Dvouúrovňová optimalizace s intervaly i bez

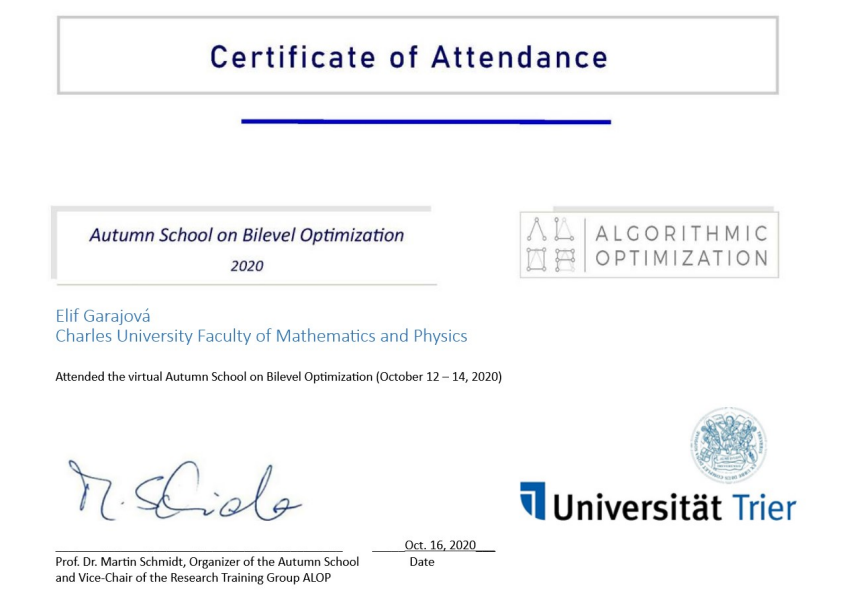
Bilevel programming with(out) intervals

Optimalizační seminář (21. 10. 2020)

Elif Garajová

Obsah

1. Úvod: Formulace, Aplikace, Stackelbergovy hry
2. Lineární dvouúrovňová optimalizace
3. Celočíselná lineární dvouúrovňová optimalizace
4. Dvouúrovňová optimalizace s intervaly



Certificate of Attendance

Autumn School on Bilevel Optimization
2020

ALGORITHMIC OPTIMIZATION

Elif Garajová
Charles University Faculty of Mathematics and Physics

Attended the virtual Autumn School on Bilevel Optimization (October 12 – 14, 2020)

Universität Trier

Prof. Dr. Martin Schmidt, Organizer of the Autumn School and Vice-Chair of the Research Training Group ALOP

Oct. 16, 2020
Date

Úvod: Formulace, Aplikace, Stackelbergovy hry

Úloha dvouúrovňové optimalizace (BP)

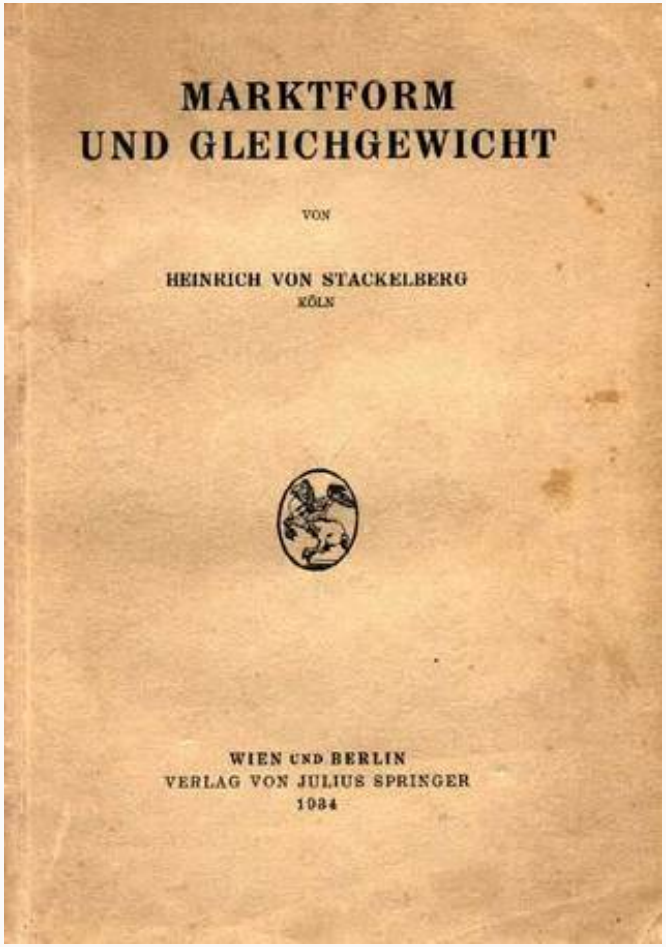
Leader (Vůdce)

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & f(x,y) \\ \text{za podmínek} \quad & (x,y) \in X \\ & y \in S(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{kde} \quad S(x) = \operatorname{argmax}_y \quad & g(x,y) \\ \text{za podmínek} \quad & (x,y) \in Y \end{aligned}$$

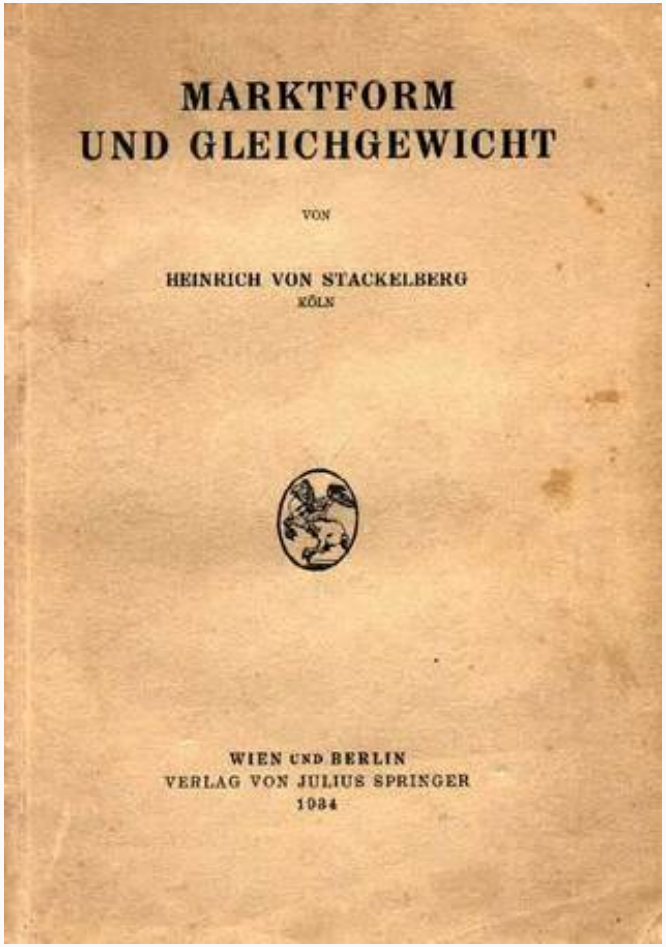
Follower (Následovník)

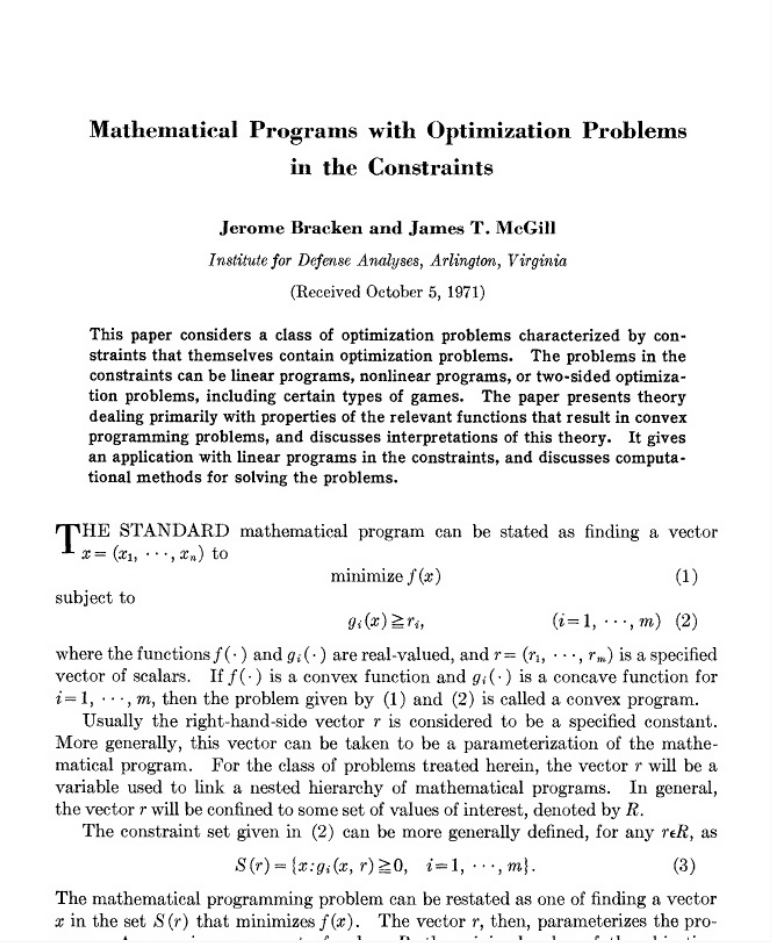
Historické okénko



1934: Stackelbergův model

Historické okénko





Mathematical Programs with Optimization Problems in the Constraints

Jerome Bracken and James T. McGill

Institute for Defense Analyses, Arlington, Virginia

(Received October 5, 1971)

This paper considers a class of optimization problems characterized by constraints that themselves contain optimization problems. The problems in the constraints can be linear programs, nonlinear programs, or two-sided optimization problems, including certain types of games. The paper presents theory dealing primarily with properties of the relevant functions that result in convex programming problems, and discusses interpretations of this theory. It gives an application with linear programs in the constraints, and discusses computational methods for solving the problems.

THE STANDARD mathematical program can be stated as finding a vector $x=(x_1, \cdots, x_n)$ to

$$\text{minimize } f(x) \tag{1}$$

subject to

$$g_i(x) \geqq r_i, \qquad (i=1, \cdots, m) \tag{2}$$

where the functions $f(\cdot)$ and $g_i(\cdot)$ are real-valued, and $r=(r_1, \cdots, r_m)$ is a specified vector of scalars. If $f(\cdot)$ is a convex function and $g_i(\cdot)$ is a concave function for $i=1, \cdots, m$, then the problem given by (1) and (2) is called a convex program.

Usually the right-hand-side vector r is considered to be a specified constant. More generally, this vector can be taken to be a parameterization of the mathematical program. For the class of problems treated herein, the vector r will be a variable used to link a nested hierarchy of mathematical programs. In general, the vector r will be confined to some set of values of interest, denoted by R.

The constraint set given in (2) can be more generally defined, for any $r \epsilon R$, as

$$S(r)=\{x: g_i(x, r) \geqq 0, \quad i=1, \cdots, m\}. \tag{3}$$

The mathematical programming problem can be restated as one of finding a vector x in the set $S(r)$ that minimizes $f(x)$. The vector r, then, parameterizes the pro-

1934: Stackelbergův model

1973: Dvouúrovňový opt. model

Aplikace BP

Aplikace BP

Aplikace BP

Aplikace BP

Aplikace BP

Aplikace BP: Interdiction problem

$$
\begin{aligned}
\min c^T y \\
a^T x &\leq b \\
x &\in X \\
x_i &\in \{0,1\}, \quad i \in N, \\
y &\in \arg\max\{c^T y : \\
& \qquad y_i \leq 1 - x_i, \quad i \in N, \\
& \qquad y \in Y\}
\end{aligned}
$$

Aplikace BP: Pricing problem

$$\max_{p} \sum_{i,j} p_i y_{ij}$$

$$y \in \arg\max \Big\{ \sum_i (r_{ij} - p_i) y_{ij} : \sum_i y_{ij} \leq 1, \; y_{ij} \geq 0 \Big\}$$

r_{ij} – rezervační cena zákazníka j na produkt i

p_i – prodejní cena produktu i

y_{ij} – množství produktu i zakoupené zákazníkem j

Stackelbergovy hry

- **sekvenční hra** dvou hráčů (lze zobecnit i na více hráčů)
- v 1. tahu se rozhoduje **vůdce**, ve 2. tahu se poté rozhoduje **následovník**, který reaguje na volbu vůdce
- cílem vůdce je maximalizace zisku, následovník volí nejlepší reakci na strategii vůdce
- vůdce volí optimální strategii vzhledem ke známé reakční funkci následovníka

Stackelbergovy hry: Model

$$\max_{x,q} \sum_{i,j} R_{ij} x_i q_j$$

$$\sum_i x_i = 1,$$

$$x_i \in [0,1]$$

$$q \in \arg\max_r \Big\{ \sum_{i,j} C_{ij} x_i r_j : \sum_j r_j = 1, \; r_j \in [0,1] \Big\}$$

Lineární dvouúrovňová optimalizace

Lineární dvouúrovňová optimalizace

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & c^T x + d^T y \\ \text{za podm.} \quad & Ax + By \geq a \\ & y \in S(x) \end{aligned}$$

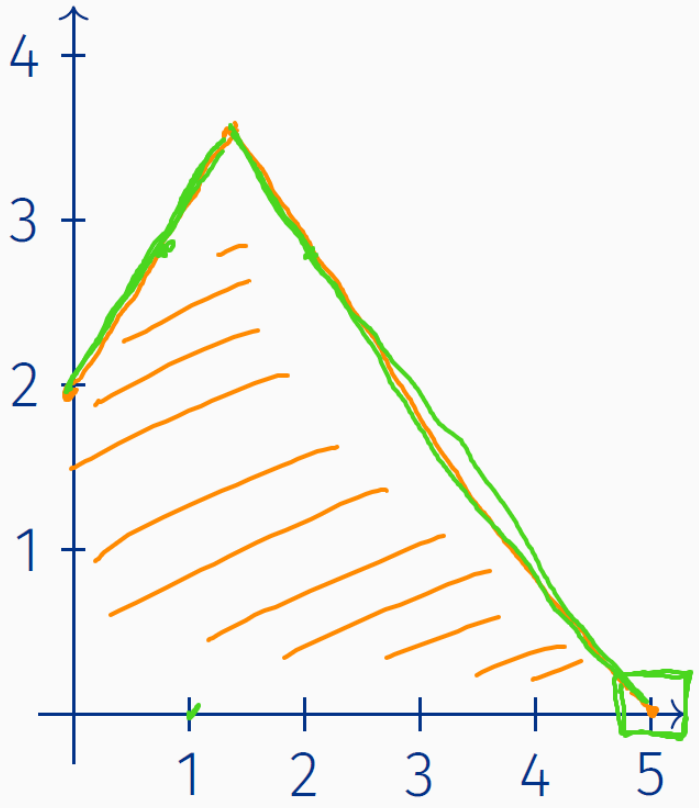
$$\begin{aligned} \text{kde} \;\; S(x) = \operatorname{argmin}_y \;\; & f^T y \\ & \text{za podm. } Cx + Dy \geq b \end{aligned}$$

$$\text{IR (Inducible Region)} = \{(x, y) : Ax + By \geq a, y \in S(x)\}$$

Lineární BP: Příklad I

$$\min_{x,y} y$$

$$y \in \operatorname{argmax}_y \{y : x + y \leq 5, \; -x + y \leq 2, \; x, y \geq 0\}$$

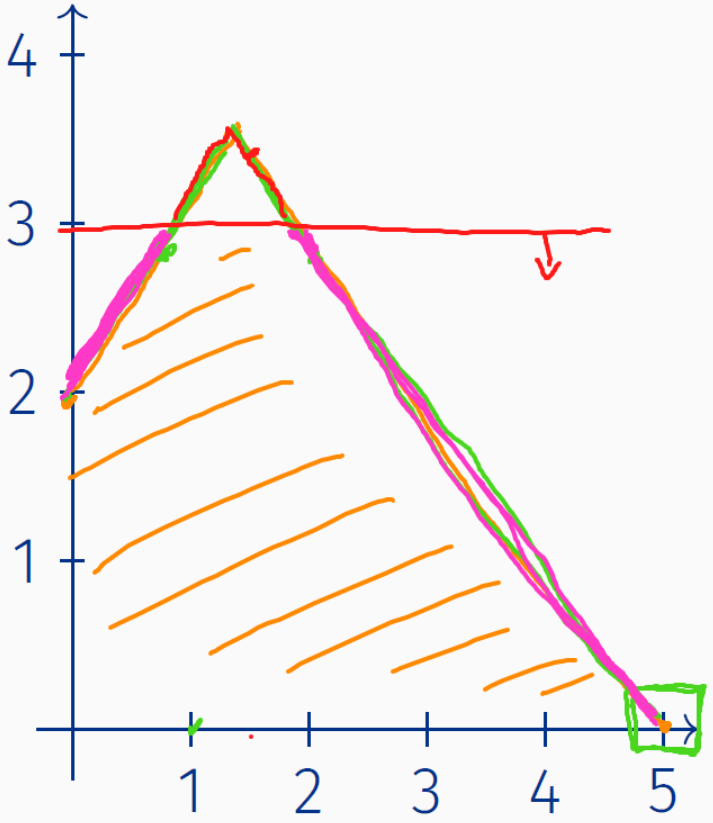


Lineární BP: Příklad II

$$\min_{x,y} y$$

$$y \leq 3$$

$$y \in \operatorname{argmax}_y \{y : x + y \leq 5, \; -x + y \leq 2, \; x, y \geq 0\}$$



Optimistické vs. pesimistické řešení

Optimální řešení úlohy následovníka nemusí být jednoznačné!

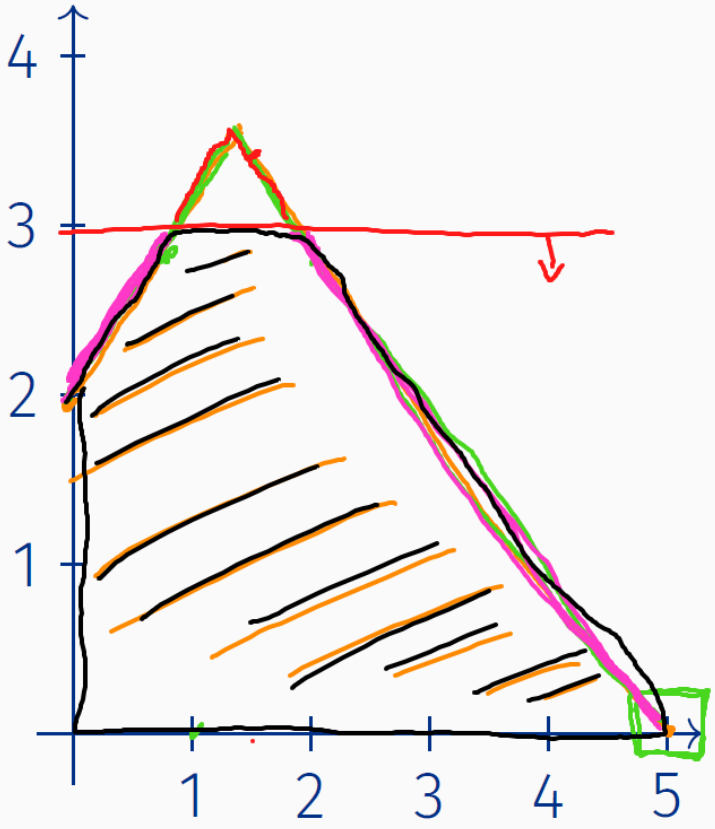
- **Optimistické řešení:**
  Zvolíme optimální řešení, které je pro vůdce nejlepší.

- **Pesimistické řešení:**
  Zvolíme optimální řešení, které je pro vůdce nejhorší.

High-point relaxace

High-point relaxace: Relaxujeme podmínku optimality na nižší úrovni, ale zachováme přípustnost (zahodíme účelovou funkci následovníka).

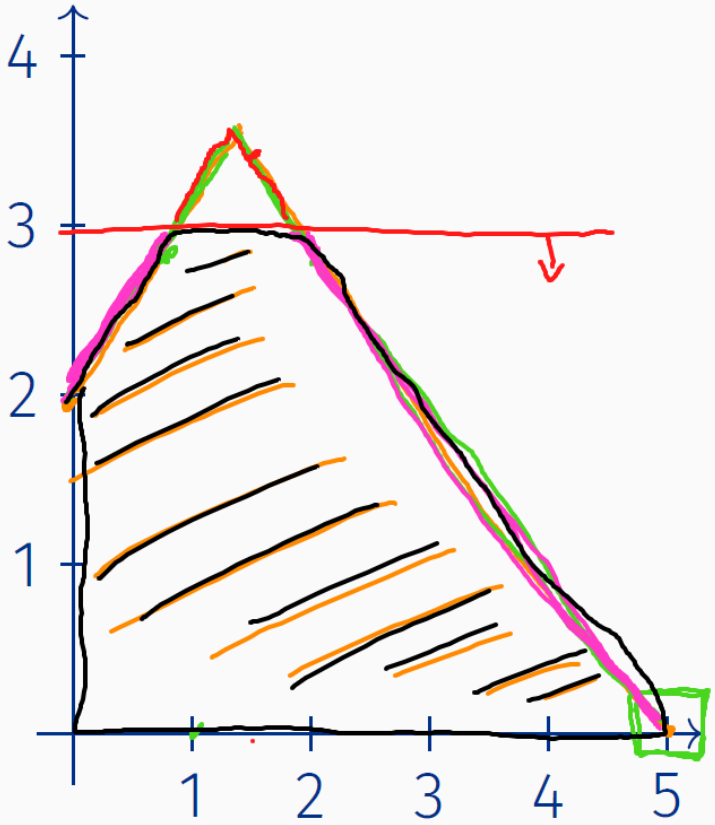
$$
\begin{aligned}
\min_{x,y}\ & y \\
& y \leq 3 \\
& y \in \operatorname{argmax}_y \{y : \\
& \qquad x + y \leq 5, \\
& \qquad -x + y \leq 2, \\
& \qquad x, y \geq 0\}
\end{aligned}
$$



High-point relaxace

High-point relaxace: Relaxujeme podmínku optimality na nižší úrovni, ale zachováme přípustnost (zahodíme účelovou funkci následovníka).

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y}\ & y \\
& y \leq 3 \\
& y \in \operatorname{argmax}_y \{ y : \\
& \qquad x + y \leq 5, \\
& \qquad -x + y \leq 2, \\
& \qquad x, y \geq 0 \}
\end{aligned}
$$



High-point relaxace II

Vlastnosti IR a High-point relaxace pro lineární dvouúrovňové programy (Bialas & Karwan, 1982; Bard, 1983):

- IR je **sjednocením stěn** High-point relaxace,
- IR je **souvislá** množina, pokud program **neobsahuje žádnou „coupling“ podmínku**,
- pokud je program přípustný, pak existuje optimální řešení, které je **vrcholem** High-point relaxace.

Jednoúrovňová (nelineární) reformulace

S využitím duality v lineárním programování můžeme lineární BP formulovat jako jednoúrovňovou (nelineární) optimalizační úlohu:

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c^T x + d^T y \\
\text{za podm.} \quad & Ax + By \geq a \\
& y \in \{\operatorname{argmin}_y f^T y : Dy \geq b - Cx\}
\end{aligned}
$$

$$\downarrow$$

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c^T x + d^T y \\
\text{za podm.} \quad & Ax + By \geq a, \; Dy \geq b - Cx, \\
& \lambda D = c, \; \lambda(Dy - b + Cx) = 0, \; \lambda \geq 0
\end{aligned}
$$

Lineární BP: Složitost

Věta (Hansen et al., 1992)

Problém lineární dvouúrovňové optimalizace je silně NP-těžký.

Problém KERNEL: Jádro orientovaného grafu $G = (V, A)$ je podmnožina vrcholů $W \subseteq V$ taková, že

- je-li $(u, v) \in A$ a $u \in W$, pak $v \notin W$,
- jestliže $u \notin W$, pak existuje $v \in W$ tak, že $(u, v) \in A$.

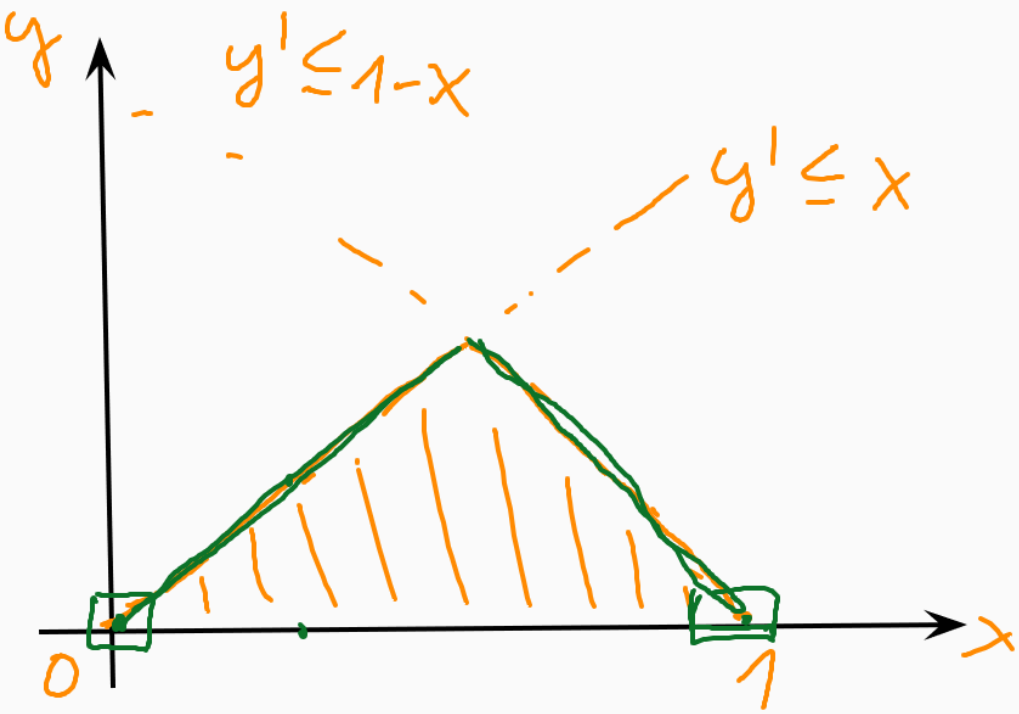
$$\max_x \min_y \Big\{ -\sum_j y_j :$$

$$\begin{aligned} x_j + x_k &\leq 1, && \forall j, k : (v_j, v_k) \in A, \\ y_j &\leq 1 - x_j, && \forall j \\ y_j &\leq 1 - x_k, && \forall j, k : (v_j, v_k) \in A, \\ x, y &\geq 0 \Big\} \end{aligned}$$

Binární programování a lineární BP

Převod mezi úlohou **binárního** programování a úlohou **lineárního dvouúrovňového** programování (Audet et al., 1997):

$$x \in \{0, 1\} \Leftrightarrow y = 0, y \in \arg\max\{y' : y' \leq x, y' \leq 1 - x, y' \geq 0\}.$$



Celočíselná lineární dvouúrovňová optimalizace

Celočíselné lineární BP (MIBLP)

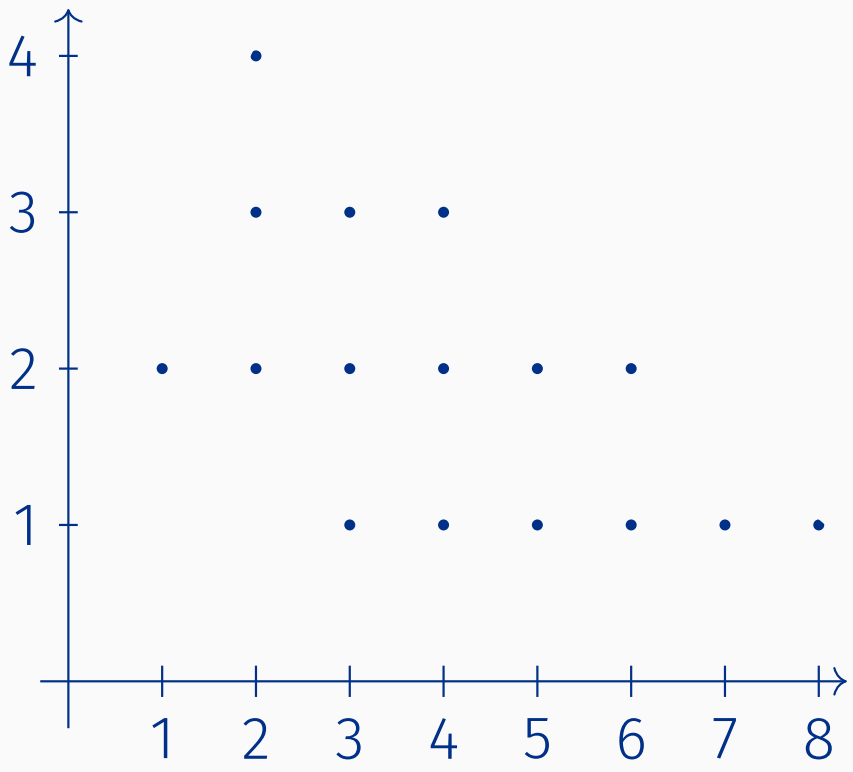
$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c^T x + d^T y \\
\text{za podm.} \quad & Ax + By \geq a, \\
& x_j \in \mathbb{Z}, \quad \forall j \in J, \\
& y \in S(x),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{kde} \quad S(x) = \operatorname{argmin}_y \; & f^T y \\
\text{za podm.} \quad & Cx + Dy \geq b \\
& y_j \in \mathbb{Z}, \quad \forall j \in J'.
\end{aligned}
$$

Celočíselné lineární BP: Příklad

Příklad (Moore & Bard, 1990):

$$
\begin{aligned}
\min\ & -x - 10y \\
& x \in \mathbb{Z}, \\
& y \in \arg\min\{y' : \\
& \quad -25x + 20y' \leq 30, \\
& \quad x + 2y' \leq 10, \\
& \quad 2x - y' \leq 15, \\
& \quad 2x + 10y' \geq 15, \\
& \quad y' \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}
$$



Celočíselné lineární BP: Složitost

Věta

Rozhodnout, zda platí $(x^*, y^*) \in IR$ *pro úlohu (smíšeného) celočíselného lineárního BP, je NP-těžký problém.*

Věta (Lodi et al., 2014)

Problém (smíšeného) celočíselného lineárního BP je Σ_2^P*-těžký.*

Celočíselné lineární BP: Hodnotová funkce

Hodnotová funkce $\phi(x)$ udává optimální hodnotu úlohy 2. úrovně pro dané řešení x:

$$\phi(x) = \min_y \{ f^T y : Cx + Dy \geq b, y_j \in \mathbb{Z} \ \forall j \in J' \}.$$

Pomocí hodnotové funkce můžeme formulovat úlohu MIBLP nasledovně:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & c^T x + d^T y \\ \text{za podm.} \quad & Ax + By \geq a, \\ & Cx + Dy \geq b, \\ & x_j, y_k \in \mathbb{Z}, \quad \forall j \in J, k \in J' \\ & f^T y \leq \phi(x). \end{aligned}$$

Celočíselné lineární BP: Relaxace

Které podmínky v MIBLP chceme relaxovat?

- Relaxace podmínek celočíselnosti → BLP.
- Relaxace $f^T y \leq \phi(x)$ (High-point relaxace) → MILP.
- Relaxace celočíselnosti v High-point relaxaci → LP.

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c^T x + d^T y \\
\text{za podm.} \quad & Ax + By \geq a, \\
& Cx + Dy \geq b, \\
& x_j, y_k \in \mathbb{Z}, \quad \forall j \in J, k \in J', \\
& f^T y \leq \phi(x).
\end{aligned}
$$

$$\phi(x) = \min_y \{ f^T y : Cx + Dy \geq b, y_j \in \mathbb{Z} \ \forall j \in J' \}$$

Celočíselné lineární BP: Relaxace

Které podmínky v MIBLP chceme relaxovat?

- Relaxace podmínek celočíselnosti $\longrightarrow$ BLP.
- Relaxace $f^T y \leq \phi(x)$ (High-point relaxace) $\longrightarrow$ MILP.
- Relaxace celočíselnosti v High-point relaxaci $\longrightarrow$ LP.

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c^T x + d^T y \\
\text{za podm.} \quad & Ax + By \geq a, \\
& Cx + Dy \geq b, \\
& x_j, y_k \in \mathbb{Z}, \quad \forall j \in J, k \in J', \\
& f^T y \leq \phi(x).
\end{aligned}
$$

$$\phi(x) = \min_y \{ f^T y : Cx + Dy \geq b, y_j \in \mathbb{Z} \ \forall j \in J' \}$$

Celočíselné lineární BP: Relaxace

Které podmínky v MIBLP chceme relaxovat?

- Relaxace podmínek celočíselnosti $\longrightarrow$ BLP.
- Relaxace $f^T y \leq \phi(x)$ (High-point relaxace) $\longrightarrow$ MILP.
- Relaxace celočíselnosti v High-point relaxaci $\longrightarrow$ LP.

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c^T x + d^T y \\
\text{za podm.} \quad & Ax + By \geq a, \\
& Cx + Dy \geq b, \\
& x_j, y_k \in \mathbb{Z}, \quad \forall j \in J, k \in J', \\
& f^T y \leq \phi(x).
\end{aligned}
$$

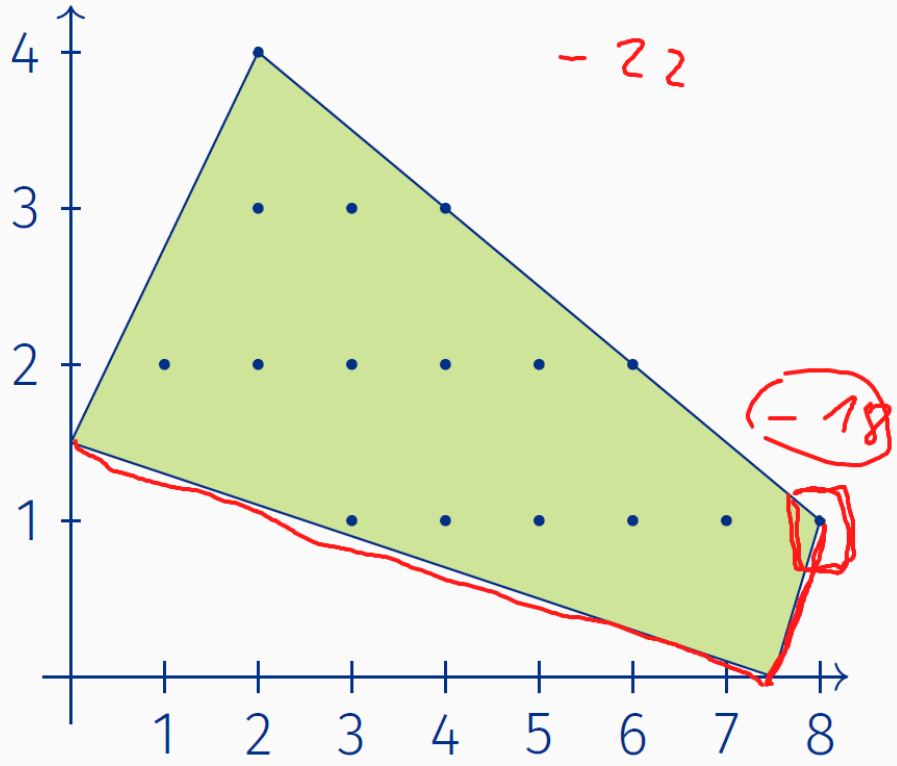
$$\phi(x) = \min_y \{ f^T y : Cx + Dy \geq b, y_j \in \mathbb{Z} \ \forall j \in J' \}$$

Celočíselné lineární BP: (Ne)relaxace

Relaxace podmínek celočíselnosti v 2. úrovni obecně nefunguje, protože dostaneme těsnější podmínku $f^T y \leq \phi(x)'$.

Příklad (Moore & Bard, 1990):

$$
\begin{aligned}
\min\ & -x - 10y \\
& x \in \mathbb{Z}, \\
& y \in \arg\min\{y' : \\
& \quad -25x + 20y' \leq 30, \\
& \quad x + 2y' \leq 10, \\
& \quad 2x - y' \leq 15, \\
& \quad 2x + 10y' \geq 15, \\
& \quad y' \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}
$$



Dvouúrovňová optimalizace s intervaly

Maximum Minimum-Cost Flow: BP formulace

Cílem úlohy MMCF (Hoppmann, 2019) je nalézt hodnoty b_u pro zdroje (nabídka) a b_w pro stoky (poptávka) takové, že příslušný tok s **minimální cenou** v dané síti bude **nejdražší** možný.

A Bilevel Optimization Model for MMCF

MMCF can be modelled as a linear bilevel optimization program. For details on bilevel optimization we refer to the book by Dempe et al. [4].

$$\max_{b} \quad \sum_{a \in A} \ell_a f_a \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad b_u \in [\underline{b}_u, \overline{b}_u] \qquad \forall u \in V^+ \tag{2}$$

$$b_w \in [\underline{b}_w, \overline{b}_w] \qquad \forall w \in V^- \tag{3}$$

$$\min_{f} \quad \sum_{a \in A} \ell_a f_a \tag{4}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{a \in \delta^+(u)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(u)} f_a = b_u \qquad \forall u \in V^+ \tag{5}$$

$$\sum_{a \in \delta^+(w)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(w)} f_a = b_w \qquad \forall w \in V^- \tag{6}$$

$$\sum_{a \in \delta^+(v)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(v)} f_a = 0 \qquad \forall v \in V^0 \tag{7}$$

$$f_a \in [0, c_a] \qquad \forall a \in A. \tag{8}$$

Maximum Minimum-Cost Flow: ILP formulace

$$\max_{b} \quad \sum_{a \in A} \ell_a f_a$$

$$\text{s. t.} \quad b_u \in [\underline{b}_u, \overline{b}_u], \; b_w \in [\underline{b}_w, \overline{b}_w] \qquad \forall u \in V^+, w \in V^-$$

$$\min_{f} \quad \sum_{a \in A} \ell_a f_a$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{a \in \delta^+(u)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(u)} f_a = b_u \qquad \forall u \in V^+$$

$$\sum_{a \in \delta^+(w)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(w)} f_a = b_w \qquad \forall w \in V^-$$

$$\sum_{a \in \delta^+(v)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(v)} f_a = 0 \qquad \forall v \in V^0$$

$$f_a \in [0, c_a] \quad \forall a \in A$$

Maximum Minimum-Cost Flow: ILP formulace

$$\max_{b} \quad \sum_{a \in A} \ell_a f_a$$

$$\text{s. t.} \quad b_u \in [\underline{b}_u, \overline{b}_u], \; b_w \in [\underline{b}_w, \overline{b}_w] \qquad \forall u \in V^+, w \in V^-$$

$$\min_{f} \quad \sum_{a \in A} \ell_a f_a$$ → Nejhorší konečná optimální hodnota ILP

$$\text{s. t.} \quad \sum_{a \in \delta^+(u)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(u)} f_a = [\underline{b}_u, \overline{b}_u] \qquad \forall u \in V^+$$

$$\sum_{a \in \delta^+(w)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(w)} f_a = [\underline{b}_w, \overline{b}_w] \qquad \forall w \in V^-$$

$$\sum_{a \in \delta^+(v)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(v)} f_a = 0 \qquad \forall v \in V^0$$

$$0 \leq f_a \leq c_a \qquad \forall a \in A$$

Intervalové lineární BP

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & [c]^T x + [d]^T y \\ \text{za podm.} \quad & [A]x + [B]y \geq [a] \\ & y \in S(x) \end{aligned}$$

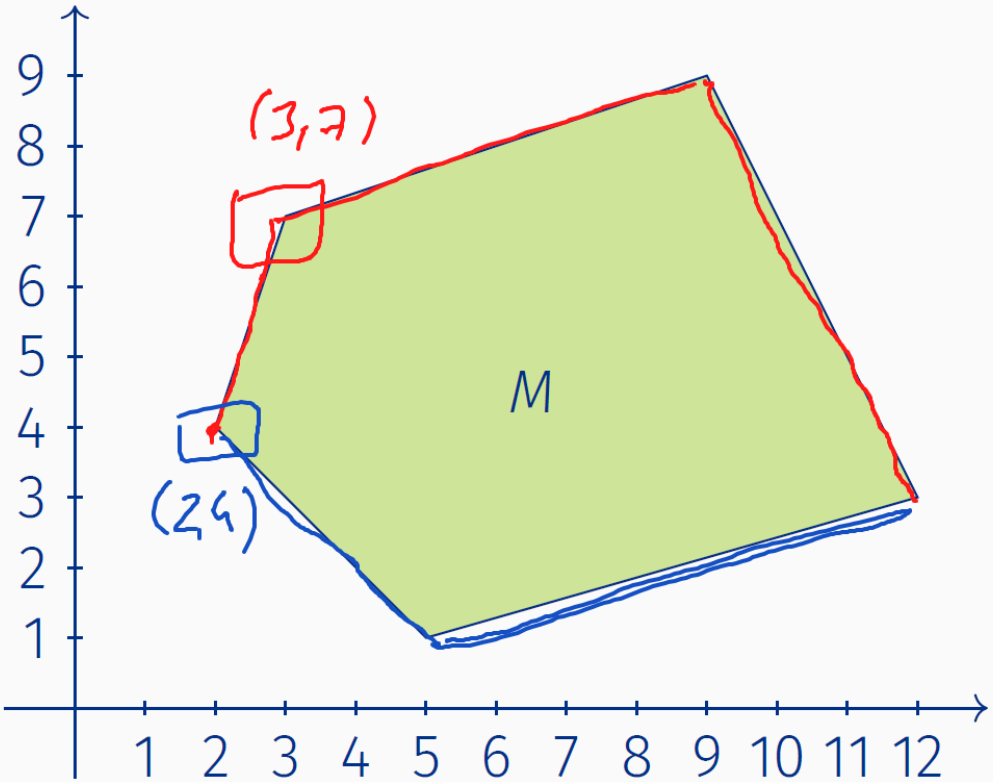
$$\begin{aligned} \text{kde} \quad S(x) = \operatorname{argmin}_y \quad & [f]^T y \\ \text{za podm.} \quad & [C]x + [D]y \geq [b] \end{aligned}$$

→ rozsah optimálních hodnot, množina optimálních řešení, ...

Intervalové lineární BP: Příklad

Příklad (Calvete & Galé, 2012): $\min_{x,y} [1, 2]x + [-2, -1]y$

$$y \in \arg\min_{y} \{[-1, 2]y : (x, y) \in M\}$$



$f \in [-1, 0)$

$f = 0$

$f \in (0, 2]$

Závěr

Dvouúrovňové lineární programování je těžké.

Závěr

Dvouúrovňové lineární programování je těžké.

Celočíselné dvouúrovňové lineární programování ještě těžší.

Závěr

Dvouúrovňové lineární programování je těžké.

Celočíselné dvouúrovňové lineární programování ještě těžší.

A co teprve s intervaly...?

Závěr

Dvouúrovňové lineární programování je těžké.

Celočíselné dvouúrovňové lineární programování ještě těžší.

A co teprve s intervaly...?

Ďakujem za pozornosť!

Literatura i

- J. F. Bard (1983): An Efficient Point Algorithm for a Linear Two-Stage Optimization Problem. https://doi.org/10.1287/opre.31.4.670
- W. Bialas, M. Karwan (1982): On two-level optimization. https://doi.org/10.1109/TAC.1982.1102880
- H. I. Calvete, C. Galé (2012): Linear bilevel programming with interval coefficients. https://doi.org/10.1016/j.cam.2011.10.012
- S. Dempe et al. (2015): Bilevel Programming Problems. https://doi.org/10.1007/978-3-662-45827-3
- P. Hansen et al. (1992): New Branch-and-Bound Rules for Linear Bilevel Programming. https://doi.org/10.1137/0913069

Literatura ii

- K. Hoppmann (2019): On the Complexity of the Maximum Minimum Cost Flow Problem. http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0297-zib-73359
- A. Lodi et al. (2014): Bilevel programming and the separation problem. https://doi.org/10.1007/s10107-013-0700-x
- H. Mishmast Nehi, F. Hamidi (2015): Upper and lower bounds for the optimal values of the interval bilevel linear programming problem. https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.09.021
- J. T. Moore, J. Bard (1990): The Mixed Integer Linear Bilevel Programming Problem. https://doi.org/10.1287/opre.38.5.911