škálovaná účelová funkcia  
$$F(x) = \frac{f(x)-x_{\min}}{x_{\max}-x_{\min}}$$
- $C(x)$  funkcia obmedzení  
$$C(x) = \min C_1(x), C_2(x)$$
- $G(x)$  rozhodovacia funkcia  
$$G(x) = \min C(x), F(x)$$

# Problém plánovania rádioterapie

- liečba nádorových ochorení
- lokalizácia nádoru (počítačová tomografia, MR)
- niekoľko zväzkov častíc rôznej intenzity z rôznych uhlov

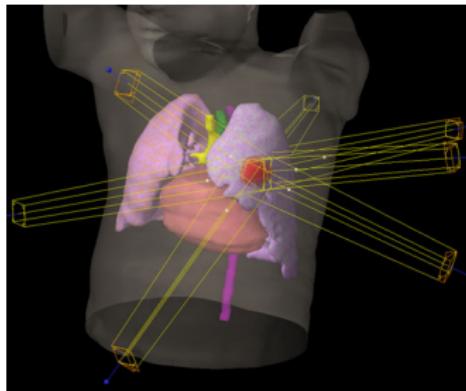
## Problém plánovania rádioterapie

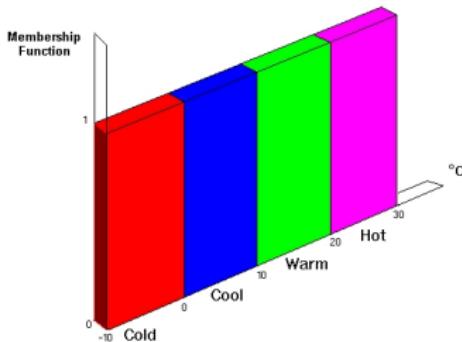
Pre daný prístroj a pacienta nájsť množinu uhlov pre ožarovanie a jeho intenzitu tak, aby zničilo nádor a bolo minimalizované poškodenie okolitých zdravých buniek.

# Problém plánovania rádioterapie

Zdroj fuzzy neurčitosti:

- lokalizácia nádorových buniek
- minimálna hodnota radiácie pre zničenie nádoru
- kritické limity radiácie pre rôzne typy tkaniva
- pozícia pacienta a nádoru počas ožarovania





Ďakujem za pozornosť!

