Slajdy k přednášce Lineární algebra II

Milan Hladík

Katedra Aplikované Matematiky,
Matematicko-fyzikální fakulta,
Univerzita Karlova v Praze,
https://kam.mff.cuni.cz/~hladik

30. dubna 2021

Obsah

1. Skalární součin
   - Skalární součin a norma
   - Ortonormální báze, Gramova–Schmidtova ortogonalizace
   - Ortogonální doplněk a projekce
   - Ortogonální doplněk a projekce v $\mathbb{R}^n$
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Ortogonální matice
2. Vlastní čísla
   - Vlastní čísla, vlastní vektory
   - Charakteristický polynom
   - Cayleyho–Hamiltonova věta
   - Diagonalizovatelnost
   - Jordanova normální forma
   - Symetrické matice
   - Teorie nezáporných matic
   - Výpočet vlastních čísel

Následující téma

1. Skalární součin
   - Skalární součin a norma
   - Ortonormální báze, Gramova–Schmidtova ortogonalizace
   - Ortogonální doplněk a projekce
   - Ortogonální doplněk a projekce v $\mathbb{R}^n$
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Ortogonální matice
2. Vlastní čísla
   - Vlastní čísla, vlastní vektory
   - Charakteristický polynom
   - Cayleyho–Hamiltonova věta
   - Diagonalizovatelnost
   - Jordanova normální forma
   - Symetrické matice
   - Teorie nezáporných matic
   - Výpočet vlastních čísel

Reálný skalární součin – motivace

Standardní skalární součin vektorů $x, y \in \mathbb{R}^n$ je definován jako

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- Geometricky vyjadřuje skalární součin vztah

  $$x^T y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\varphi),$$

  kde φ je úhel mezi vektory x, y.
- Speciálně, x, y jsou kolmé právě tehdy, když $x^T y = 0$.

Reálný skalární součin – motivace

Standardní skalární součin vektorů $x, y \in \mathbb{R}^n$ je definován jako

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Vlastnosti:

- Platí $x^T x = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$.
  Velikost vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ je $\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.
- Symetrie: $x^T y = y^T x$.
- Lineární funkcí v první i druhé složce, ale ne v obou zároveň.
  Pro každé $x, x', y \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

  $$(x + x')^T y = x^T y + x'^T y,$$
  $$(\alpha x)^T y = \alpha(x^T y).$$

  Ale obecně neplatí například

  $$(x + x')^T (y + y') = x^T y + x'^T y'.$$

Reálný skalární součin

Definice (Skalární součin nad $\mathbb{R}$)

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Pak *skalární součin* je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V^2 \to \mathbb{R}$, splňující pro všechna $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ a rovnost nastane pouze pro $x = 0$,
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
4. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Poznámky a důsledky:

- Proč těleso $\mathbb{R}$?
- Linearita i ve druhé složce
- $\langle o, x \rangle = \langle x, o \rangle = 0$

Komplexní skalární součin

komplexně sdružené číslo k číslu $a + bi \in \mathbb{C}$ je $\overline{a + bi} = a - bi$.

Definice (Skalární součin nad $\mathbb{C}$)

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Pak *skalární součin* je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V^2 \to \mathbb{C}$, splňující pro všechna $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{C}$:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ a rovnost nastane pouze pro $x = 0$,
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
4. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Poznámky a důsledky:

- Linearita i ve druhé složce?

Skalární součin – příklady

Příklady standardních skalárních součinů

- V prostoru $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y\rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
- V prostoru $\mathbb{C}^n$: $\langle x, y\rangle = x^T \overline{y} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$.

  Zobrazení $\langle x, y\rangle = x^T y$ není skalární součin, například pro $x = (i, i)^T$ by bylo $\langle x, x\rangle = x^T x = -2$.
- V prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$: standardní skalární součin

  $$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} = \mathrm{trace}(AB^T).$$
- V $\mathcal{C}_{[a,b]}$, prostoru spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$: standardní skalární součin $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ a součin matic A, B

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = A_{i*} B_{*j} = \langle A_{i*}, B_{*j}\rangle.$$

Skalární součin – jednoznačnost obrazů báze

Buď $B = \{z_1, \dots, z_n\}$ báze prostoru V nad $\mathbb{R}$ a uvažujme libovolné dva vektory $x, y \in V$. Ty mají vyjádření

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j z_j$$

pro určité $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Pak

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j z_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \langle z_i, z_j \rangle.$$

Tudíž skalární součin je jednoznačně určený hodnotami součinů všech dvojic bázických vektorů $\langle z_i, z_j \rangle$ pro $i, j = 1, \dots, n$.

- Narozdíl od lineárního zobrazení nemůžeme hodnoty $\langle z_i, z_j \rangle$ nastavit libovolně.

Nadále uvažujeme vektorový prostor V nad $\mathbb{R}$ nebo nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem.

Norma a kolmost

Definice

Norma indukovaná skalárním součinem je definovaná
$$\|x\| \coloneqq \sqrt{\langle x, x\rangle}, \text{ kde } x \in V.$$

Pro standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$: eukleidovská norma
$$\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Definice (Kolmost)

Vektory $x, y \in V$ jsou *kolmé*, pokud $\langle x, y\rangle = 0$. Značení: $x \perp y$.

Příklady kolmých vektorů pro standardní skalární součiny

- $(1,2,3)^T \perp (1,1,-1)^T$,
- i-tý řádek regulární matice A a j-tý sloupec A^{-1}, kde $i \neq j$,
- V prostoru $\mathcal{C}_{[-\pi,\pi]}$: $\sin x \perp \cos x \perp 1$.

Pythagorova věta

Věta (Pythagorova)

Pokud $x, y \in V$ jsou kolmé, tak

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Důkaz.

Odvodíme

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \underbrace{\langle x, y\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y, x\rangle}_{=0} + \langle y, y\rangle =$$
$$= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2. \qquad \square$$

Nad $\mathbb{R}$ platí i opačná implikace, ale nad $\mathbb{C}$ obecně nikoli.

Cauchyho–Schwarzova nerovnost

Motivace: Standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ splňuje

$$x^T y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\varphi),$$

z čehož

$$|x^T y| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Věta (Cauchyho–Schwarzova nerovnost)

Pro každé $x, y \in V$ platí

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Cauchyho–Schwarzova nerovnost

Věta (Cauchyho–Schwarzova nerovnost)

Pro každé $x, y \in V$ platí

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Důkaz (Reálná verze).

Pro $y = o$ platí, tak předpokládejme $y \neq o$. Uvažujme funkci

$$f(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle \geq 0.$$

Pak

$$f(t) = \langle x, x\rangle + t\langle x, y\rangle + t\langle y, x\rangle + t^2\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle.$$

Jedná se o kvadratickou funkci, která je všude nezáporná, nemůže mít tedy dva různé kořeny. Proto je příslušný diskriminant nekladný:

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0.$$

Odtud $\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$, odmocněním $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. $\square$

Cauchyho–Schwarzova nerovnost

Věta (Cauchyho–Schwarzova nerovnost)

Pro každé $x, y \in V$ platí

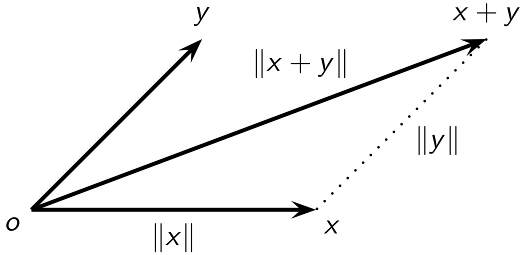
$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

- Pro standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

- Užitečná nerovnost pro různá odvození, např. v následujícím.

Trojúhelníková nerovnost



Důsledek (Trojúhelníková nerovnost)

Pro každé $x, y \in V$ *platí*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Trojúhelníková nerovnost

Důsledek (Trojúhelníková nerovnost)

Pro každé $x, y \in V$ platí

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Důkaz.

Nejprve připomeňme, že pro každé komplexní číslo $z = a + bi$ platí: $z + \overline{z} = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$, a dále $a \leq |z|$. Nyní můžeme odvodit:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle) \\
&\leq \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\,|\langle x,y\rangle| \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\| \cdot \|y\| \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2,
\end{aligned}$$

Tedy máme $\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$. □

Intermezzo – norma obecně

Definice

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Pak *norma* je zobrazení $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$, splňující:

1. $\|x\| \geq 0$ pro všechna $x \in V$, a rovnost pouze pro $x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in V$, a pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ resp. $\alpha \in \mathbb{C}$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tvrzení

Norma indukovaná skalárním součinem je normou.

Důkaz.

Vlastnost 1 platí z definice. Vlastnost 3 už máme. Vlastnost 2:

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|. \quad \square$$

Norma obecně – příklady

Pro $p = 1, 2, \ldots$ definujeme p-normu vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ jako

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

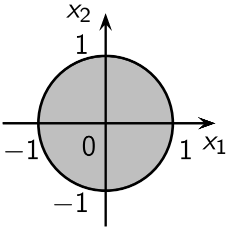
Speciální volby p vedou ke známým normám:

- pro $p = 2$: eukleidovská norma $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,
  což je norma indukovaná standardním skalárním součinem,
- pro $p = 1$: součtová norma $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$,
  nazývá se manhattanská norma, protože odpovídá reálným vzdálenostem při procházení pravoúhlé sítě ulic ve městě,
- pro $p = \infty$ (limitním přechodem):
  maximová (Čebyševova) norma $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

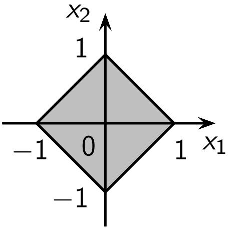
Norma obecně – jednotková koule

Jednotková koule je množina vektorů, které mají normu nanejvýš 1 a tedy jsou od počátku vzdáleny maximálně 1:

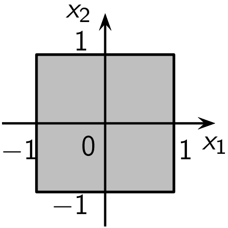
$$\{x \in V;\ \|x\| \leq 1\}.$$



eukleidovská norma



součtová norma



maximová norma

- Jednotková koule je vždy uzavřená, omezená, symetrická dle počátku, konvexní a počátek leží v jejím vnitřku.

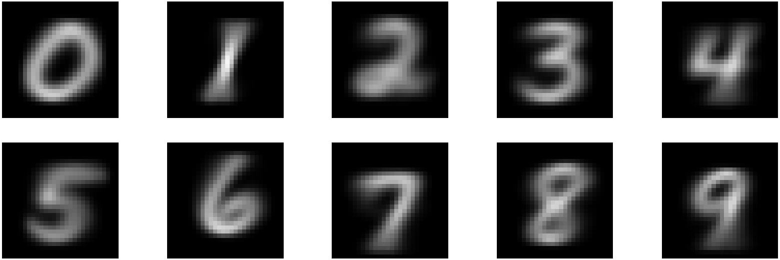
Norma a metrika

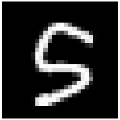
Každá norma určuje vzdálenost metriku (vzdálenost) předpisem

$$d(x, y) := \|x - y\|,$$

tedy vzdálenost vektorů x, y zavádí jako velikost jejich rozdílu.

Vzdálenost a klasifikace číslic



Chceme klasifikovat: 

Jednotlivé vzdálenosti:

0: 1957.44	1: 2237.30	2: 2015.79	3: 1816.23	4: 1868.78
5: 1771.64	6: 2038.57	7: 2090.51	8: 1843.22	9: 1900.81

Klasifikujeme jako 5 (ale je blízko také číslu 3).

Následující téma

1. Skalární součin
   - Skalární součin a norma
   - Ortonormální báze, Gramova–Schmidtova ortogonalizace
   - Ortogonální doplněk a projekce
   - Ortogonální doplněk a projekce v $\mathbb{R}^n$
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Ortogonální matice
2. Vlastní čísla
   - Vlastní čísla, vlastní vektory
   - Charakteristický polynom
   - Cayleyho–Hamiltonova věta
   - Diagonalizovatelnost
   - Jordanova normální forma
   - Symetrické matice
   - Teorie nezáporných matic
   - Výpočet vlastních čísel

Ortogonální a ortonormální systém

Definice (Ortogonální a ortonormální systém)

Systém vektorů $z_1, \dots, z_n$ je

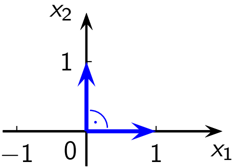
- *ortogonální*, pokud $\langle z_i, z_j \rangle = 0$ pro všechna $i \neq j$;
- *ortonormální*, pokud je ortogonální a $\|z_i\| = 1$ pro všechna i.

Poznámky:

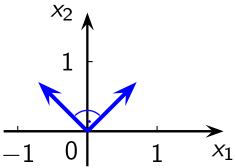
- Je-li systém $z_1, \dots, z_n$ ortonormální, pak je také ortogonální.
- Naopak to obecně neplatí, ale není problém ortogonální systém zortonormalizovat.
  Jsou-li $z_1, \dots, z_n$ nenulové a ortogonální, pak $\frac{1}{\|z_1\|} z_1, \dots, \frac{1}{\|z_n\|} z_n$ je ortonormální.

Ortogonální a ortonormální systém – příklady

- Prostor $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem:



Ortonormální báze
$(1,0)^T$, $(0,1)^T$.



Ortonormální báze
$\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)^T$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)^T$.

- prostor $\mathbb{R}^n$: kanonická báze $e_1, \ldots, e_n$.

Ortogonální a ortonormální systém – lineární nezávislost

Tvrzení

Je-li systém $z_1, \ldots, z_n$ ortonormální, pak je lineárně nezávislý.

Důkaz.

Uvažujme lineární kombinaci $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i = o$. Pro každé k platí:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i, z_k \right\rangle = \langle o, z_k \rangle = 0$$

a zároveň

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i, z_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle z_i, z_k \rangle = \alpha_k \langle z_k, z_k \rangle = \alpha_k. \qquad \square$$

Ortogonální a ortonormální systém – Fourierovy koeficienty

Věta (Fourierovy koeficienty)

Buď $z_1, \ldots, z_n$ ortonormální báze prostoru V. Pak pro každé $x \in V$ platí

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i.$$

Důkaz.

Víme, že $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i$ a souřadnice $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou jednoznačné.
Nyní pro každé k:

$$\langle x, z_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i, z_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle z_i, z_k \rangle = \alpha_k \langle z_k, z_k \rangle = \alpha_k. \qquad \square$$

- Vyjádření $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i$ se nazývá *Fourierův rozvoj*,
- skaláry $\langle x, z_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n$ se nazývají *Fourierovy koeficienty*

Fourierovy koeficienty – příklad

Příklad

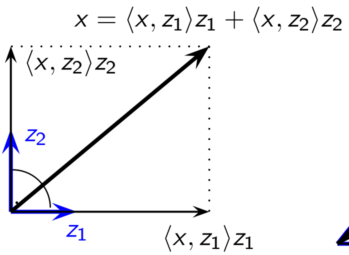
Uvažujme $x = (3,5)^T$.

- Nejprve buď $z_1 := (1,0)^T$, $z_2 := (0,1)^T$. Pak
$$x = \langle x, z_1\rangle z_1 + \langle x, z_2\rangle z_2 = 3z_1 + 5z_2 = 3(1,0)^T + 5(0,1)^T.$$

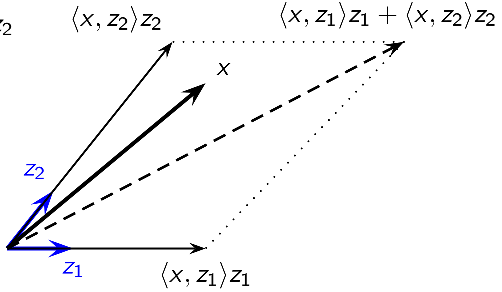
- Nyní buď $z_1 := \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)^T$, $z_2 := \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)^T$. Pak
$$x = \langle x, z_1\rangle z_1 + \langle x, z_2\rangle z_2 = 4\sqrt{2}z_1 + \sqrt{2}z_2. \qquad \square$$

Fourierovy koeficienty – geometrický význam

- v rozvoji $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i$ udává člen $\langle x, z_i \rangle z_i$ projekci vektoru x na přímku $span\{z_i\}$.



Vektory z_1, z_2 ortonormální.

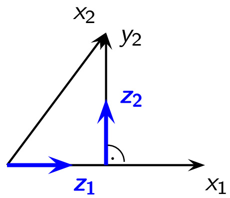


Vektory z_1, z_2 délky 1, ale ne ortogonální.

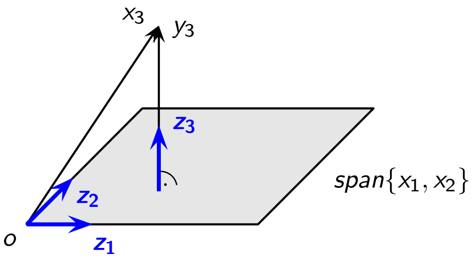
Gramova–Schmidtova ortogonalizace – myšlenka

- Daná báze $x_1, \ldots, x_n$ prostoru V.
- Jak sestrojit ortonormální bázi?
- Idea: Postupným nakolmováním vektorů.

  Od vektoru x_k odečteme jeho projekci do $span\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$; tak bude kolmý na všechny předchozí.



Nakolmení druhého vektoru.



Nakolmení třetího vektoru.

Gramova–Schmidtova ortogonalizace – algoritmus

Algoritmus (Gramova–Schmidtova ortogonalizace)

Vstup: lineárně nezávislé vektory $x_1, \ldots, x_n \in V$.

1. **for** $k := 1$ **to** n **do**
2. $\quad y_k := x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j,$ //vypočítáme kolmici
3. $\quad z_k := \frac{1}{\|y_k\|} y_k,$ //normalizujeme délku na 1
4. **end for**

Výstup: $z_1, \ldots, z_n$ ortonormální báze prostoru $span\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Důkaz. (Správnost Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace)

Matematickou indukcí podle n. Pro $n = 1$ je

- $y_1 = x_1 \neq o$,
- $z_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1$ je dobře definovaný a $span\{x_1\} = span\{z_1\}$.

Gramova–Schmidtova ortogonalizace – důkaz

Důkaz. (Indukční krok $n \leftarrow n-1$).

Předpoklad: $z_1, \ldots, z_{n-1}$ je ortonormální báze $span\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$.
Platí $y_n \neq o$, jinak kdyby $y_n = o$, tak spor kvůli

$$x_n = \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n, z_j \rangle z_j \in span\{z_1, \ldots, z_{n-1}\} = span\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$$

Proto $z_n = \frac{1}{\|y_n\|} y_n$ je dobře definovaný a má jednotkovou normu.
Nyní dokážeme, že $z_1, \ldots, z_n$ je ortonormální systém. Stačí ukázat, že $z_n \perp z_i$ pro $i < n$:

$$\begin{aligned}
\langle z_n, z_i \rangle &= \frac{1}{\|y_n\|} \langle y_n, z_i \rangle = \frac{1}{\|y_n\|} \left\langle x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n, z_j \rangle z_j, z_i \right\rangle = \\
&= \frac{1}{\|y_n\|} \langle x_n, z_i \rangle - \frac{1}{\|y_n\|} \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n, z_j \rangle \langle z_j, z_i \rangle = \\
&= \frac{1}{\|y_n\|} \langle x_n, z_i \rangle - \frac{1}{\|y_n\|} \langle x_n, z_i \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Zbývá ověřit $span\{z_1, \ldots, z_n\} = span\{x_1, \ldots, x_n\}$:

- z algoritmu je vidět, že $span\{z_1, \ldots, z_n\} \subseteq span\{x_1, \ldots, x_n\}$
- oba stejnou dimenzi. $\square$

Gramova–Schmidtova ortogonalizace – důsledky

Důsledek (Existence ortonormální báze)

Každý konečně generovaný prostor se skalárním součinem má ortonormální bázi.

(Pro nekonečně-dimenzionální prostory tvrzení neplatí.)

Důkaz.

Každý konečně generovaný prostor má bázi, a tu můžeme Gramovou–Schmidtovou metodou zortogonalizovat. □

Důsledek (Rozšíření ortonorm. systému na ortonormální bázi)

Každý ortonormální systém vektorů v konečně generovaném prostoru lze rozšířit na ortonormální bázi.

Důkaz.

Každý ortonormální systém vektorů $z_1, \dots, z_m$ lze rozšířit na bázi $z_1, \dots, z_m, x_{m+1}, \dots, x_n$, a tu můžeme Gramovou–Schmidtovou metodou zortogonalizovat na $z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_n$. Ortogonalizací se prvních m vektorů nezmění. □

Skalární součin obecný a standardní

Tvrzení

Buď $B = \{z_1, \ldots, z_n\}$ báze prostoru V. Pak

$$\langle x, y \rangle := [x]_B^T \overline{[y]_B}$$

je skalární součin a báze B je v něm ortonormální bází.

Důkaz.

Nejprve ověříme axiomy z definice skalárního součinu.

- $\langle x, x \rangle = [x]_B^T \overline{[x]_B} \geq 0$,
  nulové jen pro $[x]_B = o$, tedy pro $x = o$.
- Linearita v první složce vyplývá z linearity souřadnic.
- Symetrie pak plyne ze symetrie standardního skalárního součinu

$$\langle x, y \rangle = [x]_B^T \overline{[y]_B} = \overline{[y]_B^T \overline{[x]_B}} = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

Ortonormalitu báze B nahlédneme z vyjádření

$$\langle z_i, z_j \rangle = [z_i]_B^T \overline{[z_j]_B} = e_i^T e_j$$

□

Skalární součin obecný a standardní

Příklad

Zvolme $V = \mathbb{R}^n$ a buď B libovolná báze.

Označme $A \coloneqq {}_B[id]_{\mathrm{kan}}$ matici přechodu od kanonické báze do B.

Protože

$$[x]_B = {}_B[id]_{\mathrm{kan}} \cdot [x]_{\mathrm{kan}}, \quad [y]_B = {}_B[id]_{\mathrm{kan}} \cdot [y]_{\mathrm{kan}},$$

dostáváme

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= [x]_B^T [y]_B = [x]_{\mathrm{kan}}^T \cdot {}_B[id]_{\mathrm{kan}}^T \cdot {}_B[id]_{\mathrm{kan}} \cdot [y]_{\mathrm{kan}} \\ &= x^T A^T A y. \qquad \square\end{aligned}$$

Skalární součin obecný a standardní

Tvrzení

Buď B ortonormální báze prostoru V se skalárním součinem. Pak

$$\langle x, y\rangle = [x]_B^T \overline{[y]_B}, \quad \forall x, y \in V.$$

Důkaz.

Buď $B = \{z_1, \ldots, z_n\}$. Pak $[x]_B = (\langle x, z_1\rangle, \ldots, \langle x, z_n\rangle)^T$ a

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle \textstyle\sum_{j=1}^n \langle x, z_j\rangle z_j, y\rangle = \sum_{j=1}^n \langle x, z_j\rangle \langle z_j, y\rangle \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^n \langle x, z_j\rangle \overline{\langle y, z_j\rangle} = [x]_B^T \overline{[y]_B}.\end{aligned}$$ $\square$

- $\langle \cdot, \cdot\rangle$ je skalárním součinem na V právě tehdy, když je tvaru $\langle x, y\rangle = [x]_B^T \overline{[y]_B}$ pro nějakou ortonormální bázi B.
- Každý skalární součin je tedy standardním skalárním součinem při pohledu z libovolné ortonormální báze.
- Analogicky i pro normu indukovanou skalárním součinem:

$$\|x\| = \|[x]_B\|_2 = \sqrt{[x]_B^T \overline{[x]_B}}\,.$$

Následující téma

1. Skalární součin
   - Skalární součin a norma
   - Ortonormální báze, Gramova–Schmidtova ortogonalizace
   - Ortogonální doplněk a projekce
   - Ortogonální doplněk a projekce v $\mathbb{R}^n$
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Ortogonální matice
2. Vlastní čísla
   - Vlastní čísla, vlastní vektory
   - Charakteristický polynom
   - Cayleyho–Hamiltonova věta
   - Diagonalizovatelnost
   - Jordanova normální forma
   - Symetrické matice
   - Teorie nezáporných matic
   - Výpočet vlastních čísel

Ortogonální doplněk

Definice (Ortogonální doplněk)

Ortogonální doplněk množiny vektorů $M \subseteq V$ je

$$M^{\perp} := \{x \in V;\ \langle x, y\rangle = 0\ \forall y \in M\}.$$

- $\{o\}^{\perp} =?$, $V^{\perp} =?$ $\quad (\{o\}^{\perp} = V,\ V^{\perp} = \{o\})$

Příklad

Ortogonální doplněk k vektoru $(2,5)^T$ a přímce $span\{(2,5)^T\}$.

Ortogonální doplněk – vlastnosti

Tvrzení (Vlastnosti ortogonálního doplňku množiny)

Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$. Pak

1. *$M^\perp$ je podprostor V,*
2. *je-li $M \subseteq N$ pak $M^\perp \supseteq N^\perp$,*
3. *$M^\perp = span(M)^\perp$.*

Důkaz.

1. Ověříme vlastnosti podprostoru:
   (a) $o \in M^\perp$ triviálně.
   (b) Pokud $x_1, x_2 \in M^\perp$, pak $\langle x_1, y\rangle = \langle x_2, y\rangle = 0\ \forall y \in M$.
   Tedy i $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle = 0$.
   (c) Násobky analogicky.
2. Buď $x \in N^\perp$, tedy $\langle x, y\rangle = 0\ \forall y \in N$.
   Tím spíš $\langle x, y\rangle = 0\ \forall y \in M \subseteq N$, a proto $x \in M^\perp$. $\square$

Ortogonální doplněk – vlastnosti

Tvrzení (Vlastnosti ortogonálního doplňku množiny)

Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$. Pak

1. *$M^\perp$ je podprostor V,*
2. *je-li $M \subseteq N$ pak $M^\perp \supseteq N^\perp$,*
3. *$M^\perp = span(M)^\perp$.*

Důkaz.

3. $M \subseteq span(M)$, tedy dle předchozího je $M^\perp \supseteq span(M)^\perp$.

   Důkaz druhé inkluze $M^\perp \subseteq span(M)^\perp$:
   Je-li vektor x kolmý na určité vektory, pak je kolmý na jejich lineární kombinace. Formálně: $\square$

Ortogonální doplněk – vlastnosti

Věta (Vlastnosti ortogonálního doplňku podprostoru)

Buď $U \Subset V$, *buď* $z_1, \ldots, z_m$ *ortonormální báze* U, *a buď* $z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_n$ *její rozšíření na ortonormální bázi* V.

Pak $z_{m+1}, \ldots, z_n$ *je ortonormální báze* $U^\perp$.

Důkaz.

Stačí dokázat $span\{z_{m+1}, \ldots, z_n\} = U^\perp$ (ortonormalita jasná).

Inkluze "$\supseteq$". Každý $x \in V$ má Fourierův rozvoj $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i$. Je-li $x \in U^\perp$, pak $\langle x, z_i \rangle = 0$, $i = 1, \ldots, m$, a tudíž

$$x = \sum_{i=m+1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i \in span\{z_{m+1}, \ldots, z_n\}.$$

Inkluze "$\subseteq$". Buď $x \in span\{z_{m+1}, \ldots, z_n\}$, pak

$$x = \sum_{i=m+1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i = \sum_{i=1}^{m} 0 z_i + \sum_{i=m+1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i.$$

Z jednoznačnosti souřadnic $\langle x, z_i \rangle = 0$, $i = 1, \ldots, m$. $\square$

Ortogonální doplněk – vlastnosti

Věta (Vlastnosti ortogonálního doplňku podprostoru)

Buď $U \Subset V$, buď $z_1, \dots, z_m$ ortonormální báze U, a buď $z_1, \dots, z_m$, $z_{m+1}, \dots, z_n$ její rozšíření na ortonormální bázi V. Pak $z_{m+1}, \dots, z_n$ je ortonormální báze $U^\perp$.

Důsledek (Vlastnosti ortogonálního doplňku podprostoru)

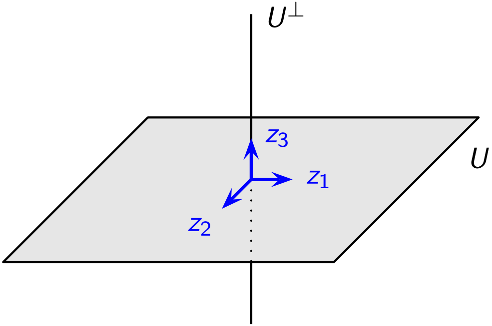
Buď $U \Subset V$. Potom platí:

1. $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$,
2. $V = U + U^\perp$,
3. $U \cap U^\perp = \{o\}$,
4. $(U^\perp)^\perp = U$.

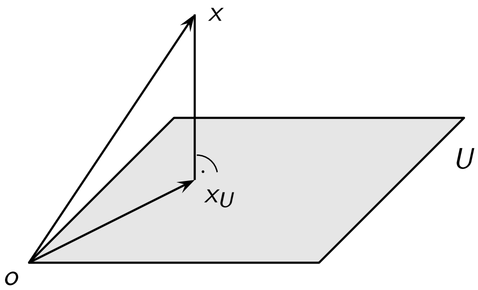
Ortogonální doplněk – ilustrace

Příklad

Ilustrace podprostoru U a jeho ortogonálního doplňku $U^{\perp}$:



Ortogonální projekce



Definice (Ortogonální projekce)

Projekcí vektoru $x \in V$ do podprostoru $U \Subset V$ je takový vektor $x_U \in U$, který splňuje

$$\|x - x_U\| = \min_{y \in U} \|x - y\|.$$

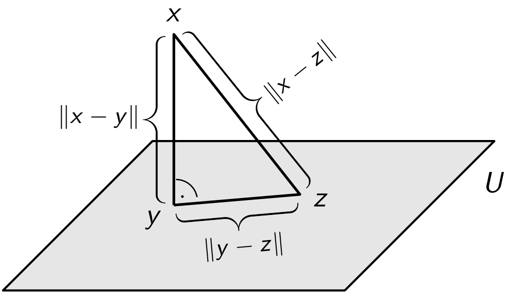
Ortogonální projekce

Tvrzení (O kolmici)

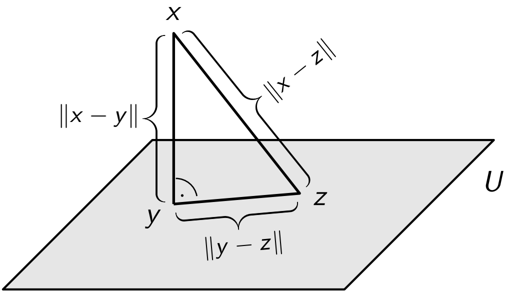
Buď $U \Subset V$, buď $x \in V$ a $y \in U$ takové, že $x - y \in U^{\perp}$. Pak

$$\|x - y\| < \|x - z\| \quad \forall z \in U \setminus \{y\}.$$

Tedy vektor y je jednoznačnou projekcí vektoru x do U.



Ortogonální projekce



Důkaz.

Buď $z \in U \setminus \{y\}$. Z předpokladu víme $(x - y) \perp (y - z)$.

Použijeme Pythagorovu větu, která říká

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2.$$

Rovnost nastane pouze tehdy, když $\|y - z\|^2 = 0$, tj. $y = z$. $\square$

Ortogonální projekce

Věta (O ortogonální projekci)

Buď $U \Subset V$. Pak pro každé $x \in V$ existuje právě jedna projekce $x_U \in U$ do podprostoru U.

Navíc, je-li $z_1, \ldots, z_m$ ortonormální báze U, pak

$$x_U = \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i.$$

Důkaz.

Buď $z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_n$ rozšíření na ortonormální bázi V.

Zadefinujeme $y := \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i \in U$ a ukážeme, že je to hledaná projekce x_U. Odvodíme

$$x - y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i - \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i = \sum_{i=m+1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i \in U^{\perp}.$$

Dle tvrzení o kolmici je $y = x_U$ hledaná (jednoznačná) projekce. $\square$

Ortogonální projekce

Připomenutí projekce:

$$x_U = \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i.$$

- zobrazení $x \mapsto x_U$, které vektor $x \in V$ zobrazuje na jeho projekci do podprostoru U, je lineární

Důsledek

Vektor $y \in U$ je projekcí vektoru $x \in V$ do podprostoru U právě tehdy, když $x - y \in U^{\perp}$.

Projekci jsme již implicitně použili:

- Fourierův rozvoj je vlastně rozložení vektoru x na součet projekcí na jednotlivé přímky $span\{z_i\}$, $i = 1, \ldots, n$.
- Gramova–Schmidtova ortogonalizace v k-tém cyklu konstruuje projekci vektoru x_k do podprostoru $span\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$.

Ortogonální projekce na přímku

Příklad (Projekce na přímku při standardním skalár. součinu)

Buď $a \in \mathbb{R}^n$ nenulový vektor a uvažujme projekci vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ na přímku se směrnicí a, čili projekci do podprostoru $U = span\{a\}$.

Ortonormální báze prostoru U je vektor $z = \frac{1}{\|a\|}a$ a podle vzorce má projekce vektoru x tvar

$$x_U = \langle x, z\rangle z = \frac{1}{\|a\|^2}\langle x, a\rangle a = \frac{x^T a}{a^T a} a.$$

Legendreovy polynomy

Jak zavést skalární součin na prostoru polynomů $\mathcal{P}^n$?

1) pro $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, $q(x) = b_n x^n + \ldots + b_0$ zaveď

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

2) $\mathcal{P}^n \Subset \mathcal{C}_{[a,b]}$, tak použij standardní skalární součin prostoru $\mathcal{C}_{[a,b]}$

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x) q(x) dx$$

Pokud zortogonalizujeme vektory $1, x, x^2, \ldots$ na $\mathcal{C}_{[-1,1]}$, dostaneme tzv. *Legendreovy polynomy*

$$1,\ x,\ \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1),\ \tfrac{1}{5}(5x^3 - 3x),\ \ldots$$

Použití: aproximace funkce polynomem.

Ortonormální systém v prostoru funkcí

V prostoru $\mathcal{C}_{[-\pi,\pi]}$ existuje spočetný ortonormální systém $z_1, z_2, \ldots$ sestávající z vektorů

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 3x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 3x,\ \ldots$$

Projekce $f(x)$ do prostoru $span\{z_1, \ldots, z_k\}$ dává aproximaci

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{k} \langle f, z_i \rangle z_i$$

Fourierův rozvoj funkce $f(x) = x$ na $[-\pi, \pi]$

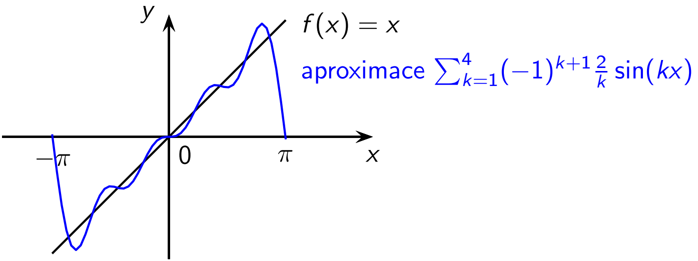
Fourierův rozvoj $x = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx))$, kde:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot 1\ dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\ dx = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\ dx = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(kx)\ dx = 0.$$

Tedy $x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin(kx)$.



Následující téma

1. Skalární součin
   - Skalární součin a norma
   - Ortonormální báze, Gramova–Schmidtova ortogonalizace
   - Ortogonální doplněk a projekce
   - Ortogonální doplněk a projekce v $\mathbb{R}^n$
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Ortogonální matice
2. Vlastní čísla
   - Vlastní čísla, vlastní vektory
   - Charakteristický polynom
   - Cayleyho–Hamiltonova věta
   - Diagonalizovatelnost
   - Jordanova normální forma
   - Symetrické matice
   - Teorie nezáporných matic
   - Výpočet vlastních čísel

Ortogonální doplněk v $\mathbb{R}^n$ (se std. skalárním součinem)

Věta (Ortogonální doplněk v $\mathbb{R}^n$)

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak $\mathcal{R}(A)^\perp = Ker(A)$.

Důkaz.

Z vlastností ortogonálního doplňku víme, že

$$\mathcal{R}(A)^\perp = \{(A_{1*})^T, \ldots, (A_{m*})^T\}^\perp.$$

Tedy $x \in \mathcal{R}(A)^\perp$ právě tehdy, když x je kolmé na řádky matice A.

Neboli $A_{i*}x = 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$. Tedy $x \in Ker(A)$. $\square$

Důsledek

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak $\mathcal{R}(A) \oplus Ker(A) = \mathbb{R}^n$.

Ortogonální doplněk v $\mathbb{R}^n$ (se std. skalárním součinem)

Příklad

Buď V prostor generovaný vektory $(1,2,3)^T$ a $(1,-1,0)^T$.
chceme-li určit $V^\perp$.

Sestavíme matici A takovou, aby $V = \mathcal{R}(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní již stačí nalézt bázi $V^\perp = Ker(A)$. Upravíme matici na RREF

$$\mathrm{RREF}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bázi jádra tvoří například vektor $(1,1,-1)^T$.

Matice A versus $A^T A$

Důsledek

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak

1. $Ker(A^T A) = Ker(A)$,
2. $\mathcal{R}(A^T A) = \mathcal{R}(A)$,
3. $rank(A^T A) = rank(A)$.

Pozor, pro sloupcové prostory neplatí!

Matice A versus $A^T A$

Důsledek

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak

1. $Ker(A^T A) = Ker(A)$,
2. $\mathcal{R}(A^T A) = \mathcal{R}(A)$,
3. $rank(A^T A) = rank(A)$.

Důkaz.

1. Je-li $x \in Ker(A)$, pak $Ax = o$, a tedy také

$$A^T Ax = A^T o = o,$$

   čímž $x \in Ker(A^T A)$.

   Naopak, je-li $x \in Ker(A^T A)$, pak $A^T Ax = o$.

   Pronásobením x^T dostaneme $x^T A^T Ax = 0$, neboli $\|Ax\|^2 = 0$.

   Z vlastnosti normy musí $Ax = o$ a tudíž $x \in Ker(A)$. $\square$

Matice A versus $A^T A$

Důsledek

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak

1. $Ker(A^T A) = Ker(A)$,
2. $\mathcal{R}(A^T A) = \mathcal{R}(A)$,
3. $rank(A^T A) = rank(A)$.

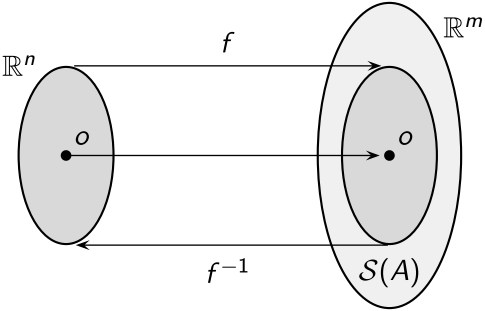
Důkaz.

2. $\mathcal{R}(A^T A) = Ker(A^T A)^{\perp} = Ker(A)^{\perp} = \mathcal{R}(A)$.
3. Triviálně z předchozího bodu. $\square$

Matice A versus $A^T A$ geometricky

Uvažujme lineární zobrazení $f(x) = Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Nechť $f(x)$ je prosté.

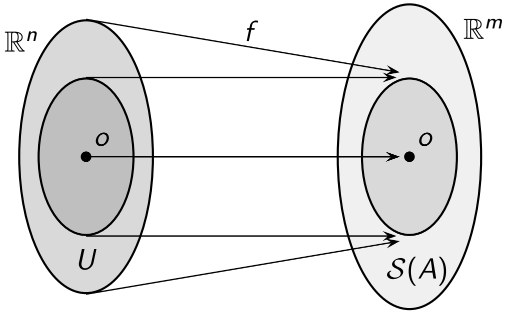


Lze tedy zavést inverzní zobrazení z prostoru $f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(A)$ do $\mathbb{R}^n$.

Matice A versus $A^T A$ geometricky

Uvažujme lineární zobrazení $f(x) = Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Nechť $f(x)$ není prosté.



Chceme najít $U \Subset \mathbb{R}^n$ tak, aby

$$dim\, U = dim\, f(\mathbb{R}^n) \quad \text{a} \quad f(U) = f(\mathbb{R}^n).$$

Ukážeme, že lze zvolit $U = \mathcal{R}(A)$.

Matice A versus $A^T A$ geometricky

Tvrzení (Maticové prostory a lineární zobrazení)

Uvažujme lineární zobrazení $f(x) = Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Pokud definiční obor $f(x)$ omezíme pouze na prostor $\mathcal{R}(A)$, dostaneme isomorfismus mezi $\mathcal{R}(A)$ a $f(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz.

Buď $x \in \mathbb{R}^n$. Protože $\mathcal{R}(A) \oplus Ker(A) = \mathbb{R}^n$, lze rozložit

$$x = x^R + x^K, \quad \text{kde } x^R \in \mathcal{R}(A) \text{ a } x^K \in Ker(A).$$

Pak

$$f(x) = Ax = A(x^R + x^K) = Ax^R + Ax^K = Ax^R.$$

Tudíž $f(\mathcal{R}(A)) = f(\mathbb{R}^n)$.

Protože $dim\, \mathcal{R}(A) = dim\, f(\mathbb{R}^n)$, dostáváme isomorfismus. $\square$

Ortogonální projekce v $\mathbb{R}^n$ (se std. skalárním součinem)

- Odvodíme vzorec pro projekci vektoru x do podprostoru $U \Subset \mathbb{R}^m$.
- Vektory báze U dáme do sloupců matice A, čímž $U = \mathcal{S}(A)$.

Věta (Ortogonální projekce v $\mathbb{R}^m$)

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti n. Pak projekce vektoru $x \in \mathbb{R}^m$ do sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ je $x' = A(A^T A)^{-1} A^T x$.

Ortogonální projekce v $\mathbb{R}^n$ (se std. skalárním součinem)

Věta (Ortogonální projekce v $\mathbb{R}^m$)

Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hodnosti n. Pak projekce vektoru $x \in \mathbb{R}^m$ do sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ je

$$x' = A(A^TA)^{-1}A^Tx.$$

Důkaz.

Nejprve si uvědomíme, že x' je dobře definované:

$$rank(A^TA) = rank(A) = n, \text{tedy je regulární.}$$

Nyní stačí nyní ukázat, že $x' \in \mathcal{S}(A)$ a $x - x' \in \mathcal{S}(A)^{\perp}$.

První vlastnost: $x' = Az$ pro $z = (A^TA)^{-1}A^Tx$.

Druhá vlastnost: chceme $x - x' \in \mathcal{S}(A)^{\perp} = \mathcal{R}(A^T)^{\perp} = Ker(A^T)$

Ověříme:

$$\begin{aligned} A^T(x - x') &= A^T\left(x - A(A^TA)^{-1}A^Tx\right) \\ &= A^Tx - A^TA(A^TA)^{-1}A^Tx = A^Tx - A^Tx = o. \quad \square \end{aligned}$$

Matice projekce

Matice projekce do $\mathcal{S}(A)$ je:

$$P := A(A^T A)^{-1} A^T.$$

- P je symetrická.
- Platí $P^2 = P$.

  Důkaz možný algebraicky dosazením.

  Jiný důkaz významem: $P(Px) = Px$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$.
- Platí $\mathcal{S}(P) = \mathcal{S}(A)$, tedy $rank(P) = rank(A)$.

  Hodnost matice P je rovna dimenzi prostoru, do kterého projektujeme.

Tvrzení

Matice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je maticí projekce právě tehdy, když je symetrická a $P = P^2$.

Projekce s ortonormální bází

- Buď $z_1, \ldots, z_n$ ortonormální systém v $\mathbb{R}^m$.
- Sestroj matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se sloupci $z_1, \ldots, z_n$
- Nyní
$$(A^T A)_{ij} = \langle z_i, z_j \rangle$$
- Tudíž $A^T A = I_n$ a matice projekce se zjednoduší
$$P = A(A^T A)^{-1} A^T = AA^T.$$

Paralela s dřívějším předpisem pro projekci:

$$Px = A(A^T x) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^T x \\ z_2^T x \\ \vdots \\ z_n^T x \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (z_i^T x) z_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i.$$

Projekce na přímku podruhé

- Buď $a \in \mathbb{R}^n$ je směrnice přímky (podprostoru dimenze 1).
- Matice projekce přímku má tvar $P = a(a^T a)^{-1} a^T$,
- Projekce vektoru x na přímku je pak vektor

$$Px = a(a^T a)^{-1} a^T x = \frac{a^T x}{a^T a} a.$$

- Pokud směrnici normujeme tak, aby $\|a\|_2 = 1$, potom matice projekce získá tvar $P = aa^T$.

Projekce do doplňku

Věta (Ortogonální projekce do doplňku)

Buď $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *matice projekce do podprostoru* $V \Subset \mathbb{R}^n$*.*

Pak $I - P$ *je maticí projekce do* $V^\perp$*.*

Důkaz.

Každý vektor $x \in \mathbb{R}^n$ lze jednoznačně rozložit na součet $x = y + z$, kde $y \in V$ a $z \in V^\perp$.

Zde y je projekce x do V a z projekce x do $V^\perp$.

Tedy $z = x - y = x - Px = (I - P)x$. □

Příklad (Matice projekce do $Ker(A)$)

Protože

$$Ker(A)^\perp = \mathcal{R}(A) = \mathcal{S}(A^T),$$

tak matice projekce do $Ker(A)$ je

$$I - A^T(AA^T)^{-1}A.$$

Následující téma

1. Skalární součin
   - Skalární součin a norma
   - Ortonormální báze, Gramova–Schmidtova ortogonalizace
   - Ortogonální doplněk a projekce
   - Ortogonální doplněk a projekce v $\mathbb{R}^n$
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Ortogonální matice
2. Vlastní čísla
   - Vlastní čísla, vlastní vektory
   - Charakteristický polynom
   - Cayleyho–Hamiltonova věta
   - Diagonalizovatelnost
   - Jordanova normální forma
   - Symetrické matice
   - Teorie nezáporných matic
   - Výpočet vlastních čísel

Metoda nejmenších čtverců

- uvažujme soustavu $Ax = b$
- nechť nemá řešení (typicky, když $m \gg n$)
- chceme nějakou dobrou aproximaci, ale jakou?
- chceme vektor x, že levá a pravá strana jsou si co nejblíže:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|.$$

- pro eukleidovskou dostáváme

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2,$$

- vzhledem k monotonii druhé mocniny je to ekvivalentní s

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} (A_{j*}x - b_j)^2.$$

Odtud název *metoda nejmenších čtverců*.

Metoda nejmenších čtverců (MNČ) $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$

Ukážeme, že řešení metodou nejmenších čtverců jsou zároveň řešeními *soustava normálních rovnic*

$$A^T A x = A^T b.$$

Věta (Množina řešení metodou nejmenších čtverců)

Množina přibližných řešení soustavy $Ax = b$ metodou nejmenších čtverců je neprázdná a rovna množině řešení normálních rovnic.

Důkaz.

Hledáme vlastně projekci vektoru b do podprostoru $\mathcal{S}(A)$.

Tato projekce je vektor tvaru Ax, kde $x \in \mathbb{R}^n$.

Víme, že je Ax projekcí právě tehdy, když

$$Ax - b \in \mathcal{S}(A)^\perp = Ker(A^T).$$

Jinými slovy, musí platit $A^T(Ax - b) = 0$, neboli

$$A^T A x = A^T b. \qquad \square$$

Metoda nejmenších čtverců (MNČ) $\quad \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_2$

Soustava normálních rovnic

$$A^T A x = A^T b.$$

- Je-li $Ax = b$ řešitelná, pak její řešení je také řešením MNČ.
- Jednoznačnost řešení, má-li A lineárně nezávislé sloupce. Pak je $A^T A$ regulární.

Důsledek

Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hodnosti n. Pak přibližné řešení soustavy $Ax = b$ metodou nejmenších čtverců je jednoznačné a tvaru

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

- A regulární, pak řešení $Ax = b$ je $x = A^{-1}b$.
- $rank(A) = n$, pak řešení MNČ je $(A^T A)^{-1} A^T b$.

  Matice $B = (A^T A)^{-1} A^T$ je tedy něco jako zobecněná inverze (skutečně $BA = I_n$, ale ne naopak)

Metoda nejmenších čtverců (MNČ) $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$

Poznámka

- Dříve: matice projekce do $\mathcal{S}(A)$:
$$A(A^T A)^{-1} A^T$$
- Nyní: řešení soustavy $Ax = b$ MNČ pro matici plné hodnosti:
$$(A^T A)^{-1} A^T b$$

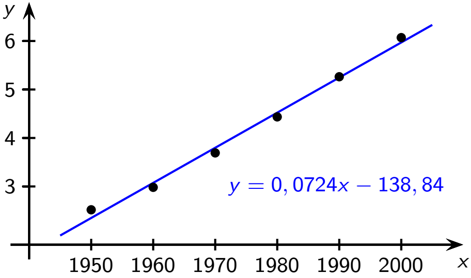
Metoda nejmenších čtverců – lineární regrese

Vývoj světové populace

rok	1950	1960	1970	1980	1990	2000
populace (mld.)	2,519	2,982	3,692	4,435	5,263	6,070

Proložení přímkou $y = px + q$:

$$
\begin{aligned}
2,519 &= p \cdot 1950 + q \\
&\vdots \\
6,070 &= p \cdot 2000 + q
\end{aligned}
$$




```
A=[1950 1960 1970
   1980 1990 2000;
   1 1 1 1 1 1 ]';
b=[2.519 2.982
   3.692 4.435
   5.263 6.070]';
x=inv(A'*A)*A'*b,
x'*[2009; 1]
```

Odhad pro rok 2009: 6,622 mld., skutečnost : 6,793 mld.

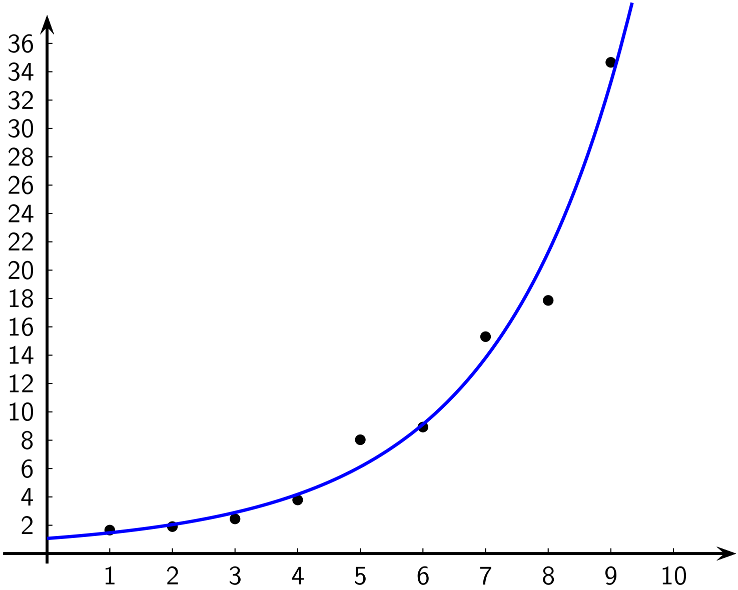
Metoda nejmenších čtverců – nelineární regrese

Některé nelineární modely se dají převést na lineární.

- uvažujme závislost
$$f(x) = ae^{bx},$$
kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou neznámé parametry
- mějme měření $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$:
$$y_i = ae^{bx_i}, \;\; i = 1, \ldots, n$$
- zlogaritmováním: $\log(y_i) = \log(a) + bx_i$
- substitucí $y_i' \equiv \log(y_i)$, $a' \equiv \log(a)$ vede na lineární model
$$y_i' = a' + bx_i, \;\; i = 1, \ldots, n$$

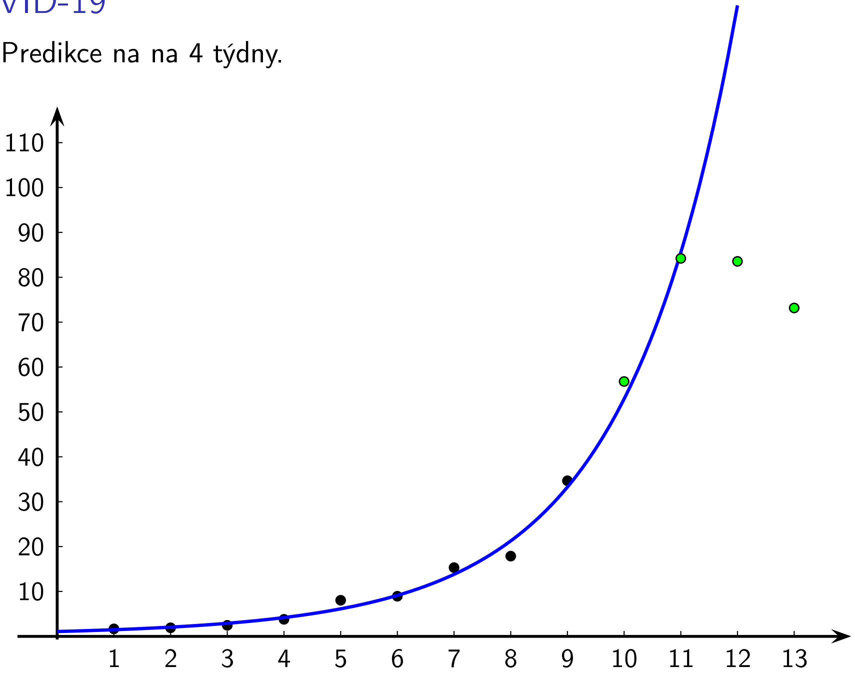
COVID-19

Období 10.8. – 5.10. (týdenní součty, nové případy v tis.).



COVID-19

Predikce na na 4 týdny.

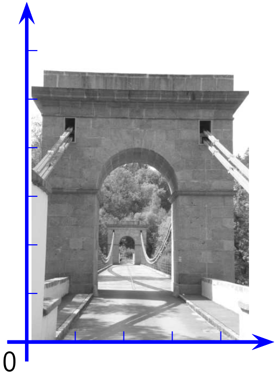


Následující téma

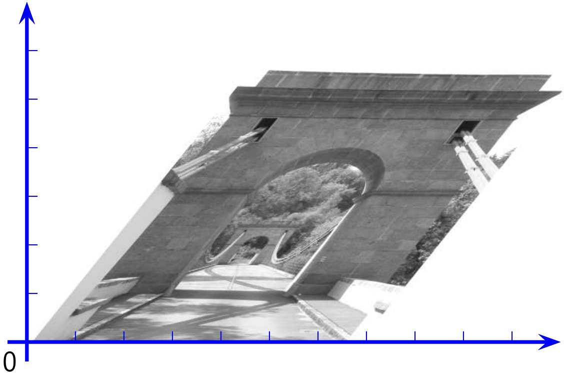
1. Skalární součin
   - Skalární součin a norma
   - Ortonormální báze, Gramova–Schmidtova ortogonalizace
   - Ortogonální doplněk a projekce
   - Ortogonální doplněk a projekce v $\mathbb{R}^n$
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Ortogonální matice
2. Vlastní čísla
   - Vlastní čísla, vlastní vektory
   - Charakteristický polynom
   - Cayleyho–Hamiltonova věta
   - Diagonalizovatelnost
   - Jordanova normální forma
   - Symetrické matice
   - Teorie nezáporných matic
   - Výpočet vlastních čísel

Ortogonální matice – motivace

Skosení deformuje objekty:



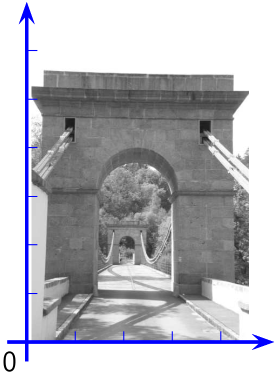
původní obrázek



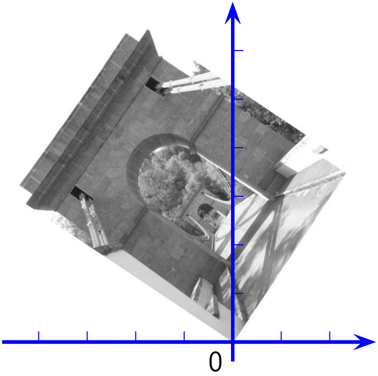
obrázek po transformaci

Ortogonální matice – motivace

Otočení nedeformuje objekty:



původní obrázek



obrázek po transformaci

Ortogonální matice

Definice (Ortogonální a unitární matice)

- Matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *ortogonální*, pokud $Q^T Q = I_n$.
- Matice $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je *unitární*, pokud $\overline{Q}^T Q = I_n$.

Tvrzení (Charakterizace ortogonálních matic)

Matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je ortogonální právě tehdy když sloupce Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

Důkaz.

$$(Q^T Q)_{ij} = \langle Q_{*i}, Q_{*j} \rangle = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \qquad \square$$

Tvrzení (Základní vlastnosti ortogonálních matic)

Buď $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální. Pak:

1. *Q^T je ortogonální,*
2. *Q^{-1} existuje a je ortogonální.*

Ortogonální matice

Tvrzení (Součin ortogonálních matic)

Jsou-li $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonální, pak $Q_1 Q_2$ je ortogonální.

Důkaz.

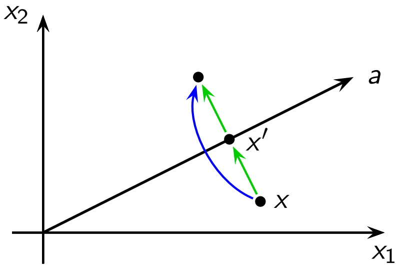
$(Q_1 Q_2)^T Q_1 Q_2 = Q_2^T Q_1^T Q_1 Q_2 = Q_2^T Q_2 = I_n$. □

Příklad (Příklady ortogonálních matic)

- Jednotková matice I_n, nebo k ní opačná $-I_n$. ...
- Householderova matice: $H(a) := I_n - \frac{2}{a^T a} a a^T$, kde $o \neq a \in \mathbb{R}^n$.
- Givensova matice: matice otočení v rovině dvou os.

Householderova matice $\qquad H(a) := I_n - \frac{2}{a^T a} a a^T$

Otočení dle osy o 180°:



Otočení bodu x kolem osy o 180° ve směru a:

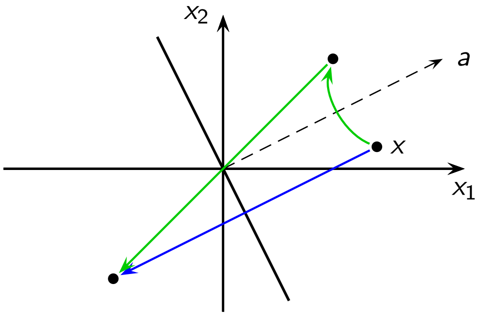
$$x + 2(x' - x) = 2x' - x = 2a(a^T a)^{-1} a^T x - x = \left(2\frac{aa^T}{a^T a} - I_n\right) x$$

Tedy matice otočení:

$$2\frac{aa^T}{a^T a} - I_n.$$

Householderova matice $\quad H(a) := I_n - \frac{2}{a^T a} a a^T$

Householderovo zrcadlení dle nadroviny s normálou a:



Otočíme o 180° podle přímky a, nato překlopíme dle počátku:

$$H(a) = I_n - 2\frac{aa^T}{a^T a}.$$

- Každou ortogonální matici řádu n lze vyjádřit jako součin maximálně n Householderových matic.

Givensova matice

- Pro $n = 2$ je to matice otočení o úhel φ proti směru hodinových ručiček
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$
Jsou to tedy právě matice tvaru
$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}, \quad \text{kde } c^2 + s^2 = 1$$

- Pro $n \geq 2$ je to matice otočení o úhel φ v rovině os x_i, x_j
$$G_{i,j}(c,s) = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & c & & -s & \\ & & I & & \\ & s & & c & \\ & & & & I \end{pmatrix}.$$

- Každou ortogonální matici řádu n lze vyjádřit jako součin maximálně $\binom{n}{2}$ Givensových matic (+ diagonální matice s ± 1).

Ortogonální matice řádu 2

Chceme popsat všechny ortogonální matice řádu 2.

- Vyjádříme takovou matici ve tvaru

$$\begin{pmatrix} c & ? \\ s & ? \end{pmatrix}$$

- Aby měl první sloupec jednotkovou velikost, musí $c^2 + s^2 = 1$.
- Aby druhý sloupec
  - byl kolmý na první, musí být násobkem vektoru $(-s, c)^T$,
  - měl jednotkovou velikost, musí to být $(-s, c)^T$, nebo $(s, -c)^T$.
- V prvním případě dostáváme matici rotace

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

- V druhém případě dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

  která reprezentuje složení překlopení podle osy x_2 a rotace.

Vlastnosti ortogonálních matic

Věta (Vlastnosti ortogonálních matic (1/2))

Buď $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální. Pak:

1. $\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle$ *pro každé* $x, y \in \mathbb{R}^n$,
2. $\|Qx\| = \|x\|$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz.

1. $\langle Qx, Qy\rangle = (Qx)^T Qy = x^T Q^T Qy = x^T I_n y = x^T y = \langle x, y\rangle$.
2. $\|Qx\| = \sqrt{\langle Qx, Qx\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$. $\square$

- Zobrazení $x \mapsto Qx$ zachovává úhly a délky.
- Platí i naopak:
  matice zobrazení zachovávajícího skalární součin je ortogonální.
  Důkaz. Dosaď $x := e_i$, $y := e_j$. Pak
  $$\begin{aligned}\langle Qx, Qy\rangle &= \langle x, y\rangle = x^T y = e_i^T e_j = (I_n)_{ij},\\ &= x^T Q^T Qy = e_i^T Q^T Qe_j = (Q^T Q)_{ij}.\end{aligned}$$ $\square$

Vlastnosti ortogonálních matic

Věta (Vlastnosti ortogonálních matic (2/2))

Buď $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální. Pak:

1. $|Q_{ij}| \leq 1$ *a* $|Q^{-1}_{ij}| \leq 1$ *pro každé* $i, j = 1, \dots, n$,
2. $\begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q \end{pmatrix}$ *je ortogonální matice.*

Důkaz.

1. Víme $\|Q_{*j}\| = 1$ pro každé $j = 1, \dots, n$.
   Tedy $1 = \|Q_{*j}\|^2 = \sum_{i=1}^n q_{ij}^2$, z čehož $q_{ij}^2 \leq 1$, a tak $|q_{ij}| \leq 1$.
   Matice Q^{-1} je ortogonální, takže pro ni tvrzení platí také.
2. Z definice $\begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q^T Q \end{pmatrix} = I_{n+1}$. $\square$

Vlastnosti ortogonálních matic

- Ortogonální matice jsou ceněny numerické matematice:

  Nechť přibližně spočítaná hodnota vektoru x je tedy $\hat{x} = x + err$, kde err je chyba při výpočtu.
  Pak $Q\hat{x} = Q(x + err) = Qx + Q\,err$. Nová chyba je

  $$\|Q\,err\| = \|err\|.$$

Poznámka (Ortogonální matice a Fourierovy koeficienty)

Buď $z_1, \ldots, z_n$ báze $\mathbb{R}^n$, buď $v \in \mathbb{R}^n$ a chceme $v = \sum_{i=1}^n x_i z_i$.

Souřadnice jsou tedy řešením soustavy $Qx = v$, kde sloupce matice Q jsou tvořeny vektory báze.

Pokud je báze ortonormální, je matice Q ortogonální a

$$x = Q^{-1}v = Q^T v = \begin{pmatrix} — & z_1^T & — \\ — & z_2^T & — \\ & \vdots & \\ — & z_n^T & — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^T v \\ z_2^T v \\ \vdots \\ z_n^T v \end{pmatrix}.$$

Následující téma

1. Skalární součin
   - Skalární součin a norma
   - Ortonormální báze, Gramova–Schmidtova ortogonalizace
   - Ortogonální doplněk a projekce
   - Ortogonální doplněk a projekce v $\mathbb{R}^n$
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Ortogonální matice
2. Vlastní čísla
   - Vlastní čísla, vlastní vektory
   - Charakteristický polynom
   - Cayleyho–Hamiltonova věta
   - Diagonalizovatelnost
   - Jordanova normální forma
   - Symetrické matice
   - Teorie nezáporných matic
   - Výpočet vlastních čísel

Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice (Vlastní čísla a vlastní vektory)

Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak $\lambda \in \mathbb{C}$ je *vlastní číslo* matice A a $x \in \mathbb{C}^n$ jemu příslušný *vlastní vektor*, pokud

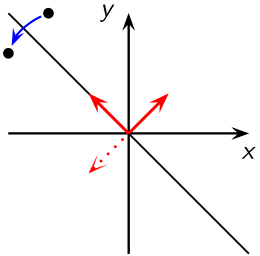
$$Ax = \lambda x, \ \ x \neq o.$$

- $x \neq o$ je nezbytná podmínka
  ($\lambda = 0$ ale klidně může nastat)
- vlastní vektor (při daném λ) není určen jednoznačně,
  (někdy se proto vlastní vektor normuje, aby $\|x\| = 1$)
- Proč těleso $\mathbb{C}$?
  (i pro reálné matice se komplexním číslům nevyhneme)

Geometrická interpretace:

- Vlastní vektor udává invariantní při zobrazení $x \mapsto Ax$.
- Vlastní číslo představuje škálování v tomto invariantním směru.

Vlastní čísla a vektory lineárních zobrazení v rovině

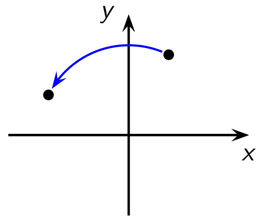


Překlopení dle přímky $y = -x$,

matice zobrazení $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

vlastní čísla:

- 1, vlastní vektor $(-1, 1)^T$
- -1, vlastní vektor $(1, 1)^T$



Rotace o úhel 90°,

matice zobrazení $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

žádná reálná vlastní čísla.

Charakterizace vlastních čísel a vektorů

Věta (Charakterizace vlastních čísel a vektorů)

Buď $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$*. Pak*

1. $\lambda \in \mathbb{C}$ *je vlastním číslem* A *právě tehdy, když*
$$\det(A - \lambda I_n) = 0,$$
2. $x \in \mathbb{C}^n$ *je příslušným vlastním vektorem právě tehdy, když*
$$o \neq x \in Ker(A - \lambda I_n).$$

Důkaz.

1. $$Ax = \lambda I_n x,\ \ x \neq o,$$
$$(A - \lambda I_n)x = o,\ \ x \neq o,$$
což je ekvivalentní singularitě matice $A - \lambda I_n$.
2. $(A - \lambda I_n)x = o$ právě když $x \in Ker(A - \lambda I_n)$. □

- Lineárně nezávislých vlastních vektorů k vl. číslu λ je
$$dim\ Ker(A - \lambda I_n) = n - rank(A - \lambda I_n)$$

Následující téma

1. Skalární součin
   - Skalární součin a norma
   - Ortonormální báze, Gramova–Schmidtova ortogonalizace
   - Ortogonální doplněk a projekce
   - Ortogonální doplněk a projekce v $\mathbb{R}^n$
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Ortogonální matice

2. Vlastní čísla
   - Vlastní čísla, vlastní vektory
   - Charakteristický polynom
   - Cayleyho–Hamiltonova věta
   - Diagonalizovatelnost
   - Jordanova normální forma
   - Symetrické matice
   - Teorie nezáporných matic
   - Výpočet vlastních čísel

Vlastní čísla trojúhelníkové matice

Tvrzení (Vlastní čísla trojúhelníkové matice)

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je trojúhelníková matice. Pak její vlastní čísla jsou prvky na diagonále.

Důkaz.
Hledáme λ takové, aby

$$0 = \det(A - \lambda I_n) = (a_{11} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda) \qquad \square$$

Příklady:

- Jednotková matice I_n má vlastní číslo 1, které je n-násobné.
  Protože $Ker(A - \lambda I_n) = Ker(0_n)$, množina příslušných vlastních vektorů je $\mathbb{R}^n \setminus \{o\}$.
- Nulová matice 0_n má vlastní číslo 0, které je n-násobné.
  Množina příslušných vlastních vektorů je $\mathbb{R}^n \setminus \{o\}$.

Poznámka:

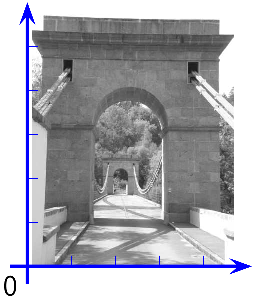
- Tvrzení by motivovalo Gaussovu eliminaci, ta ale nefunguje!

Lineární deformace obrázku

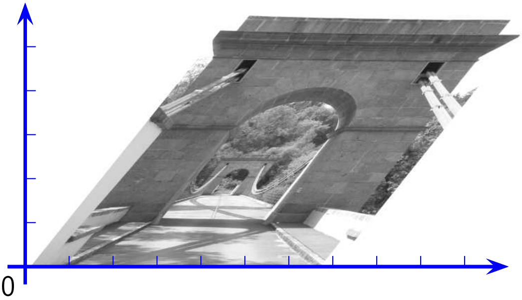
Mějme matici $A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.75 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vlastní čísla a vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 1.5,\ x_1 = (1,0)^T, \quad \lambda_2 = 1,\ x_2 = (-1.5,1)^T$$

Zobrazení $x \mapsto Ax$ představuje skosení a protáhnutí v ose x_1 o 50%.



původní obrázek



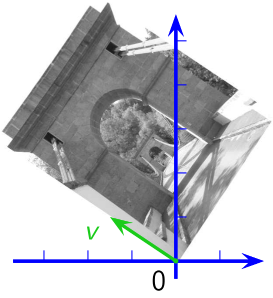
obrázek po transformaci

Lineární deformace obrázku

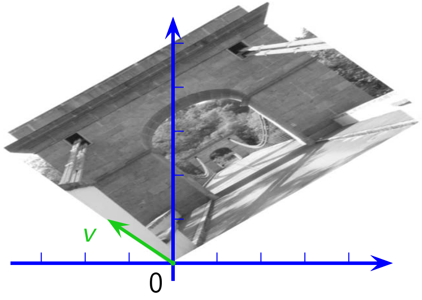
Mějme matici $A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.75 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vlastní čísla a vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 1.5,\ x_1 = (1,0)^T, \quad \lambda_2 = 1,\ x_2 = (-1.5,1)^T$$

Směr $x_2 = (-1.5, 1)^T$ je invariantní.



původní obrázek



obrázek po transformaci

□

Charakteristický polynom

Definice (Charakteristický polynom)

Charakteristický polynom matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ proměnné λ je

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Proč je to polynom?

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Charakteristický polynom se dá vyjádřit v základním tvaru

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

- $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn})$
- $\alpha_0 = \det(A)$ (po dosazení $\lambda = 0$).

Charakteristický polynom

Podle základní věty algebry má polynom n komplexních kořenů (včetně násobností), označme je $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pak
$$p_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_n).$$

Věta

Vlastní čísla matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jsou právě kořeny jejího charakteristického polynomu $p_A(\lambda)$, a je jich n včetně násobností.

- V praxi se vlastní čísla nepočítají jako kořeny charakteristického polynomu

Výpočet vlastních čísel pomocí charakteristického polynomu

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Kořeny polynomu, a tedy vlastními čísly matice A, jsou $\pm i$.

Algebraická a geometrická násobnost

Definice (Algebraická a geometrická násobnost vlastního čísla)

Buď $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

1. *Algebraická násobnost* λ je násobnost λ jakožto kořene $p_A(\lambda)$.
2. *Geometrická násobnost* λ je rovna $n - rank(A - \lambda I_n)$,
   tj. počtu lin. nezávislých vlastních vektorů, které odpovídají λ.

- Uvidíme: algebraická násobnost $\geq$ geometrická násobnost.
- Defaultně násobnost $=$ algebraická násobnost.

Příklad

- Matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní číslo 1.
  Algebraická i geometrická násobnost je 2.
- Matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní číslo 1.
  Algebraická násobnost je 2, geometrická násobnost je 1.

Součin a součet vlastních čísel

Stopa matice $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ je $\mathrm{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Tvrzení (Součin a součet vlastních čísel)

Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pak

1. $\det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n$,
2. $\mathrm{trace}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

Důkaz.

1. Víme, že $\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n)$.
   Dosazením $\lambda = 0$ dostáváme
   $$\det(A) = (-1)^n(-\lambda_1)\dots(-\lambda_n) = \lambda_1 \dots \lambda_n.$$
2. Určíme koeficient u λ^{n-1} char. polynomu dvěma způsoby.
   Rozvojem $\det(A - \lambda I_n)$ má hodnotu
   $$(-1)^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn}).$$
   Rozvojem $(-1)^n(\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n)$ má hodnotu
   $$(-1)^n(-\lambda_1 - \dots - \lambda_n).$$

$\square$

Operace s maticemi

Tvrzení

A je regulární právě tehdy, když 0 není její vlastní číslo.

Důkaz.

λ je vlastní číslo právě tehdy, když $0 = \det(A - \lambda I_n)$. $\square$

- Pro vlastní čísla součtu a součinu matic není žádný předpis.

Příklad

Uvažujme matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obě mají všechna vlastní čísla nulová. Součet matic

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla -1 a 1.

Operace s maticemi

Tvrzení (Vlastnosti vlastních čísel)

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$. Pak:

1. *je-li A regulární, pak A^{-1} má vlastní čísla $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,*

   Důkaz. Uprav

   $$\begin{aligned} Ax_i &= \lambda_i x_i \\ x_i &= \lambda_i A^{-1} x_i \\ A^{-1} x_i &= \lambda_i^{-1} x_i \end{aligned}$$

   □

2. *A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,*
3. *αA má vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory x_1, ..., x_n,*
4. *$A + \alpha I_n$ má vl. čísla $\lambda_1 + \alpha, \ldots, \lambda_n + \alpha$ a vektory $x_1, \ldots, x_n$,*
5. *A^T má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ale vlastní vektory obecně jiné.*

Vlastní čísla reálných matic

Tvrzení

Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pak i komplexně sdružené $\overline{\lambda}$ je vlastním číslem A.

Důkaz.

Víme, že λ je kořenem charakteristického polynomu

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0.$$

Komplexním sdružením obou stran rovnosti máme

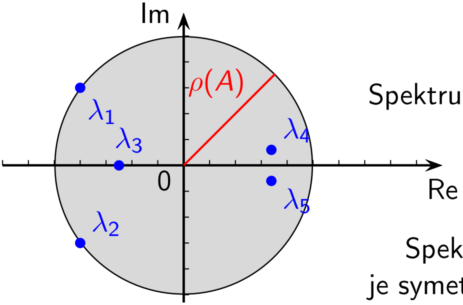
$$(-1)^n \overline{\lambda}^n + \alpha_{n-1}\overline{\lambda}^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \overline{\lambda} + \alpha_0 = 0. \qquad \square$$

Spektrum a spektrální poloměr

Definice (Spektrum a spektrální poloměr)

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pak

- *spektrum* matice A je množina vlastních čísel $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$
- *spektrální poloměr* je $\rho(A) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|$.



Spektrum a spektrální poloměr

Spektrum reálné matice
je symetrické podle reálné osy

- Komplexní matice mohou mít za spektrum jakýchkoli n komplexních čísel.

Matice společnice

Definice (Matice společnice)

Buď $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Pak *matice společnice* polynomu $p(x)$ je čtvercová matice řádu n definovaná

$$C(p) \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Věta (O matici společnici)

Platí $p_{C(p)}(\lambda) = (-1)^n p(\lambda)$.

Tedy vlastní čísla matice $C(p)$ *odpovídají kořenům polynomu* $p(\lambda)$.

Matice společnice

Důkaz. Charakteristický polynom:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$$

Po úpravách:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -p(\lambda) \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} - a_{n-1}\lambda - \lambda^2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$$

Laplaceovým rozvojem podle prvního řádku pak dostaneme

$$p_{C(p)}(\lambda) = (-1)^{n+1}(-p(\lambda)) \det(I_{n-1}) = (-1)^n p(\lambda). \qquad \square$$

Matice společnice

Důsledky:

- hledání kořenů reálných polynomů a vlastních čísel matic jsou na sebe navzájem převoditelné
- vlastní čísla obecně můžeme počítat pouze numericky, žádné vyjádření vzorcem neexistuje
- vlastní čísla se přes kořeny charakteristického polynomu v praxi nepočítají, opačný postup použitelný je

Následující téma

1. Skalární součin
   - Skalární součin a norma
   - Ortonormální báze, Gramova–Schmidtova ortogonalizace
   - Ortogonální doplněk a projekce
   - Ortogonální doplněk a projekce v $\mathbb{R}^n$
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Ortogonální matice
2. Vlastní čísla
   - Vlastní čísla, vlastní vektory
   - Charakteristický polynom
   - Cayleyho–Hamiltonova věta
   - Diagonalizovatelnost
   - Jordanova normální forma
   - Symetrické matice
   - Teorie nezáporných matic
   - Výpočet vlastních čísel

Cayleyho–Hamiltonova věta

Příklad (Polynomiální matice a maticový polynom)

Jsou to dva zápisy stejné matice s parametrem λ:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 - \lambda & 2\lambda - 3 \\ 7 & 5\lambda^2 - 4 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Věta (Cayleyho–Hamiltonova)

Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

Pak

$$(-1)^n A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = 0.$$

Cayleyho–Hamiltonova věta – důkaz (1/2)

Důkaz. Víme: $(A-\lambda I_n)\,\mathrm{adj}(A-\lambda I_n) = \det(A-\lambda I_n) I_n$.

Lze psát $\mathrm{adj}(A-\lambda I_n) = \lambda^{n-1}B_{n-1} + \ldots + \lambda B_1 + B_0$ pro určitá B_i.
Dosazením

$$(A-\lambda I_n)(\lambda^{n-1}B_{n-1} + \ldots + \lambda B_1 + B_0) =$$
$$= ((-1)^n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0) I_n.$$

Roznásobením

$$-B_{n-1}\lambda^n + (AB_{n-1} - B_{n-2})\lambda^{n-1} + \ldots + (AB_1 - B_0)\lambda + AB_0 =$$
$$= (-1)^n\lambda^n I_n + a_{n-1}\lambda^{n-1} I_n + \ldots + \alpha_1\lambda I_n + \alpha_0 I_n.$$

Porovnáním koeficientů

$$\begin{aligned} -B_{n-1} &= (-1)^n I_n, \\ AB_j - B_{j-1} &= \alpha_j I_n, \quad j = 1, \ldots, n-1, \\ AB_0 &= \alpha_0 I_n. \end{aligned}$$

Vynásobme první rovnici A^n, další A^j a poslední $A^0 = I_n$.

Cayleyho–Hamiltonova věta – důkaz (2/2)

Důkaz.
Porovnáním koeficientů

$$
\begin{aligned}
-B_{n-1} &= (-1)^n I_n, \\
AB_j - B_{j-1} &= \alpha_j I_n, \quad j = 1, \dots, n-1, \\
AB_0 &= \alpha_0 I_n.
\end{aligned}
$$

Vynásobme první rovnici A^n, další A^j a poslední $A^0 = I_n$.
Sečtením

$$
\begin{aligned}
&- A^n B_{n-1} + (A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2}) + \ldots + (A^2 B_1 - AB_0) + AB_0 = \\
&= 0 = (-1)^n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n.
\end{aligned}
$$

□

- Zkráceně: $p_A(A) = 0$

Cayleyho–Hamiltonova věta – důsledky (1/3)

Důsledek

Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$A^k \in span\{I_n, A, \dots, A^{n-1}\},$$

tedy A^k je lineární kombinací matic $I_n, A, \dots, A^{n-1}$.

Důkaz.

Stačí uvažovat $k \geq n$.
Vydělíme polynom λ^k polynomem $p_A(\lambda)$ se zbytkem

$$\lambda^k = r(\lambda)\, p_A(\lambda) + s(\lambda),$$

kde

- $r(\lambda)$ je polynom stupně $k - n$
- $s(\lambda) = b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0$ je zbytek.

Pak

$$A^k = r(A)\, p_A(A) + s(A) = s(A) = b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 I_n. \qquad \square$$

Cayleyho–Hamiltonova věta – důsledky (2/3)

Důsledek

Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Je-li A regulární, pak

$$A^{-1} \in span\{I_n, A, \ldots, A^{n-1}\}.$$

tedy A^{-1} je lineární kombinací matic $I_n, A, \ldots, A^{n-1}$.

Důkaz.

Víme $p_A(A) = (-1)^n A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = 0$.
Víme $\alpha_0 = \det(A) \neq 0$. Tedy

$$\begin{aligned} I &= -\frac{(-1)^n}{\alpha_0}A^n - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0}A^{n-1} - \ldots - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}A = \\ &= A\left(-\frac{(-1)^n}{\alpha_0}A^{n-1} - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0}A^{n-2} - \ldots - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}I_n\right). \end{aligned}$$

Tudíž vynásobením A^{-1} dostáváme

$$A^{-1} = -\frac{(-1)^n}{\alpha_0}A^{n-1} - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0}A^{n-2} - \ldots - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}I_n. \qquad \square$$

Cayleyho–Hamiltonova věta – důsledky (3/3)

Řešení soustavy $Ax = b$ s regulární maticí jde vyjádřit

$$A^{-1}b = -\frac{(-1)^n}{\alpha_0}A^{n-1}b - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0}A^{n-2}b - \ldots - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}b.$$

- Stačí počítat $b,\ Ab,\ A(Ab),\ A(A(Ab)),\ldots$
- Podobná myšlenka se používá pro řešení obřích soustav.

Následující téma

1. Skalární součin
   - Skalární součin a norma
   - Ortonormální báze, Gramova–Schmidtova ortogonalizace
   - Ortogonální doplněk a projekce
   - Ortogonální doplněk a projekce v $\mathbb{R}^n$
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Ortogonální matice
2. Vlastní čísla
   - Vlastní čísla, vlastní vektory
   - Charakteristický polynom
   - Cayleyho–Hamiltonova věta
   - Diagonalizovatelnost
   - Jordanova normální forma
   - Symetrické matice
   - Teorie nezáporných matic
   - Výpočet vlastních čísel

Podobnost

Paralela:

- Elementární řádkové úpravy a Gaussova eliminace na $Ax = b$

Definice (Podobnost)

Matice $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ jsou *podobné*, pokud existuje regulární $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tak, že $A = SBS^{-1}$.

- Ekvivalentně $AS = SB$.

Příklad

Matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jsou si podobné skrze matici $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = S^{-1}$.

Podobnost a vlastní čísla

Věta (Vlastní čísla podobných matic)

Podobné matice mají stejná vlastní čísla.

Důkaz.

Z podobnosti matic existuje regulární matice S taková, že

$$A = SBS^{-1}.$$

Pak

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) = \det(SBS^{-1} - \lambda S I_n S^{-1}) = \\ &= \det(S(B - \lambda I_n)S^{-1}) = \det(S)\det(B - \lambda I_n)\det(S^{-1}) = \\ &= \det(B - \lambda I_n) = p_B(\lambda). \end{aligned}$$

Obě matice mají stejné charakteristické polynomy, tedy i vlastní čísla. □

- A co vlastní vektory?

Podobnost a vlastní čísla

Tvrzení

Nechť $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *jsou podobné a* λ *je jejich vlastní číslo.*
Pak počet vlastních vektorů pro λ *je stejný u obou matic.*

Důkaz.

Buď $A = SBS^{-1}$.
Počet vlastních vektorů pro λ matice A, je

$$dim\ Ker(A - \lambda I_n) = n - rank(A - \lambda I_n).$$

Upravíme

$$\begin{aligned} rank(A - \lambda I_n) &= rank(SBS^{-1} - \lambda I_n) = rank(SBS^{-1} - \lambda SS^{-1}) = \\ &= rank(S(B - \lambda I_n)S^{-1}) = rank(B - \lambda I_n). \end{aligned}$$

Tudíž dimenze jádra obou matic $A - \lambda I_n$ a $B - \lambda I_n$ jsou stejné. $\square$

Diagonalizovatelnost

Definice (Diagonalizovatelnost)

Matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je *diagonalizovatelná*, pokud je podobná nějaké diagonální matici.

- Diagonalizovatelná matice A jde tedy vyjádřit ve tvaru
$$A = S\Lambda S^{-1},$$
kde S je regulární a Λ diagonální.
- Tomuto tvaru se říká *spektrální rozklad*.

Příklad

Ne každá matice je diagonalizovatelná, např.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Její vlastní číslo (dvojnásobné) je 0.
Pokud by A byla diagonalizovatelná, pak $A = S0S^{-1} = 0$, spor.

Diagonalizovatelnost

Věta (Charakterizace diagonalizovatelnosti)

Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je diagonalizovatelná právě tehdy, když má n lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Důkaz.

"$\Rightarrow$". Spektrální rozklad $A = S\Lambda S^{-1}$.
Přepiš na $AS = S\Lambda$ a porovnej j-té sloupce

$$AS_{*j} = (AS)_{*j} = (S\Lambda)_{*j} = S\Lambda_{*j} = S\Lambda_{jj}e_j = \Lambda_{jj}S_{*j},$$

což můžeme názorně zapsat jako

$$AS = A\begin{pmatrix} | & & | \\ S_{*1} & \dots & S_{*n} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ (\Lambda_{11}S_{*1}) & \dots & (\Lambda_{nn}S_{*n}) \\ | & & | \end{pmatrix} = S\Lambda.$$

Tedy Λ_{jj} je vlastní číslo a S_{*j} je příslušný vlastní vektor.

"$\Leftarrow$". Analogicky opačným směrem.
Sestav S z vlastních vektorů a Λ diagonální z vlastních čísel. $\square$

Diagonalizovatelnost

- Důkaz věty byl konstruktivní, $A = S\Lambda S^{-1}$.

Poznámka (Vlastnosti diagonalizovatelných matic)

- Algebraická a geometrická násobnost vlastních čísel je stejná.
  Důkaz. Ze spektrálního rozkladu $A = S\Lambda S^{-1}$.
  Ke každému výskytu vlastního čísla přísluší jiný vlastní vektor.
- Hodnost matice A je rovna počtu nenulových vlastních čísel A.
  Důkaz. $rank(A) = rank(S\Lambda S^{-1}) = rank(\Lambda)$,
  což udává počet nenulových vlastních čísel.

Matice $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ není diagonalizovatelná, vlastnosti shora neplatí.

Poznámka (Spektrální rozklad transponované matice)

Je-li $A = S\Lambda S^{-1}$ spektrální rozklad matice A, pak

$$A^T = S^{-T}\Lambda S^T.$$

Diagonalizovatelnost – geometrická interpretace

- Víme:
  vlastní vektor = invariantní směr zobrazení $f : x \mapsto Ax$
  vlastní číslo = škálování v tomto směru
- Nechť $A = {}_B[f]_B$ představuje matici lineárního zobrazení $f \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ vzhledem k bázi B.
- Buď $S = {}_{B'}[id]_B$ matice přechodu od B k jiné bázi B'. Pak
$$SAS^{-1} = {}_{B'}[id]_B \cdot {}_B[f]_B \cdot {}_B[id]_{B'} = {}_{B'}[f]_{B'}$$
- Diagonalizace = hledání vhodné báze B', aby příslušná matice byla diagonální.
- Podobnost znamená změnu báze, nemění zobrazení f, takže vlastní čísla musí zůstat stejná.

Diagonalizovatelnost – příklad

Buď

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

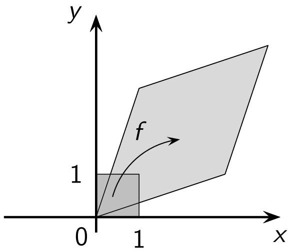
Vlastní čísla a vlastní vektory matice A jsou:

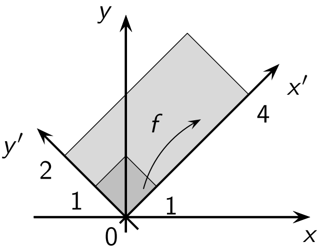
$$\lambda_1 = 4,\ x_1 = (1,1)^T, \quad \lambda_2 = 2,\ x_2 = (-1,1)^T.$$

Diagonalizace má tvar:

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Geometrická interpretace:





Diagonalizovatelnost

Tvrzení (Vlastní vektory různých vlastních čísel)

Buďte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ navzájem různá vlastní čísla matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak odpovídající vlastní vektory $x_1, \dots, x_k$ jsou lineárně nezávislé.

Důkaz.

Matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ zřejmé. Uvaž

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = o.$$

Pak přenásobením maticí A dostaneme

$$\alpha_1 A x_1 + \ldots + \alpha_k A x_k = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k x_k = o.$$

Odečtením λ_k-násobku horní rovnice od dolní:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = o.$$

Z induk. předpokladu $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$. Dopočti $\alpha_k = 0$. □

Důsledek

Pokud matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ má n navzájem různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelná.

Diagonalizovatelnost – aplikace

Příklad (Mocnina matice)

Buď $A = S\Lambda S^{-1}$ spektrální rozklad matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak

- $A^2 = S\Lambda S^{-1} S\Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1}$.
- Obecněji:

$$A^k = S\Lambda^k S^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} S^{-1}.$$

- Asymptotické chování:

$$\lim_{k\to\infty} A^k = S \begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_n^k \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{cases} 0, & \rho(A) < 1, \\ \text{diverguje}, & \rho(A) > 1, \\ \text{konverguje/div.}, & \rho(A) = 1. \end{cases}$$

  Případ $\rho(A) = 1$: uvaž $A = I_n$ resp. $A = -I_n$.

- Nahlédni geometricky.
- Využití: diskrétní dynamické systémy $x \mapsto Ax$.

Následující téma

1. Skalární součin
   - Skalární součin a norma
   - Ortonormální báze, Gramova–Schmidtova ortogonalizace
   - Ortogonální doplněk a projekce
   - Ortogonální doplněk a projekce v $\mathbb{R}^n$
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Ortogonální matice
2. Vlastní čísla
   - Vlastní čísla, vlastní vektory
   - Charakteristický polynom
   - Cayleyho–Hamiltonova věta
   - Diagonalizovatelnost
   - Jordanova normální forma
   - Symetrické matice
   - Teorie nezáporných matic
   - Výpočet vlastních čísel

Jordanova normální forma

- Motivace: nejjednodušší tvar dosažitelný podobností

Definice (Jordanova buňka)

Buď $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. *Jordanova buňka* $J_k(\lambda)$ je čtvercová matice řádu k definovaná

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- Jordanova buňka má vlastní číslo λ, které je k-násobné
- přísluší mu pouze jeden vlastní vektor $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$

Jordanova normální forma

Definice (Jordanova normální forma)

Matice $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je v *Jordanově normální formě*, pokud je v blokově diagonálním tvaru

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{k_m}(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

a na diagonále jsou Jordanovy buňky $J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_m}(\lambda_m)$.

- Hodnoty λ_i a k_i nemusí být navzájem různé. Jordanova buňka se může vyskytovat vícekrát.
- Pokud Jordanovy buňky mají velikost 1, matice je diagonální.

Jordanova normální forma

Příklad

Uvažujme dvě matice v Jordanově normální formě

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

- Obě matice mají vlastní čísla:

  5 (dvojnásobné) a 7 (trojnásobné)

- Matice A: pro 5 dva vlastní vektory, pro 7 jeden
- Matice A: pro 5 jeden vlastní vektor, pro 7 dva

Jordanova normální forma

Věta (O Jordanově normální formě)

Každá matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je podobná matici v Jordanově normální formě. Tato matice je až na pořadí buněk určena jednoznačně.

Důsledek

1. *Počet všech Jordanových buněk odpovídajících λ je roven počtu vlastních vektorů pro λ.*
2. *Násobnost vlastního čísla je větší nebo rovna počtu vlastních vektorů, které mu přísluší.*

Poznámka (Velikosti a počet buněk)

Počet buněk $J_k(\lambda)$ matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ve výsledné Jordanově normální formě je roven

$$rank\left(\tilde{A}^{k-1}\right) - 2\, rank\left(\tilde{A}^{k}\right) + rank\left(\tilde{A}^{k+1}\right),$$

kde $\tilde{A} = A - \lambda I_n$.

Jordanova normální forma

Myšlenky z důkazu či konstrukce.

- Pokud $A = J_k(\lambda)$, pak

$$\tilde{A} = A - \lambda I_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Jak vypadá $\tilde{A}^2, \tilde{A}^3, \dots$?
- Tedy

$$rank(\tilde{A}) = k-1, \quad rank(\tilde{A}^2) = k-2,$$
$$rank(\tilde{A}^3) = k-3, \dots, rank(\tilde{A}^k) = 0.$$

- Pokud vím, že $A = J_k(\lambda)$, ale neznám k, určím ho z hodnosti.
- Pokud vím, že A je v JNF, znám vlastní čísla, ale neznám jednotlivé buňky, mohu je určit z hodností.

Jordanova normální forma

Příklad

Buď $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ a nechť

- $rank(A - 8I_5) = 3$

  Co to říká o Jordanových buňkách pro vlastní číslo 8?

  $\rightarrow$ Jsou dvě.

- $rank(A - 8I_5)^2 = rank(A - 8I_5)^3 = 2$

  Co to říká o Jordanových buňkách a jejich velikostech?

  $\rightarrow$ Jedna velikosti 1 a jedna velikosti 2.

Jordanova normální forma

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla 5 (dvojnásobné) a 7 (trojnásobné).

- Víme $3 = rank(A - 5I_5) = rank(A - 5I_5)^2$
- $rank(A - 7I_5) = 3$ a $rank(A - 7I_5)^2 = rank(A - 7I_5)^3 = 2$.

$$J = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \boxed{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \end{pmatrix}$$

Jordanova normální forma

Příklad (Mocnina matice)

Buď $A = SJS^{-1}$ Jordanův normální forma matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak

- $A^k = SJ^kS^{-1}$.
- J je blokově diagonální, stačí mocnit Jordanovy buňky
- Asymptotické chování jako pro diagonalizovatelné matice:

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \begin{cases} 0, & \rho(A) < 1, \\ \text{diverguje}, & \rho(A) > 1, \\ \text{konverguje/div.}, & \rho(A) = 1. \end{cases}$$

Soustava lineárních diferenciálních rovnic

Soustava lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

$$u(t)' = Au(t),$$

kde $u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ je neznámá funkce a $u(t_0) = u_0$ počáteční stav.

- Pro případ $n = 1$ je řešením $u(t)' = au(t)$ funkce
$$u(t) = v \cdot e^{at}, \quad \text{kde } v \in \mathbb{R}.$$
- Hledáme řešení tvaru $u(t) = e^{\lambda t} v$ s neznámými $\lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$.
- Dosazením:
$$\lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} Av, \quad \text{neboli} \quad \lambda v = Av.$$
- Vede na výpočet vlastních čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a vektorů $x_1, \dots, x_n$.
- Řešení je
$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} x_i,$$
kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (získá se z počátečních podmínek).
- Pokud A není diagonalizovatelná, vyjádření složitější.

Soustava lineárních diferenciálních rovnic

Příklad

$$
\begin{aligned}
u_1' &= 7u_1 - 4u_2 \\
u_2' &= 5u_1 - 2u_2
\end{aligned}
$$

Matice $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ má vlastní čísla:

- 2, vlastní vektor $(4, 5)^T$,
- 3, vlastní vektor $(1, 1)^T$.

Řešení úlohy jsou tvaru

$$
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = a \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + b \cdot e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.
$$

Následující téma

1. Skalární součin
   - Skalární součin a norma
   - Ortonormální báze, Gramova–Schmidtova ortogonalizace
   - Ortogonální doplněk a projekce
   - Ortogonální doplněk a projekce v $\mathbb{R}^n$
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Ortogonální matice
2. Vlastní čísla
   - Vlastní čísla, vlastní vektory
   - Charakteristický polynom
   - Cayleyho–Hamiltonova věta
   - Diagonalizovatelnost
   - Jordanova normální forma
   - Symetrické matice
   - Teorie nezáporných matic
   - Výpočet vlastních čísel

Symetrické matice

Definice (Hermitovská matice a transpozice)

Hermitovská transpozice matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je matice $A^* := \overline{A}^T$.

Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se nazývá *hermitovská*, pokud $A^* = A$.

Hermitovská transpozice má podobné vlastnosti jako klasická:

- $(A^*)^* = A$, $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$,...

Důsledky:

- Unitární matice: $Q^*Q = I_n$.
- norma indukovaná std. skalárním součinem v $\mathbb{C}^n$: $\|x\| = \sqrt{x^*x}$.

Příklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 5 \end{pmatrix}$$

První symetrická, ale ne hermitovská. Druhá naopak.

Symetrické matice – vlastní čísla

Věta (Vlastní čísla symetrických matic)

Vlastní čísla reálných symetrických matic jsou reálná.
(či obecněji pro komplexní hermitovské matice)

Důkaz.

Buď $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitovská, $\lambda \in \mathbb{C}$ její vlastní číslo a $x \in \mathbb{C}^n$ příslušný vlastní vektor jednotkové velikosti, tj. $\|x\|_2 = \sqrt{x^* x} = 1$.

Přenásobením rovnice $Ax = \lambda x$ vektorem x^* máme

$$x^* A x = \lambda x^* x = \lambda.$$

Nyní

$$\lambda = x^* A x = x^* A^* x = (x^* A x)^* = \lambda^*.$$

Tedy $\lambda = \lambda^*$, a proto musí být λ reálné. □

- Komplexní symetrické matice mohou mít ryze komplexní vlastní čísla (uvaž diagonální matici).

Symetrické matice – příklad

Příklad (Vlastní čísla matice projekce)

Buď $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matice projekce do podprostoru U dimenze d.

Jaká má vlastní čísla a vlastní vektory?

- Pro každý vektor $x \in U$ platí $Px = x$.

  Tedy 1 je vlastním číslem,
  odpovídá mu d vlastních vektorů z báze prostoru U.

- Pro každý vektor $x \in U^\perp$ platí $Px = o$.

  Tedy 0 je vlastním číslem,
  odpovídá mu $n - d$ vlastních vektorů z báze prostoru $U^\perp$

Symetrické matice – spektrální rozklad

Věta (Spektrální rozklad symetrické matice)

Pro každou symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existuje ortogonální $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a diagonální $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takové, že

$$A = Q\Lambda Q^T.$$

Důkaz (začátek).

Mat. indukcí podle n. Případ $n = 1$ je triviální: $\Lambda = A$, $Q = 1$.

Buď λ vlastní číslo a x odpovídající vlastní vektor, $\|x\|_2 = 1$.

- Doplňme x na ortogonální matici $S \coloneqq (x \mid \cdots)$.
- Protože $(A - \lambda I_n)x = o$, máme $(A - \lambda I_n)S = (o \mid \cdots)$.
- Tudíž $S^T(A - \lambda I_n)S = S^T(o \mid \cdots) = (o \mid \cdots)$.
- A jelikož je tato matice symetrická, máme

  $$S^T(A - \lambda I_n)S = \begin{pmatrix} 0 & o^T \\ o & A' \end{pmatrix},$$

  kde A' je nějaká symetrická matice řádu $n - 1$.

Symetrické matice – spektrální rozklad

Důkaz (pokr.)

- A jelikož je tato matice symetrická, máme
$$S^T(A - \lambda I_n)S = \begin{pmatrix} 0 & o^T \\ o & A' \end{pmatrix},$$
kde A' je nějaká symetrická matice řádu $n-1$.
- Podle indukčního předpokladu má spektrální rozklad $A' = Q'\Lambda' Q'^T$, kde Λ' je diagonální a Q' ortogonální.
- Matice a rovnost rozšíříme o jeden řád takto:
$$\begin{pmatrix} 0 & o^T \\ o & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & o^T \\ o & \Lambda' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q'^T \end{pmatrix} = R\Lambda'' R^T.$$
- Nyní můžeme psát
$$S^T(A - \lambda I_n)S \quad = \quad R\Lambda'' R^T,$$
z čehož
$$A = SR\Lambda'' R^T S^T + \lambda I_n = SR(\Lambda'' + \lambda I_n)R^T S^T. \qquad \square$$

Symetrické matice – spektrální rozklad

Příklad (Spektrální rozklad symetrické matice)

Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Vlastní čísla matice A jsou $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 3$.
- Vl. vektory: $v_1 = (1, -1, 0)^T$, $v_2 = (0, 1, -1)^T$, $v_3 = (1, 1, 1)^T$.
- Spektrální rozklad matice A je

$$A = S\Lambda S^{-1}, \quad \text{kde} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- NE, matice S není ortogonální! Lépe:

$$A = Q\Lambda Q^T, \quad \text{kde} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

Symetrické matice – jiná forma spektrálního rozkladu

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická a $A = Q\Lambda Q^T$ spektrální rozklad.

- Označ $\lambda_i = \Lambda_{ii}$ a $x_i = Q_{*i}$ vlastní vektory.
- $$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i e_i^T,$$
- Pak matici A lze vyjádřit jako
$$A = Q\Lambda Q^T = Q \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i e_i^T \right) Q^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q e_i e_i^T Q^T =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_{*i} Q_{*i}^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i x_i^T.$$

Symetrické matice – jiná forma spektrálního rozkladu

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická a $A = Q \Lambda Q^T$ spektrální rozklad.

- Označ $\lambda_i = \Lambda_{ii}$ a $x_i = Q_{*i}$ vlastní vektory.
- Alternativní tvar spektrálního rozkladu: $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i x_i^T$
- A rozepisujeme na součet n matic hodnosti 0 nebo 1.
- Navíc, $x_i x_i^T$ je matice projekce na přímku $span\{x_i\}$
- zobrazení $x \mapsto Ax$ je tvaru součtu n zobrazení,
  každé z nich je projekcí na přímku (kolmou na ostatní) a
  škálování dle λ_i.

Následující téma

1. Skalární součin
   - Skalární součin a norma
   - Ortonormální báze, Gramova–Schmidtova ortogonalizace
   - Ortogonální doplněk a projekce
   - Ortogonální doplněk a projekce v $\mathbb{R}^n$
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Ortogonální matice
2. Vlastní čísla
   - Vlastní čísla, vlastní vektory
   - Charakteristický polynom
   - Cayleyho–Hamiltonova věta
   - Diagonalizovatelnost
   - Jordanova normální forma
   - Symetrické matice
   - Teorie nezáporných matic
   - Výpočet vlastních čísel

Teorie nezáporných matic

Věta (Perronova)

1. *Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nezáporná matice. Pak v absolutní hodnotě největší vlastní číslo je reálné nezáporné a příslušný vlastní vektor je nezáporný (ve všech složkách).*
2. *Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kladná matice. Pak v absolutní hodnotě největší vlastní číslo je reálné kladné, je jediné (ostatní mají menší absolutní hodnotu), má násobnost 1, a příslušný vlastní vektor je kladný (ve všech složkách). Navíc žádnému jinému vlastnímu číslu neodpovídá nezáporný vlastní vektor.*

Příklad

- Matice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ je kladná.
  Největší vlastní číslo je 5, vlastní vektor $(1, 2)^T$.
- matice I_2 má největší vlastní číslo vícenásobné
- matici $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ přísluší mj. vlastní vektor $(0, 1)^T$, který je nezáporný, ale neodpovídá největšímu vlastnímu číslu.

Markovovy řetězce

- Systém se skádá ze stavů $1, 2, \ldots, n$.
  Jejich hodnota v čase i je reprezentována vektorem $x_i \in \mathbb{R}^n$.
- Stav systému v čase $i + 1$ získáme jako $x_{i+1} = Ax_i$
  Matice A je přechodová matice:
  a_{ij} =pravděpodobnost přechodu ze stavu j do stavu i.
  Logicky předpokládáme $A^T e = e$
  (z každého stavu musím někam přejít)
- Markovova vlastnost: x_{i+1} závisí pouze na předchozím stavu
- Počáteční stav x_0.
  Zajímá nás $\lim_{k\to\infty} A^k x_0$
- Pro analýzu použijeme:
  $A \geq 0$, A^k souvisí s vlastními čísly, $\rho(A) = 1$, ...

Markovovy řetězce – příklad

Migrace obyvatel USA město–předměstí–venkov:

z města:	96% zůstane, 3% do předměstí, 1% na venkov
z předměstí:	1% do města, 98% zůstane, 1% na venkov
z venkova:	1.5% do města, 0.5% do předměstí, 98% zůstane

Počáteční stav: 58 mil. město, 142 mil. předměstí, 60 mil. venkov.

Jak se bude vyvíjet v čase?

$$A := \begin{pmatrix} 0.96 & 0.01 & 0.015 \\ 0.03 & 0.98 & 0.005 \\ 0.01 & 0.01 & 0.98 \end{pmatrix}, \quad x_0 = (58, 142, 60)^T.$$

Vývoj v čase: Ax_0, A^2x_0, A^3x_0, $\ldots$,$A^\infty x_0$.

$$A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 \\ 0 & 0 & 0.97 \end{pmatrix} Q^{-1} \;\Rightarrow\; A^\infty = Q_{*1}(Q^{-1})_{1*} = \begin{pmatrix} 0.23 & 0.23 & 0.23 \\ 0.43 & 0.43 & 0.43 \\ 0.33 & 0.33 & 0.33 \end{pmatrix}.$$

Tedy 23% ve městě, 43% předměstí, 33% venkov. Na x_0 nezáleží

Následující téma

1. Skalární součin
   - Skalární součin a norma
   - Ortonormální báze, Gramova–Schmidtova ortogonalizace
   - Ortogonální doplněk a projekce
   - Ortogonální doplněk a projekce v $\mathbb{R}^n$
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Ortogonální matice
2. Vlastní čísla
   - Vlastní čísla, vlastní vektory
   - Charakteristický polynom
   - Cayleyho–Hamiltonova věta
   - Diagonalizovatelnost
   - Jordanova normální forma
   - Symetrické matice
   - Teorie nezáporných matic
   - Výpočet vlastních čísel

Výpočet vlastních čísel, Gerschgorinovy disky

- Žádný konečný algoritmus, jen numericky (iterační metody).

Věta (Gerschgorinovy disky, 1931)

Každé vlastní číslo λ matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ leží v kruhu o středu a_{ii} a poloměru $\sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, n\}$.

Důkaz.

Buď λ vlastní číslo a x vlastní vektor, tedy $Ax = \lambda x$.

Nechť i-tá složka x je největší, tj. $|x_i| = \max_{k=1,\dots,n} |x_k|$.

i-tá rovnice má tvar $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i$ vydělením $x_i \neq 0$ dostáváme

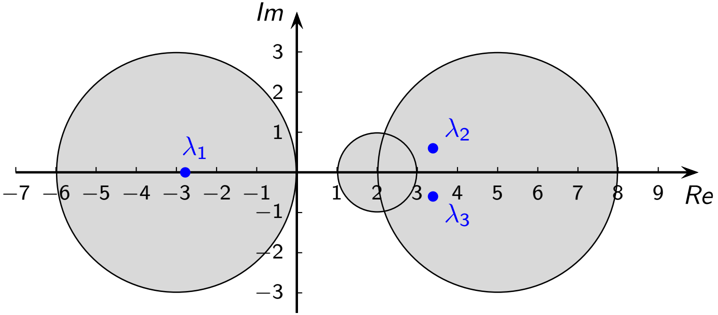
$$\lambda = a_{ii} + \sum_{j\neq i} a_{ij}\frac{x_j}{x_i},$$

a tím pádem

$$|\lambda - a_{ii}| = \left|\sum_{j\neq i} a_{ij}\frac{x_j}{x_i}\right| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\frac{|x_j|}{|x_i|} \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|. \qquad \square$$

Gerschgorinovy disky – příklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{vlastní čísla: } -2.78,\ 3.39 \pm 0.6\, i$$



- V každé komponentě souvislosti je tolik vlastních čísel, z kolika kruhů daná komponenta vznikla.

Gerschgorinovy disky – 3 použití

1) *Kriterium pro zastavení výpočtu iteračních metod.*

   Některé metody postupně zmenšují nediagonální prvky, matice konverguje k diagonální.

   Například matice

$$A = \begin{pmatrix} 7{,}0001 & 0{,}0001 & -0{,}0002 \\ 0{,}0001 & 5{,}0000 & 0{,}0003 \\ -0{,}0002 & 0{,}0003 & 1{,}9990 \end{pmatrix}$$

   má vlastní čísla $7{,}0001 \pm 0{,}0003$, $5 \pm 0{,}0004$ a $1{,}999 \pm 0{,}0005$.

2) *Diagonálně dominantní matice.*

   Matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je regulární, pokud $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \ \forall i$.

3) *Markovovy matice.*

   Buď A Markovova matice ($A \geq 0$, $A^T e = e$).

   Pak 1 je vlastním čísel a je největší (Gerschgorinovy disky se zleva dotýkají bodu 1).

Mocninná metoda

- Jednoduchá metoda, ale v řadě situaci se používá (či variace).

Algoritmus (Mocninná metoda, von Mises, 1929)

Vstup: matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

1: Zvol $o \neq x_0 \in \mathbb{C}^n$, $i := 1$,

2: **while not** splněna ukončovací podmínka **do**

3: $\quad y_i := Ax_{i-1}$,

4: $\quad x_i := \frac{1}{\|y_i\|_2} y_i$,

5: $\quad i := i + 1$,

6: **end while**

Výstup: $v := x_i$ je odhad vlastního vektoru,
$\lambda := x_{i-1}^T y_i$ je odhad vlastního čísla.

- Může být pomalá, počítá jen dominantní vlastní číslo.
- Je robustní (za zaokrouhlení) a použitelná pro velké řády.

Mocninná metoda – příklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = (1, 0, 1)^T.$$

Výpočet:

i	$\frac{1}{\|x_i\|_\infty} x_i$	$x_{i-1}^T y_i$
0	$(1.00, 0.00, 1.00)^T$	–
1	$(0.67, 1.00, 0.17)^T$	5
2	$(1.00, 0.88, 0.56)^T$	6.32
3	$(0.97, 1.00, 0.47)^T$	6.94
4	$(1.00, 1.00, 0.50)^T$	7

```
A=[2 4 2; 4 2 2;
   2 2 -1];
x=[1;0;1];
for i=1:4
  y=A*x;
  (y'*x),
  x=y/norm(y);
  x/max(abs(x)),
end
```

Mocninná metoda – konvergence

Tvrzení (Konvergence mocninné metody)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s vlastními čísly $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$ a lineárně nezávislými vlastními vektory $v_1, \ldots, v_n$ velikosti 1.
Nechť x_0 má nenulovou souřadnici ve směru v_1.
Pak x_i konverguje k vektoru v_1 a $x_{i-1}^T y_i$ konverguje k λ_1.

Důkaz.

Vektory $v_1, \ldots, v_n$ tvoří bázi $\mathbb{R}^n$, tedy $x_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$, kde $\alpha_1 \neq 0$.
Pak $x_i = \frac{1}{\|A^i x_0\|} A^i x_0$ a lze psát

$$A^i x_0 = A^i \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j A^i v_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^i v_j = \lambda_1^i \left(\alpha_1 v_1 + \sum_{j \neq 1} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^i v_j \right).$$

Vektory x_i postupně normujeme, takže na násobku λ_1^i nezáleží.
Protože $\left| \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right| < 1$, je $\left| \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right|^i \to 0$ pro $i \to \infty$. Tudíž $x_i \to_{i \to \infty} v_1$.
Pokud $x_i \approx v_1$, tak

$$x_{i-1}^T y_i = x_{i-1}^T A x_{i-1} = x_{i-1}^T \lambda_1 x_{i-1} = \lambda_1 \|x_{i-1}\|_2^2 = \lambda_1. \qquad \square$$

Deflace vlastního čísla

- Mocninná metoda počítá jen dominantní vlastní číslo a vektor.
- Následující transformací ho vynulujeme.
- Takže pak můžeme vypočítat ostatní vlastní čísla rekurzivně.

Tvrzení (O deflaci vlastního čísla symetrické matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ její vlastní čísla a $v_1, \ldots, v_n$ odpovídající ortonormální vlastní vektory.
Pak matice $A - \lambda_1 v_1 v_1^T$ má vlastní čísla $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ a vlastní vektory $v_1, \ldots, v_n$.

Důkaz.

Spektrální rozklad (ten alternativní): $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^T$.
Pak $A - \lambda_1 v_1 v_1^T = 0 v_1 v_1^T + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i v_i^T$.
To je spektrální rozklad matice $A - \lambda_1 v_1 v_1^T$. □

- Umí se i pro nesymetrické matice

Vyhledávač Google™ a PageRank

PageRank (Sergey Brin a Larry Page, 2001):

$$
\begin{aligned}
&N \text{ webových stránek}\\
&a_{ij} = \begin{cases} 1 & j\text{-tá stránka odkazuje na } i\text{-tou} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}\\
&b_j = \text{počet odkazů z } j\text{-té stránky}\\
&x_i = \text{důležitost } i\text{-té stránky}
\end{aligned}
$$

- Řešíme $x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{b_j} x_j,\ i = 1, \ldots, N$.
- Maticově $A'x = x$, kde $a'_{ij} := \frac{a_{ij}}{b_j}$. Tedy x je vlastní vektor k 1.
- Příklady Page ranku:

`www.google.com`	10
`www.cuni.cz`	8
`www.mff.cuni.cz`	7
`kam.mff.cuni.cz`	6
`kam.mff.cuni.cz/~hladik`	4

- Prakticky: $n \approx 10^{10}$, řídká matice, ca 100 iterací, úprava A'.