Zkouška Lineární algebra 2, VZOR

Jméno:

1	2	3	4	Σ

---

1. Zformulujte a dokažte větu o geometrické interpretaci determinantu. **7**

Zformulujte větu o Laplaceově rozvoji podle i-tého řádku. **1**

---

2. Uvažujme nestandardní skalární součin $\langle x, y\rangle^* = x^T A y$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Popište maticově jedno libovolné lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ splňující $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$ podmínku $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle^*$, kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je standardní skalární součin. **3**

(b) Najděte nenulový vektor $x \in \mathbb{R}^3$ takový, aby

$$\langle f(x), (1, -1, -2)\rangle = \langle x, f^{-1}(4, 2, 4)\rangle = 0$$

při standardním skalárním součinu. **3**

---

3. Najděte dvoudimenzionální podprostor V prostoru $\mathbb{R}^4$ tak, aby $f(x) = 0\ \forall x \in V$ pro kvadratickou formu $f(x) = x^T A x$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$ **6**

[*Poznámka:* je-li $f(x) = f(y) = 0$, pak nemusí $f(x + y) = 0$.]

---

4. Rozhodněte a zdůvodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivé:

(a) Buď $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matice projekce v $\mathbb{R}^n$. Pak $\mathcal{S}(P) = \mathcal{S}(I - P)^\perp$. **2**

(b) Je-li $\operatorname{adj}(A)$ symetrická matice, pak i A je symetrická. **2**

(c) Je-li $A^k = 0$ pro nějakou mocninu matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pak všechna vlastní čísla A jsou nulová. **2**

(d) Existuje positivně semidefinitní matice řádu 5, která má jediný nulový prvek na pozici $(3, 3)$. **2**