Kooperativní k-konvexní hry

Martin Černý

Katedra aplikované matematiky
nebo
Informatický ústav Univerzity Karlovy
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova

Optimalizační seminář, 2020

Kooperativní teorie her

"Spolupráce, nikoli soupeření je zde hlavním cílem zkoumání."

Definition

Kooperativní hra je dvojice (N, v) kde $N = \{1, \ldots, n\}$ je množina hráčů a $v \colon 2^N \to \mathbb{R}$ je charakteristická funkce kooperativní hry. Vždy platí, že $v(\emptyset) = 0$.

Příklad: $v(\{1, 2, 4\})$ *je hodnota spolupráce hráčů 1,2 a 4.*

Koncepty řešení

"Jak rozdělit zisk?"

Definition

Payoff vektor $x \in \mathbb{R}^n$ reprezentuje zisk jednotlivých hráčů. V i-té složce x_i je uveden zisk hráče i.

Definition

A payoff vector $x \in \mathbb{R}^n$ je *imputace* pokud

- $x_i \geq v(\{i\})$ pro $i \in N$ (individuální racionalita),
- $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ (eficience).

Koncepty řešení

"Za jakých podmínek je spolupráce všech hráčů stabilní?"

Definition

Jádro hry (N, v) je

$$C(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subseteq N \right\}$$

"Jaké je *nejspravedlivější* rozdělení zisku mezi jednotlivé hráče?"

Definition

Pro hru (N, v) je *Shapleyho hodnota* hráče i dána

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Třídy her

"Čím více hráčů, tím lépe."

Definition

Kooperativní hra (N, v) je

- *monotonní* pokud pro $T \subseteq S \subseteq N$ platí

$$v(T) \leq v(S),$$

- *superaditivní* pokud pro každé $S, T \subseteq N$ že $S \cap T = \emptyset$ platí

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T),$$

- *konvexní* (*supermodulární*) pokud pro každé $S, T \subseteq N$ platí

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T).$$

- *k-konvexní* $\implies$ později

Motivace

- Spojitá optimalizace $\implies$ konvexní funkce
- Diskrétní optimalizace $\implies$ sub/supermodulární funkce
  - 1970 *rank* funkce matroidů (submodulární)
  - několik důkazů v teorii grafů, pravděpodobnosti, geometrii, lattice theory
  - Mongeovy matice (Mongeovy pole)
- Množinová funkce $f\colon 2^N \to \mathbb{R}$
- $S, T \subseteq N$:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$$

- hlubší pochopení vlastnosti:
  - Zobecnění $\implies$ k-konvexní hry
  - pochopení struktury f
    - *property testing* (Vondrák: Is submodularity testable?)
    - částečná informace konvexních her (Bok, Černý, Hladík, Hartman) nebo částečné funkce (Kumar, Bhaskar)

k-konvexní hry

- $\mathcal{C}^n$ ... množina konvexních her na n hráčích
- $\mathcal{C}^n_k$ ... množina k-konvexních her na n hráčích

Vlastnosti:

1. $\mathcal{C}^n_n = \mathcal{C}^n_m$, pro $m > n$
2. $\mathcal{C}^n_{n-1} = C^n_n = \mathcal{C}$
3. obecně neplatí ani $C^n_i \not\subseteq C^n_j$, ani $C^n_j \not\subseteq C^n_i$

k-konvexní hry

- $m^v \in \mathbb{R}^n$ ... *upper vektor*
  - $m_i^v := v(N) - v(N \setminus \{i\})$ ... marginální příspěvek i do N
  - $m^v(S) = \sum_{i \in S} m_i^v$

Theorem (Proč upper?)

Buď (N, v) kooperativní hra taková, že $C(v) \neq \emptyset$ a $x \in C(v)$. Potom

$$x_i \leq m_i^v$$

pro všechna $i \in N$.

Proof.

$m_i^v = v(N) - v(N \setminus \{i\}) = x(N) - v(N \setminus \{i\}) \geq$
$x(N) - x(N \setminus \{i\}) = x_i.$ □

Důsledek: $m^v(S) \geq x(S) \geq v(S)$

k-konvexní hry

- Důsledek: $m^v(S) \geq x(S) \geq v(S)$

- $g^v : 2^N \to \mathbb{R}$ ... *gap funkce*
  - $g^v(S) := m^v(S) - v(S) = \sum_{i \in S} m_i^v - v(S)$
  - *gap* do kterého se musí vejít hodnoty payoff vektorů z jádra

Theorem

Pro (N, v) takové, že $C(v) \neq \emptyset$ platí, že $g^v(S) \geq 0$ pro všechny $S \subset N$.

Konvexita očima gap funkce

- Hra (N, v) je *konvexní* pokud pro každé $S, T \subseteq N$ platí

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T).$$

- ekvivalentně $S \subset T \subset N \setminus \{i\}$:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

  - $g^v(S) = m^v(S) - v(S) = \sum_{i \in S} m_i^v - v(S)$

Konvexita očima gap funkce

- *konvexní* pokud pro každé $S, T \subseteq N$ platí

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T).$$

$$g^v(S) + g^v(T) \geq g^v(S \cup T) - g^v(S \cap T)$$

- ekvivalentně $S \subset T \subset N \setminus \{i\}$:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

$$g^v(S \cup \{i\}) - g^v(S) \geq g^v(T \cup \{i\}) - g^v(T)$$

  - $g^v(S) = m^v(S) - v(S) = \sum_{i \in S} m_i^v - v(S)$

Zobecnění na k-konvexitu

$S \subset T \subset N \setminus \{i\}$:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

$$g^v(S \cup \{i\}) - g^v(S) \geq g^v(T \cup \{i\}) - g^v(T)$$

- sekvenční proces - hráči $1., \ldots, n.$ vstupují do koalice jeden po druhém
- s růstem počtu hráčů roste *marginální přírůstek* koalice
- klesá *gap funkce*

Zobecnění na k-konvexitu

- sekvenční proces - hráči $1., \ldots, k-1.$ vstupují do koalice jeden po druhém
- poté vstoupí zbytek hráčů společně

1. $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ a $|T| \leq k-2$

$$g^v(S \cup \{i\}) - g^v(S) \geq g^v(T \cup \{i\}) - g^v(T)$$

2. $i \in N, j \in T \setminus \{i\}, T \subseteq N : |T| = k-1$:

$$g^v(T \cup \{i\} \setminus \{j\}) - g^v(T \setminus \{j\}) \geq g^v(N) - g^v(T)$$

Zobecnění na k-konvexitu

- další podmínky na *gap* funkci:
  3. $g^v(N) \geq g^v(T)$ pro $T \subseteq N$ s $|T| = k-1$
  4. $g^v(N) \leq g^v(T)$ pro $T \subseteq N$ s $|T| \geq k$

Lemma

Pro $|S| \leq k-2$ *a* $i \notin S$ *implikují* 1., 2., 3., *že*

$$g^v(S \cup \{i\}) \geq g^v(S).$$

Proof.

- $S \subseteq T, |T| = k-1$, $j \in T \setminus S$

$$g^v(S \cup \{i\}) - g^v(S) \overset{(1.)}{\geq} g^v(T \cup \{i\} \setminus \{j\}) - g^v(T \setminus \{j\}) \overset{(2.)}{\geq}$$
$$g^v(N) - g^v(T) \overset{(3.)}{\geq} 0$$

□

Zobecnění na k-konvexitu

- Rozdělení chování *gap* funkce na nejvýše 3 úrovně:
  1. $S \subseteq T \subseteq N$ s $|T| \leq k-1$: $g^v(S) \leq g^v(T)$ (monotonní)
  2. $g^v(N) = g^v(N \setminus \{i\})$, pro $i \in N$ (konstantní)
  3. $|T| \geq k$: $g^v(T) \geq g^v(N)$ (mezi sebou libovolně)

Theorem

Pro libovolné $g^v \in 2^N$ *platí:* $g^v(N) = g^v(N \setminus \{i\})$

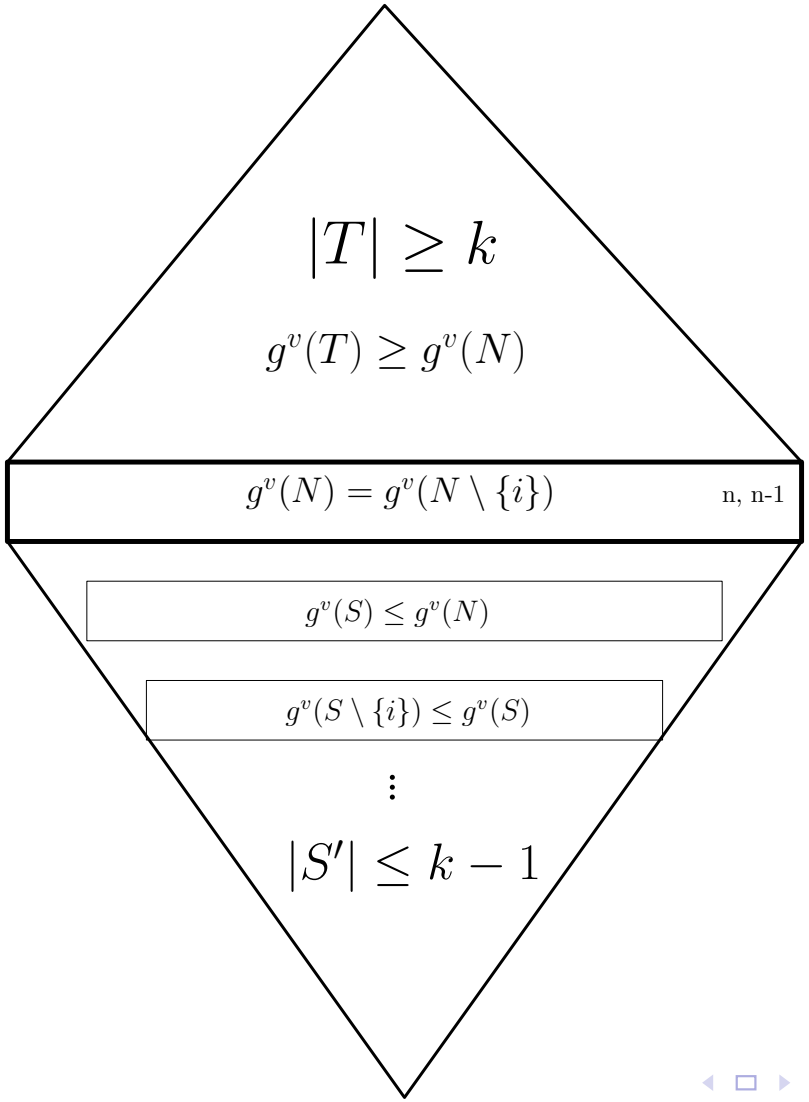
Proof.

- $g^v(N) = m^v(N) - v(N) = \sum_{j \in N}(v(N) - v(N \setminus \{j\})) - v(N) = (n-1)v(N) - \sum_{j \in N} v(N \setminus \{j\})$
- $g^v(N \setminus \{i\}) = (n-1)v(N) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v(N \setminus \{j\}) - v(N \setminus \{i\}) = (n-1)v(N) - \sum_{j \in N} v(N \setminus \{j\})$

$\square$

Zobecnění na k-konvexitu

3. $g^v(N) \geq g^v(T)$ pro $T \subseteq N$ s $|T| = k - 1$
4. $g^v(N) \leq g^v(T)$ pro $T \subseteq N$ s $|T| \geq k$



Zobecnění na k-konvexitu

Definition

Kooperativní hra (N, v) je *k-konvexní* pokud

1. (vstup jednotlivých hráčů do $k-1$)
   $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ a $|T| \leq k-2$:
   $$g^v(S \cup \{i\}) - g^v(S) \geq g^v(T \cup \{i\}) - g^v(T)$$
2. (vstup zbytku hráčů) $i \in N, j \in T \setminus \{i\}, T \subseteq N : |T| = k-1$:
   $$g^v(T \cup \{i\} \setminus \{j\}) - g^v(T \setminus \{j\}) \geq g^v(N) - g^v(T)$$
3. (monotonie) $g^v(N) \geq g^v(T)$ pro $T \subseteq N$ s $|T| = k-1$
4. (max 3 úrovně) $g^v(N) \leq g^v(T)$ pro $T \subseteq N$ s $|T| \geq k$

Zobecnění na k-konvexitu (očima funkce v)

Definition

Kooperativní hra (N, v) je *k-konvexní* pokud

1. (vstup jednotlivých hráčů do $k-1$)
   $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ a $|T| \leq k-2$:
   $$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$$
2. (vstup zbytku hráčů) $i \in N, j \in T \setminus \{i\}, T \subseteq N : |T| = k-1$:
   $$v(N) \geq v(T) + \sum_{\ell \in (N \setminus T) \setminus \{i\}} m_\ell^v + v(T \cup \{i\} \setminus \{j\}) - v(T \setminus \{j\})$$
3. (monotonie) $v(N) \leq v(T) + \sum_{\ell \in N \setminus T} m_\ell^v$ pro $T \subseteq N$ s $|T| = k-1$
4. (max 3 úrovně) $v(N) \geq \sum_{\ell \in N \setminus T} m_\ell^v$ pro $T \subseteq N$ s $|T| \geq k$

1-konvexní hry

$k = 1$

Definition

Kooperativní hra (N, v) je *1-konvexní* pokud

1. (vstup jednotlivých hráčů do $k-1$)
   $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ a $|T| \leq k-2$:

$$g^v(S \cup \{i\}) - g^v(S) \geq g^v(T \cup \{i\}) - g^v(T)$$

2. (vstup zbytku hráčů) $i \in N, j \in T \setminus \{i\}, T \subseteq N : |T| = k-1$:

$$g^v(T \cup \{i\} \setminus \{j\}) - g^v(T \setminus \{j\}) \geq g^v(N) - g^v(T)$$

3. (monotonie) $g^v(N) \geq g^v(T)$ pro $T \subseteq N$ s $|T| = k-1$
4. (max 3 úrovně) $g^v(N) \leq g^v(T)$ pro $T \subseteq N$ s $|T| \geq k$

1-konvexní hry

$k = 1$

Definition

Kooperativní hra (N, v) je *1-konvexní* pokud

1. (vstup jednotlivých hráčů do 0)
   $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ a $|T| \leq -1$:

$$g^v(S \cup \{i\}) - g^v(S) \geq g^v(T \cup \{i\}) - g^v(T)$$

2. (vstup zbytku hráčů) $i \in N, j \in T \setminus \{i\}, T \subseteq N : |T| = 0$:

$$g^v(T \cup \{i\} \setminus \{j\}) - g^v(T \setminus \{j\}) \geq g^v(N) - g^v(T)$$

3. (monotonie) $g^v(N) \geq g^v(\emptyset) = 0$ pro $T \subseteq N$ s $|T| = 0$
4. (max 3 úrovně) $g^v(N) \leq g^v(T)$ pro $T \subseteq N$ s $|T| \geq 1$

1-konvexní hry

$k = 1$

Definition

Kooperativní hra (N, v) je *1-konvexní* pokud

1. ~~(vstup jednotlivých hráčů do 0)~~
   ~~$S \subset T \subset N \setminus \{i\}$ a $|T| \leq -1$:~~

$$\cancel{g^v(S \cup \{i\}) - g^v(S) \geq g^v(T \cup \{i\}) - g^v(T)}$$

2. ~~(vstup zbytku hráčů) $i \in N, j \in T \setminus \{i\}, T \subseteq N : |T| = 0$:~~

$$\cancel{g^v(T \cup \{i\} \setminus \{j\}) - g^v(T \setminus \{j\}) \geq g^v(N) - g^v(T)}$$

3. (monotonie) $g^v(N) \geq 0$
4. (max 3 úrovně) $g^v(N) \leq g^v(T)$ pro všechna $\emptyset \neq T \subseteq N$

1-konvexní hry

$k = 1$

Definition

Kooperativní hra (N, v) je *1-konvexní* pokud pro všechny neprázdné $T \subseteq N$ platí, že

$$0 \leq g^v(N) \leq g^v(T).$$

1-konvexní hry

$k = 1$

Definition

Kooperativní hra (N, v) je *1-konvexní* pokud pro všechny neprázdné $T \subseteq N$ platí, že

$$0 \leq g^v(N) \leq g^v(T).$$

1. $g^v(N) \geq 0$
   - $g^v(N) = m^v(N) - v(N) \geq 0 \implies m^v(N) \geq v(N)$
2. $g^v(S) \geq g^v(N)$
   - $m^v(S) - v(S) \geq m^v(N) - v(N)$
   - $v(N) - m^v(N \setminus S) \geq v(S)$

1-konvexní hry

$k = 1$

Definition

Kooperativní hra (N, v) je *1-konvexní* pokud

1. $m^v(N) \geq v(N)$
2. $v(N) - m^v(N \setminus S) \geq v(S)$ $(\emptyset \neq S \subseteq N)$

- $m^v(N) \geq v(N)$
  - $m_i^v = v(N) - v(N \setminus \{i\})$ je zisk, na který má *i právo*
  - při této nerovnosti na všechny vyšší nároky není brán zřetel
- $v(N) - m^v(N \setminus S) \geq v(S)$
  - pokud hráčům z $N \setminus S$ vyplatíme jejich marginální příspěvky, pořád má $v(N)$ pro S větší hodnotu než $v(S)$

Jádro 1-konvexní hry

Jádro hry (N, v) je

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^n | x(N) = v(N), x(S) \geq v(S), \forall S \subseteq N\}$$

Theorem

Následující jsou ekvivalentní:

1. (N, v) *je* 1*-konvexní,*
2. $m^v - g^v(N)e_i \in C(v)$ *pro všechna* $i \in N$,
3. $C(v) = conv\{m^v - g^v(N)e_i \big| i \in N\}$.

Jádro 1-konvexní hry

Theorem

Následující jsou ekvivalentní:

1. (N, v) *je* 1*-konvexní,*
2. $m^v - g^v(N)e_i \in C(v)$ *pro všechna* $i \in N$,
3. $C(v) = conv\{m^v - g^v(N)e_i \big| i \in N\}$.

Proof.

- 3. $\Longrightarrow$ 2. je triviální
- 1. $\Longrightarrow$ 3. technické a trochu delší
- 2. $\Longrightarrow$ 1. ukážeme

$\square$

Jádro 1-konvexní hry

Theorem

Pokud $m^v - g^v(N)e_i \in C(v)$ *pro všechna* $i \in N$, *potom je* (N, v) 1-*konvexní.*

Proof.

Značení: $f^j = m^v - g^v(N)e_j$

1. $g^v(N) \geq 0$
   - Libovolné $j \in N$:
   - $f^j \in C(v)$
   - $\forall i : m_i^v \geq x_i$ pro všechny $x \in C(v) \implies \forall i : m_i^v \geq f_i^j$
   - specielně pro j: $m_j^v \geq f_j^j = m_j^v - g^v(N)$
     - $\implies g^v(N) \geq 0$

$\square$

Jádro 1-konvexní hry

Theorem

Pokud $m^v - g^v(N)e_i \in C(v)$ *pro všechna* $i \in N$, *potom je* (N, v) 1-*konvexní.*

Proof.

Značení: $f^j = m^v - g^v(N)e_j$

2. $g^v(S) \geq g^v(N)$ pro libovolné $\emptyset \neq S \subseteq N$
   - Libovolné $i \in S$:
   - $f^i \in C(v)$
   - $f^i(S) \geq v(S)$
   - ekvivalentně: $m^v(S) - g^v(N) \geq v(S)$
   - ekvivalentně: $m^v(S) - v(S) \geq g^v(N)$
     - $m^v(S) - v(S) = g^v(S) \implies g^v(S) \geq g^v(N)$

$\square$

Jádro 1-konvexní hry

Theorem

Následující jsou ekvivalentní:

1. (N, v) *je* 1*-konvexní,*
2. $m^v - g^v(N)e_i \in C(v)$ *pro všechna* $i \in N$,
3. $C(v) = conv\{m^v - g^v(N)e_i \big| i \in N\}$.

Proof.

- 3. $\Longrightarrow$ 2. je triviální
- 1. $\Longrightarrow$ 3. technické a trochu delší
- 2. $\Longrightarrow$ 1. ukázali jsme

$\square$

Charakterizace jádra 1-konvexních her pomocí m^v

Theorem

Buď (N, v) 1-konvexní hra. Následující jsou ekvivaletnní:

1. $x \in C(v)$
2. $x(N) = v(N)$ *a* $x_i \leq m_i^v$ *pro všechna* $i \in N$.

Proof.

1. 1. $\implies$ 2. - platí pro libovolnou hru (N, v)
2. 2. $\implies$ 1.
   - $S \subseteq N, S \neq \emptyset$
   - chceme $x(S) \geq v(S)$ (stabilita koalice)
   - $x(S) = x(N) - x(N \setminus S) =$
   - $v(N) - x(N \setminus S)$
   - $m^v(N \setminus S) \geq x(N \setminus S)$
     - $\implies v(N) - x(N \setminus S) \geq v(N) - m^v(N \setminus S)$
   - $V(N) - m^v(N \setminus S) \geq v(S)$ (vlastnost 1-konvexity)
     - $\implies x(S) \geq v(S)$.

Jádro k-konvexních her

- $\sigma \in \Sigma_n$ ... permutace
- $P_i^\sigma := \{j \in N : \sigma(j) < \sigma(i)\}$ ... koalice hráčů předcházejících hráči i při permutaci σ

Definition

Vektor marginálních hodnoty (*marginal worth vector*) $x^{\sigma,k}(v) \in \mathbb{R}^n$ pro hru v vzhledem ke koalicím velikosti max k je

$$x_i^{\sigma,k}(v) = \begin{cases} v(P_i^\sigma \cup \{i\}) - v(P_i^\sigma) & \text{pokud } \sigma(i) \leq k \\ m_i^v & \text{pokud } \sigma_i \geq k \\ m_i^v - (g^v(N) - g^v(P_i^\sigma)) & \text{pokud } \sigma(i) = k \end{cases}$$

Jádro k-konvexních her

Definition

Vektor marginálních hodnoty (*marginal worth vector*) $x^{\sigma,k}(v) \in \mathbb{R}^n$ pro hru v vzhledem ke koalicím velikosti max k je

$$x_i^{\sigma,k}(v) = \begin{cases} v(P_i^\sigma \cup \{i\}) - v(P_i^\sigma) & \text{pokud } \sigma(i) \leq k \\ m_i^v & \text{pokud } \sigma_i \geq k \\ m_i^v - (g^v(N) - g^v(P_i^\sigma)) & \text{pokud } \sigma(i) = k \end{cases}$$

- Hráči $\sigma(1), \ldots, \sigma(k-1)$ dostanou jejich marginální hodnotu vůči koalici předchůdců $P_1^\sigma, P_2^\sigma, \ldots, P_k - 1^\sigma$
- Hráči $\sigma(k+1), \ldots, \sigma(n)$ dostanou jejich marignální příspěvky do grandkoalice (m_i^v)
- Hráč $\sigma(k)$ (vůdce) P_i^σ *shrábne* zbytek

Jádro k-konvexních her

Theorem

Následující jsou ekvivalentní:

1. (N, v) *je* k*-konvexní,*
2. $x^{\sigma,k} \in C(v)$ *pro všechna* $\sigma \in \Sigma_n$,
3. $C(v) = conv\{x^{\sigma,k} \big| \sigma \in \Sigma_n\}$.

Proof.

Technický na pár stránek

$\Longrightarrow$ důkaz *Přihlédnutím na časovou náročnost* $\square$

Theorem

Pro (N, v) k*-konvexní hru jsou* $\{x^{\sigma,k} \big| \sigma \in \Sigma_n\}$ *extrémní vrcholy jádra. V důsledku má jádro nejvýše* $k!\binom{n}{k}$ *extrémních vrcholů.*