Slajdy k přednášce Lineární algebra 2

Milan Hladík

Katedra Aplikované Matematiky,
Matematicko-fyzikální fakulta,
Univerzita Karlova v Praze,
https://kam.mff.cuni.cz/~hladik

20. května 2025

Obsah

Následující téma

1. Skalární součin
   - Skalární součin a norma
   - Ortonormální báze, Gramova–Schmidtova ortogonalizace
   - Ortogonální doplněk a projekce
   - Ortogonální doplněk a projekce v $\mathbb{R}^n$
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Ortogonální matice
2. Determinanty
3. Vlastní čísla
4. Positivně (semi-)definitní matice
5. Kvadratické formy
6. Maticové rozklady

Reálný skalární součin – motivace

Standardní skalární součin vektorů $x, y \in \mathbb{R}^n$ je definován jako

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

- Geometricky vyjadřuje skalární součin vztah

$$x^T y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\varphi),$$

  kde φ je úhel mezi vektory x, y.

- Speciálně, x, y jsou kolmé právě tehdy, když $x^T y = 0$.

Reálný skalární součin – motivace

Standardní skalární součin vektorů $x, y \in \mathbb{R}^n$ je definován jako

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Vlastnosti:

- Platí $x^T x = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$.

  Rovnost jen pro $x = o$.

  Velikost vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ je $\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.
- Symetrie: $x^T y = y^T x$.
- Lineární funkcí v první i druhé složce, ale ne v obou zároveň. Pro každé $x, x', y \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$(x + x')^T y = x^T y + x'^T y,$$
$$(\alpha x)^T y = \alpha(x^T y).$$

  Ale obecně neplatí například

$$(x + x')^T (y + y') = x^T y + x'^T y'.$$

Reálný skalární součin

Definice (Skalární součin nad $\mathbb{R}$)

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Pak *skalární součin* je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V^2 \to \mathbb{R}$, splňující pro všechna $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ a rovnost nastane pouze pro $x = 0$,
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
4. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Poznámky a důsledky:

- Proč těleso $\mathbb{R}$?
- Linearita i ve druhé složce
- $\langle o, x \rangle = \langle x, o \rangle = 0$

Komplexní skalární součin

komplexně sdružené číslo k číslu $a + bi \in \mathbb{C}$ je $\overline{a + bi} = a - bi$.

Definice (Skalární součin nad $\mathbb{C}$)

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Pak *skalární součin* je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V^2 \to \mathbb{C}$, splňující pro všechna $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{C}$:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ a rovnost nastane pouze pro $x = 0$,
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
4. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Poznámky a důsledky:

- Proč je $\langle x, x \rangle$ reálné?
- Linearita i ve druhé složce?

Skalární součin – příklady

Příklady standardních skalárních součinů

- V prostoru $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y\rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
- V prostoru $\mathbb{C}^n$: $\langle x, y\rangle = x^T \overline{y} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$.

  Zobrazení $\langle x, y\rangle = x^T y$ není skalární součin, například pro $x = (i, i)^T$ by bylo $\langle x, x\rangle = x^T x = -2$.
- V prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$: standardní skalární součin
$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} = \operatorname{trace}(AB^T).$$
- V $\mathcal{C}_{[a,b]}$, prostoru spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$: standardní skalární součin $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ a součin matic A, B

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = A_{i*} B_{*j} = \langle A_{i*}, B_{*j}\rangle.$$

Skalární součin – jednoznačnost obrazů báze

Buď $B = \{z_1, \ldots, z_n\}$ báze prostoru V nad $\mathbb{R}$ a uvažujme libovolné dva vektory $x, y \in V$. Ty mají vyjádření

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j z_j$$

pro určité $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Pak

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j z_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \langle z_i, z_j \rangle.$$

Tudíž skalární součin je jednoznačně určený hodnotami součinů všech dvojic bázických vektorů $\langle z_i, z_j \rangle$ pro $i, j = 1, \ldots, n$.

- Narozdíl od lineárního zobrazení nemůžeme hodnoty $\langle z_i, z_j \rangle$ nastavit libovolně.

Nadále uvažujeme vektorový prostor V nad $\mathbb{R}$ nebo nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem.

Norma a kolmost

Definice (Norma indukovaná skalárním součinem)

Norma indukovaná skalárním součinem je definovaná

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}, \text{ kde } x \in V.$$

Pro standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$: eukleidovská norma

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Definice (Kolmost)

Vektory $x, y \in V$ jsou *kolmé*, pokud $\langle x, y\rangle = 0$. Značení: $x \perp y$.

Příklady kolmých vektorů pro standardní skalární součiny

- $(1, 2, 3)^T \perp (1, 1, -1)^T$,
- i-tý řádek regulární matice A a j-tý sloupec A^{-1}, kde $i \neq j$,
- V prostoru $\mathcal{C}_{[-\pi,\pi]}$: $\sin x \perp \cos x \perp 1$.

Pythagorova věta

Věta (Pythagorova)

Pokud $x, y \in V$ jsou kolmé, pak

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Důkaz.

Odvodíme

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \underbrace{\langle x, y\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y, x\rangle}_{=0} + \langle y, y\rangle =$$

$$= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

□

- Nad $\mathbb{R}$ platí i opačná implikace (rovnost $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ implikuje kolmost $x \perp y$)
- Nad $\mathbb{C}$ opačná implikace obecně neplatí.

Cauchyho–Schwarzova nerovnost

Motivace: Standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ splňuje

$$x^T y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\varphi),$$

z čehož

$$|x^T y| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Věta (Cauchyho–Schwarzova nerovnost)

Pro každé $x, y \in V$ platí

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Cauchyho–Schwarzova nerovnost

Věta (Cauchyho–Schwarzova nerovnost)

Pro každé $x, y \in V$ platí

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Důkaz (Reálná verze).

Pro $y = o$ platí, tak předpokládejme $y \neq o$. Uvažujme funkci

$$f(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle \geq 0.$$

Pak

$$f(t) = \langle x, x\rangle + t\langle x, y\rangle + t\langle y, x\rangle + t^2\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle.$$

Jedná se o kvadratickou funkci, která je všude nezáporná, nemůže mít tedy dva různé kořeny. Proto je příslušný diskriminant nekladný:

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0.$$

Odtud $\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$, odmocněním $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. $\square$

Cauchyho–Schwarzova nerovnost

Věta (Cauchyho–Schwarzova nerovnost)

Pro každé $x, y \in V$ platí

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Poznámky

- Ekvivalentní podoba (proč je tam absolutní hodnota?)

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

- Pro standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$:

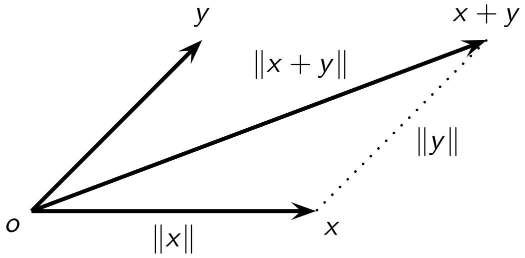
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

- Dosaď $x = (a, b, c)^T$, $y = (b, c, a)^T$:

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

- Užitečná nerovnost pro různá odvození, např. v následujícím.

Trojúhelníková nerovnost



Důsledek (Trojúhelníková nerovnost)

Pro každé $x, y \in V$ *platí*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Trojúhelníková nerovnost

Důsledek (Trojúhelníková nerovnost)

Pro každé $x, y \in V$ platí

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Důkaz.

Nejprve připomeňme, že pro každé komplexní číslo $z = a + bi$ platí: $z + \overline{z} = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$, a dále $a \leq |z|$. Nyní můžeme odvodit:

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) \\
&\leq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\,|\langle x, y\rangle| \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\| \cdot \|y\| \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2,
\end{aligned}$$

Tedy máme $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$. □

Intermezzo – norma obecně

Definice

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Pak *norma* je zobrazení $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$, splňující:

1. $\|x\| \geq 0$ pro všechna $x \in V$, a rovnost pouze pro $x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in V$, a pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ resp. $\alpha \in \mathbb{C}$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tvrzení

Norma indukovaná skalárním součinem je normou.

Důkaz.

Vlastnost 1 platí z definice. Vlastnost 3 už máme. Vlastnost 2:

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|. \quad \square$$

Norma obecně – příklady

Pro $p = 1, 2, \ldots$ definujeme p-normu vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ jako

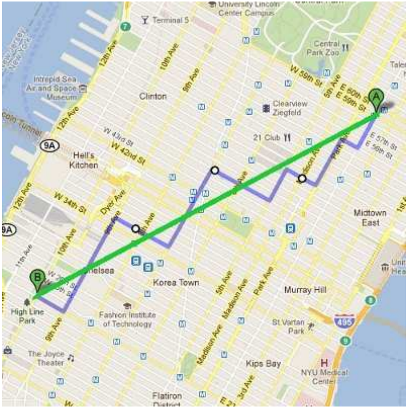
$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Speciální volby p vedou ke známým normám:

- pro $p = 2$: eukleidovská norma $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,
  což je norma indukovaná standardním skalárním součinem,
- pro $p = 1$: součtová norma $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$,
  nazývá se manhattanská norma, protože odpovídá reálným vzdálenostem při procházení pravoúhlé sítě ulic ve městě,
- pro $p = \infty$ (limitním přechodem):
  maximová (Čebyševova) norma $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

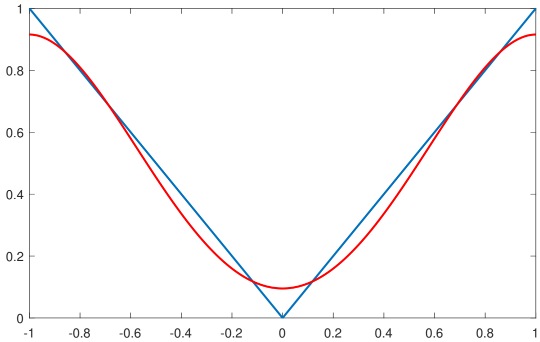
Součtová norma

Součtová norma aneb skutečné vzdálenosti ve městě



Maximová norma

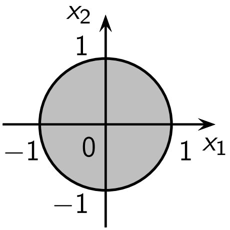
Čebyševovská aproximace funkce $f(x) = |x|$



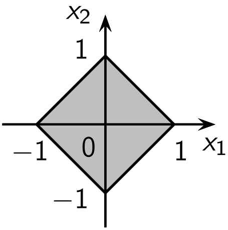
Norma obecně – jednotková koule

Jednotková koule je množina vektorů, které mají normu nanejvýš 1 a tedy jsou od počátku vzdáleny maximálně 1:

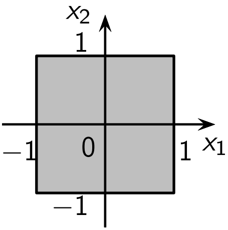
$$\{x \in V;\ \|x\| \leq 1\}.$$



eukleidovská norma



součtová norma



maximová norma

- Jednotková koule je vždy uzavřená, omezená, symetrická dle počátku, konvexní a počátek leží v jejím vnitřku.

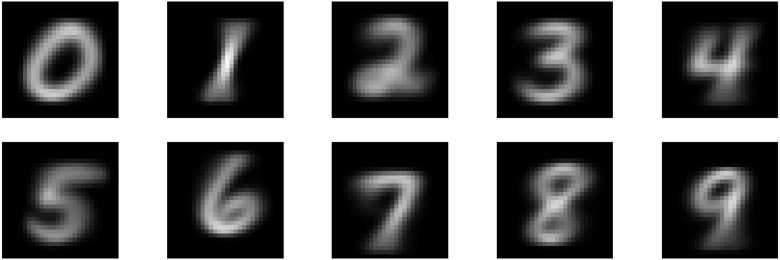
Norma a metrika

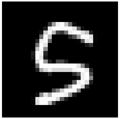
Každá norma určuje vzdálenost metriku (vzdálenost) předpisem

$$d(x, y) := \|x - y\|,$$

tedy vzdálenost vektorů x, y zavádí jako velikost jejich rozdílu.

Vzdálenost a klasifikace číslic



Chceme klasifikovat: 

Jednotlivé vzdálenosti:

0: 1957.44	1: 2237.30	2: 2015.79	3: 1816.23	4: 1868.78
5: 1771.64	6: 2038.57	7: 2090.51	8: 1843.22	9: 1900.81

Klasifikujeme jako 5 (ale je blízko také číslu 3).

Následující téma

1. Skalární součin
   - Skalární součin a norma
   - Ortonormální báze, Gramova–Schmidtova ortogonalizace
   - Ortogonální doplněk a projekce
   - Ortogonální doplněk a projekce v $\mathbb{R}^n$
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Ortogonální matice
2. Determinanty
3. Vlastní čísla
4. Positivně (semi-)definitní matice
5. Kvadratické formy
6. Maticové rozklady

Ortogonální a ortonormální systém

Definice (Ortogonální a ortonormální systém)

Systém vektorů $z_1, \ldots, z_n$ je

- *ortogonální*, pokud $\langle z_i, z_j \rangle = 0$ pro všechna $i \neq j$;
- *ortonormální*, pokud je ortogonální a $\|z_i\| = 1$ pro všechna i.

Poznámky:

- Je-li systém $z_1, \ldots, z_n$ ortonormální, pak je také ortogonální.
- Naopak to obecně neplatí, ale není problém ortogonální systém zortonormalizovat.

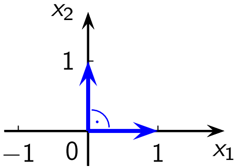
  Jsou-li $z_1, \ldots, z_n$ nenulové a ortogonální, pak

  $$\frac{1}{\|z_1\|} z_1, \ldots, \frac{1}{\|z_n\|} z_n$$

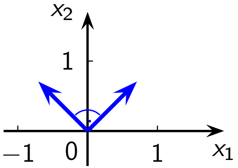
  jsou ortonormální.

Ortogonální a ortonormální systém – příklady

- Prostor $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem:



Ortonormální báze
$(1, 0)^T$, $(0, 1)^T$.



Ortonormální báze
$\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)^T$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1)^T$.

- prostor $\mathbb{R}^n$: kanonická báze $e_1, \ldots, e_n$.

Ortogonální a ortonormální systém – lineární nezávislost

Tvrzení

Je-li systém $z_1, \ldots, z_n$ ortonormální, pak je lineárně nezávislý.

Důkaz.

Uvažujme lineární kombinaci $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i = o$. Pro každé k platí:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i, z_k \right\rangle = \langle o, z_k \rangle = 0$$

a zároveň

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i, z_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle z_i, z_k \rangle = \alpha_k \langle z_k, z_k \rangle = \alpha_k. \qquad \square$$

Ortogonální a ortonormální systém – Fourierovy koeficienty

Věta (Fourierovy koeficienty)

Buď $z_1, \ldots, z_n$ ortonormální báze prostoru V. Pak pro každé $x \in V$ platí

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i.$$

Důkaz.

Víme, že $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i$ a souřadnice $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou jednoznačné. Nyní pro každé k:

$$\langle x, z_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i, z_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle z_i, z_k \rangle = \alpha_k \langle z_k, z_k \rangle = \alpha_k. \qquad \square$$

- vyjádření $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i$ se nazývá *Fourierův rozvoj*
- skaláry $\langle x, z_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n$ se nazývají *Fourierovy koeficienty*

Fourierovy koeficienty – příklad

Příklad

Uvažujme $x = (3,5)^T$.

- Nejprve buď $z_1 := (1,0)^T$, $z_2 := (0,1)^T$. Pak

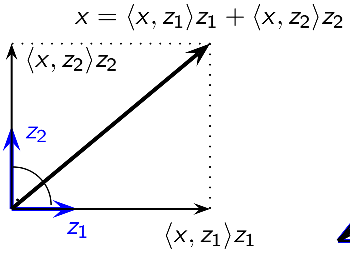
$$x = \langle x, z_1 \rangle z_1 + \langle x, z_2 \rangle z_2 = 3z_1 + 5z_2 = 3(1,0)^T + 5(0,1)^T.$$

- Nyní buď $z_1 := \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)^T$, $z_2 := \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)^T$. Pak

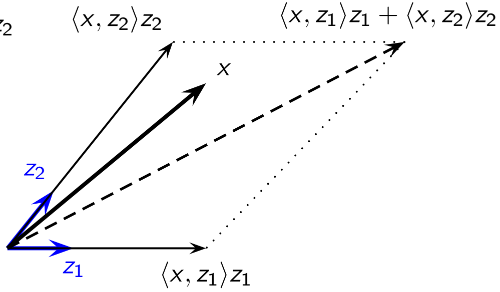
$$x = \langle x, z_1 \rangle z_1 + \langle x, z_2 \rangle z_2 = 4\sqrt{2} z_1 + \sqrt{2} z_2. \qquad \square$$

Fourierovy koeficienty – geometrický význam

- v rozvoji $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i$ udává člen $\langle x, z_i \rangle z_i$ projekci vektoru x na přímku $span\{z_i\}$.



Vektory z_1, z_2 ortonormální.

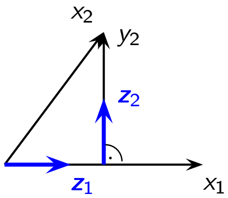


Vektory z_1, z_2 délky 1, ale ne ortogonální.

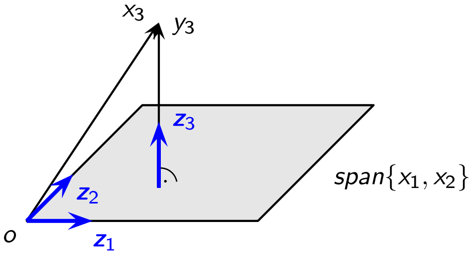
Gramova–Schmidtova ortogonalizace – myšlenka

- Daná báze $x_1, \dots, x_n$ prostoru V.
- Jak sestrojit ortonormální bázi?
- Idea: Postupným nakolmováním vektorů.

  Od vektoru x_k odečteme jeho projekci do $span\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$; tak bude kolmý na všechny předchozí.



Nakolmení druhého vektoru.



Nakolmení třetího vektoru.

Gramova–Schmidtova ortogonalizace – algoritmus

Algoritmus (Gramova–Schmidtova ortogonalizace)

Vstup: lineárně nezávislé vektory $x_1, \ldots, x_n \in V$.

1. **for** $k := 1$ **to** n **do**
2. $\qquad y_k := x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j,$ $\qquad$ //vypočítáme kolmici
3. $\qquad z_k := \frac{1}{\|y_k\|} y_k,$ $\qquad$ //normalizujeme délku na 1
4. **end for**

Výstup: $z_1, \ldots, z_n$ ortonormální báze prostoru $span\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Důkaz. (Správnost Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace)

Matematickou indukcí podle n. Pro $n = 1$ je

- $y_1 = x_1 \neq o$,
- $z_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1$ je dobře definovaný a $span\{x_1\} = span\{z_1\}$.

Gramova–Schmidtova ortogonalizace – důkaz

Důkaz. (Indukční krok $n \leftarrow n-1$).

Předpoklad: $z_1, \dots, z_{n-1}$ je ortonormální báze $span\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$.
Platí $y_n \neq o$, jinak kdyby $y_n = o$, tak spor kvůli

$$x_n = \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n, z_j \rangle z_j \in span\{z_1, \dots, z_{n-1}\} = span\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$$

Proto $z_n = \frac{1}{\|y_n\|} y_n$ je dobře definovaný a má jednotkovou normu.
Nyní dokážeme, že $z_1, \dots, z_n$ je ortonormální systém. Stačí ukázat, že $z_n \perp z_i$ pro $i < n$:

$$\begin{aligned}
\langle z_n, z_i \rangle &= \frac{1}{\|y_n\|} \langle y_n, z_i \rangle = \frac{1}{\|y_n\|} \left\langle x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n, z_j \rangle z_j, z_i \right\rangle = \\
&= \frac{1}{\|y_n\|} \langle x_n, z_i \rangle - \frac{1}{\|y_n\|} \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n, z_j \rangle \langle z_j, z_i \rangle = \\
&= \frac{1}{\|y_n\|} \langle x_n, z_i \rangle - \frac{1}{\|y_n\|} \langle x_n, z_i \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Zbývá ověřit $span\{z_1, \dots, z_n\} = span\{x_1, \dots, x_n\}$:

- z algoritmu je vidět, že $span\{z_1, \dots, z_n\} \subseteq span\{x_1, \dots, x_n\}$
- oba stejnou dimenzi. $\square$

Gramova–Schmidtova ortogonalizace – příklad

Příklad

Vstup: $x_1 = (1, 0, 1, 0)^T$, $x_2 = (1, 1, 1, 1)^T$, $x_3 = (1, 0, 0, 1)^T$.

Postup algoritmu:

- $y_1 := x_1$,
- $z_1 := \frac{1}{\|y_1\|} y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1, 0)^T$,
- $y_2 := x_2 - \langle x_2, z_1 \rangle z_1 = (1, 1, 1, 1)^T - (1, 0, 1, 0)^T = (0, 1, 0, 1)^T$,
- $z_2 := \frac{1}{\|y_2\|} y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, 0, 1)^T$,
- $$\begin{aligned} y_3 &:= x_3 - \langle x_3, z_1 \rangle z_1 - \langle x_3, z_2 \rangle z_2 \\ &= (1, 0, 0, 1)^T - \tfrac{1}{2}(1, 0, 1, 0)^T - \tfrac{1}{2}(0, 1, 0, 1)^T \\ &= \tfrac{1}{2}(1, -1, -1, 1)^T, \end{aligned}$$
- $z_3 := \frac{1}{\|y_3\|} y_3 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)^T$.

Výsledná ortonormální báze se skládá z vektorů z_1, z_2, z_3.

Gramova–Schmidtova ortogonalizace – důsledky

Důsledek (Existence ortonormální báze)

Každý konečně generovaný prostor se skalárním součinem má ortonormální bázi.

(Pro nekonečně-dimenzionální prostory tvrzení neplatí.)

Důkaz.

Každý konečně generovaný prostor má bázi, a tu můžeme Gramovou–Schmidtovou metodou zortogonalizovat. □

Důsledek (Rozšíření ortonorm. systému na ortonormální bázi)

Každý ortonormální systém vektorů v konečně generovaném prostoru lze rozšířit na ortonormální bázi.

Důkaz.

Každý ortonormální systém vektorů $z_1, \dots, z_m$ lze rozšířit na bázi $z_1, \dots, z_m$, $x_{m+1}, \dots, x_n$, a tu můžeme Gramovou–Schmidtovou metodou zortogonalizovat na $z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_n$. Ortogonalizací se prvních m vektorů nezmění. □

Skalární součin obecný a standardní

Tvrzení

Buď $B = \{z_1, \ldots, z_n\}$ báze prostoru V. Pak

$$\langle x, y \rangle := [x]_B^T \overline{[y]_B}$$

je skalární součin a báze B je v něm ortonormální bází.

Důkaz.

Nejprve ověříme axiomy z definice skalárního součinu.

- $\langle x, x \rangle = [x]_B^T \overline{[x]_B} \geq 0$,
  nulové jen pro $[x]_B = o$, tedy pro $x = o$.
- Linearita v první složce vyplývá z linearity souřadnic.
- Symetrie pak plyne ze symetrie standardního skalárního součinu

$$\langle x, y \rangle = [x]_B^T \overline{[y]_B} = \overline{[y]_B^T \overline{[x]_B}} = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

Ortonormalitu báze B nahlédneme z vyjádření

$$\langle z_i, z_j \rangle = [z_i]_B^T \overline{[z_j]_B} = e_i^T e_j$$

□

Skalární součin obecný a standardní

Příklad

Zvolme $V = \mathbb{R}^n$ a buď B libovolná báze.

Označme $A := {}_B[id]_{\text{kan}}$ matici přechodu od kanonické báze do B.

Protože

$$[x]_B = {}_B[id]_{\text{kan}} \cdot [x]_{\text{kan}} = Ax,$$
$$[y]_B = {}_B[id]_{\text{kan}} \cdot [y]_{\text{kan}} = Ay,$$

dostáváme

$$\langle x, y \rangle = [x]_B^T [y]_B = (Ax)^T Ay = x^T (A^T A) y. \qquad \square$$

Skalární součin obecný a standardní

Tvrzení

Buď B ortonormální báze prostoru V se skalárním součinem. Pak

$$\langle x, y\rangle = [x]_B^T \overline{[y]_B}, \quad \forall x, y \in V.$$

Důkaz.

Buď $B = \{z_1, \ldots, z_n\}$. Pak $[x]_B = (\langle x, z_1\rangle, \ldots, \langle x, z_n\rangle)^T$ a

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= \langle \textstyle\sum_{j=1}^n \langle x, z_j\rangle z_j, y\rangle = \textstyle\sum_{j=1}^n \langle x, z_j\rangle \langle z_j, y\rangle \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^n \langle x, z_j\rangle \overline{\langle y, z_j\rangle} = [x]_B^T \overline{[y]_B}. \end{aligned}$$

□

- $\langle \cdot, \cdot\rangle$ je skalárním součinem na V právě tehdy, když je tvaru $\langle x, y\rangle = [x]_B^T \overline{[y]_B}$ pro nějakou ortonormální bázi B.
- Každý skalární součin je tedy standardním skalárním součinem při pohledu z libovolné ortonormální báze.
- Analogicky i pro normu indukovanou skalárním součinem:

$$\|x\| = \|[x]_B\|_2 = \sqrt{[x]_B^T \overline{[x]_B}}.$$

Následující téma

Ortogonální doplněk

Definice (Ortogonální doplněk)

Ortogonální doplněk množiny vektorů $M \subseteq V$ je

$$M^{\perp} := \{x \in V;\ \langle x, y\rangle = 0\ \forall y \in M\}.$$

Příklad

Určete $\{o\}^{\perp} = \ldots$, $V^{\perp} = \ldots$

Příklad

Ortogonální doplněk k vektoru $(2,5)^T$ a přímce $span\{(2,5)^T\}$.

Ortogonální doplněk – vlastnosti

Tvrzení (Vlastnosti ortogonálního doplňku množiny)

Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$. Pak

1. *$M^\perp$ je podprostor V,*
2. *je-li $M \subseteq N$ pak $M^\perp \supseteq N^\perp$,*
3. *$M^\perp = span(M)^\perp$.*

Důkaz.

1. Ověříme vlastnosti podprostoru:
   (a) $o \in M^\perp$ triviálně.
   (b) Pokud $x_1, x_2 \in M^\perp$, pak $\langle x_1, y\rangle = \langle x_2, y\rangle = 0\ \forall y \in M$.
   Tedy i $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle = 0$.
   (c) Násobky analogicky.
2. Buď $x \in N^\perp$, tedy $\langle x, y\rangle = 0\ \forall y \in N$.
   Tím spíš $\langle x, y\rangle = 0\ \forall y \in M \subseteq N$, a proto $x \in M^\perp$. $\square$

Ortogonální doplněk – vlastnosti

Tvrzení (Vlastnosti ortogonálního doplňku množiny)

Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$. Pak

1. *$M^\perp$ je podprostor V,*
2. *je-li $M \subseteq N$ pak $M^\perp \supseteq N^\perp$,*
3. *$M^\perp = span(M)^\perp$.*

Důkaz.

3. $M \subseteq span(M)$, tedy dle předchozího je $M^\perp \supseteq span(M)^\perp$.

   Důkaz druhé inkluze $M^\perp \subseteq span(M)^\perp$:
   Je-li vektor x kolmý na určité vektory, pak je kolmý na jejich lineární kombinace. Formálně:

$$\langle x, y_i \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \quad \left\langle x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i \langle x, y_i \rangle = 0 \qquad \square$$

Ortogonální doplněk – vlastnosti

Tvrzení (Vlastnosti ortogonálního doplňku podprostoru)

Buď $U \Subset V$, buď $z_1, \dots, z_m$ ortonormální báze U, a buď $z_1, \dots, z_m$, $z_{m+1}, \dots, z_n$ její rozšíření na ortonormální bázi V. Pak $z_{m+1}, \dots, z_n$ je ortonormální báze $U^\perp$.

Důkaz.

Stačí dokázat $span\{z_{m+1}, \dots, z_n\} = U^\perp$ (ortonormalita jasná).

Inkluze "$\supseteq$". Každý $x \in V$ má Fourierův rozvoj $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i$. Je-li $x \in U^\perp$, pak $\langle x, z_i \rangle = 0$, $i = 1, \dots, m$, a tudíž

$$x = \sum_{i=m+1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i \in span\{z_{m+1}, \dots, z_n\}.$$

Inkluze "$\subseteq$". Buď $x \in span\{z_{m+1}, \dots, z_n\}$, pak

$$x = \sum_{i=m+1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i = \sum_{i=1}^{m} 0 z_i + \sum_{i=m+1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i.$$

Z jednoznačnosti souřadnic $\langle x, z_i \rangle = 0$, $i = 1, \dots, m$. $\square$

Ortogonální doplněk – vlastnosti

Tvrzení (Vlastnosti ortogonálního doplňku podprostoru)

Buď $U \Subset V$, *buď* $z_1, \dots, z_m$ *ortonormální báze* U, *a buď* $z_1, \dots, z_m$, $z_{m+1}, \dots, z_n$ *její rozšíření na ortonormální bázi* V.

Pak $z_{m+1}, \dots, z_n$ *je ortonormální báze* $U^\perp$.

Důsledek (Vlastnosti ortogonálního doplňku podprostoru)

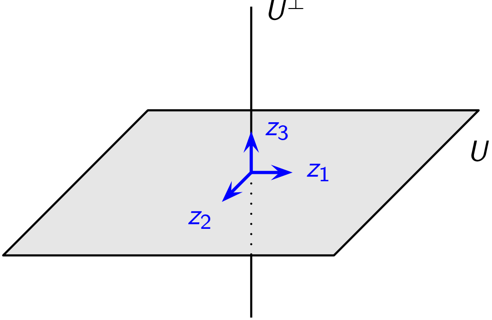
Buď $U \Subset V$. *Potom platí:*

1. $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$,
2. $V = U + U^\perp$,
3. $U \cap U^\perp = \{o\}$,
4. $(U^\perp)^\perp = U$.

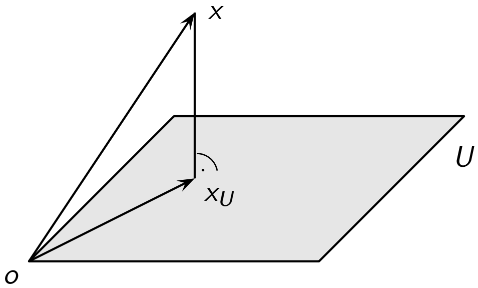
Ortogonální doplněk – ilustrace

Příklad

Ilustrace podprostoru U a jeho ortogonálního doplňku $U^{\perp}$:



Ortogonální projekce



Definice (Ortogonální projekce)

Projekcí vektoru $x \in V$ do podprostoru $U \Subset V$ je takový vektor $x_U \in U$, který splňuje

$$\|x - x_U\| = \min_{y \in U} \|x - y\|.$$

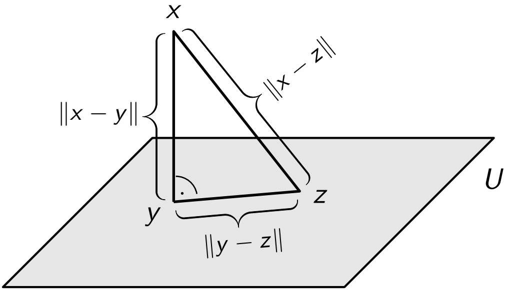
Ortogonální projekce

Tvrzení (O kolmici)

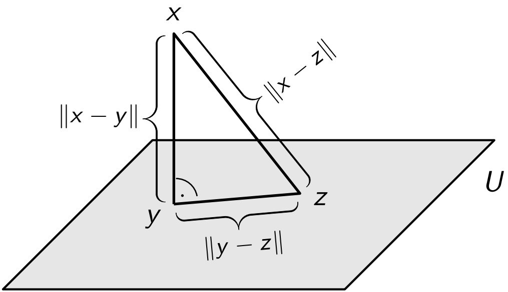
Buď $U \Subset V$, buď $x \in V$ a $y \in U$ takové, že $x - y \in U^{\perp}$. Pak

$$\|x - y\| < \|x - z\| \quad \forall z \in U \setminus \{y\}.$$

Tedy vektor y je jednoznačnou projekcí vektoru x do U.



Ortogonální projekce



Důkaz.

Buď $z \in U \setminus \{y\}$. Z předpokladu víme $(x - y) \perp (y - z)$.

Použijeme Pythagorovu větu, která říká

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2.$$

Rovnost nastane pouze tehdy, když $\|y - z\|^2 = 0$, tj. $y = z$. $\square$

Ortogonální projekce

Věta (O ortogonální projekci)

Buď $U \Subset V$. Pak pro každé $x \in V$ existuje právě jedna projekce $x_U \in U$ do podprostoru U.

Navíc, je-li $z_1, \ldots, z_m$ ortonormální báze U, pak

$$x_U = \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i.$$

Důkaz.

Buď $z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_n$ rozšíření na ortonormální bázi V.

Zadefinujeme $y := \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i \in U$ a ukážeme, že je to hledaná projekce x_U. Odvodíme

$$x - y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i - \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i = \sum_{i=m+1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i \in U^{\perp}.$$

Dle tvrzení o kolmici je $y = x_U$ hledaná (jednoznačná) projekce. $\square$

Ortogonální projekce – příklad

Příklad

Najděte projekci x_U vektoru $x = (1, 2, 4, 5)^T$ do podprostoru U generovaného vektory

$$z_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1, 0)^T,$$
$$z_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, 0, 1)^T,$$
$$z_3 = \tfrac{1}{2}(1, -1, -1, 1)^T$$

a určete vzdálenost x od U při standardním skalárním součinu.

Řešení. Najdeme projekci dle vzorce

$$\begin{aligned} x_U &= \textstyle\sum_{i=1}^{3} \langle x, z_i \rangle z_i \\ &= \tfrac{5}{2}(1, 0, 1, 0)^T + \tfrac{7}{2}(1, 0, 1, 0)^T + \tfrac{0}{2}(1, -1, -1, 1)^T \\ &= \tfrac{1}{2}(5, 7, 5, 7)^T. \end{aligned}$$

Hledaná vzdálenost je $\|x - x_U\| = \|\tfrac{1}{2}(-3, -3, 3, 3)^T\| = 3$.

Ortogonální projekce – poznámky

Důsledek

Vektor $y \in U$ je projekcí vektoru $x \in V$ do podprostoru U právě tehdy, když $x - y \in U^{\perp}$.

Linearita projekce

- zobrazení $x \mapsto x_U$, které vektor $x \in V$ zobrazuje na jeho projekci do podprostoru U, je lineární. Připomenutí projekce:

$$x_U = \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i.$$

Projekci jsme již implicitně použili

- Gramova–Schmidtova ortogonalizace v k-tém cyklu konstruuje projekci vektoru x_k do podprostoru $span\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$.
- Fourierův rozvoj je vlastně rozložení vektoru x na součet projekcí na jednotlivé přímky $span\{z_i\}$, $i = 1, \ldots, n$.

Ortogonální projekce na přímku

Příklad (Projekce na přímku při standardním skalár. součinu)

Buď $a \in \mathbb{R}^n$ nenulový vektor a uvažujme projekci vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ na přímku se směrnicí a, čili projekci do podprostoru $U = span\{a\}$.

- ortonormální báze prostoru U je vektor $z = \frac{1}{\|a\|}a$
- podle vzorce má projekce vektoru x tvar

$$x_U = \langle x, z \rangle z = \frac{1}{\|a\|^2}\langle x, a \rangle a = \frac{x^T a}{a^T a}a.$$

Legendreovy polynomy

Jak zavést skalární součin na prostoru polynomů $\mathcal{P}^n$?

1) pro $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, $q(x) = b_n x^n + \ldots + b_0$ zaveď

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$$

2) $\mathcal{P}^n \Subset \mathcal{C}_{[a,b]}$, tak použij standardní skalární součin prostoru $\mathcal{C}_{[a,b]}$

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x) q(x) dx$$

Pokud zortogonalizujeme vektory $1, x, x^2, \ldots$ na $\mathcal{C}_{[-1,1]}$, dostaneme tzv. *Legendreovy polynomy*

$$1,\ x,\ \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1),\ \tfrac{1}{5}(5x^3 - 3x),\ \ldots$$

Použití: aproximace funkce polynomem.

Ortonormální systém v prostoru funkcí

V prostoru $\mathcal{C}_{[-\pi,\pi]}$ existuje spočetný ortonormální systém $z_1, z_2, \ldots$ sestávající z vektorů

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 3x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 3x,\ \ldots$$

Projekce $f(x)$ do prostoru $span\{z_1, \ldots, z_k\}$ dává aproximaci

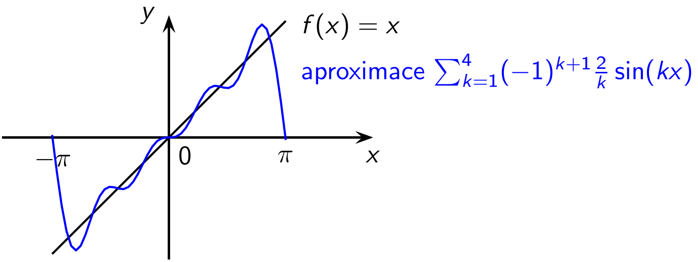
$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{k} \langle f, z_i \rangle z_i$$

Fourierův rozvoj funkce $f(x) = x$ na $[-\pi, \pi]$

Fourierův rozvoj $x = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx))$, kde:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot 1\; dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\; dx = 0$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\; dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\; dx = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\; dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(kx)\; dx = 0.$$

Tedy $x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin(kx)$.



Následující téma

Ortogonální doplněk v $\mathbb{R}^n$ (se std. skalárním součinem)

Věta (Ortogonální doplněk v $\mathbb{R}^n$)

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak $\mathcal{R}(A)^\perp = Ker(A)$.

Důkaz.

Z vlastností ortogonálního doplňku víme, že

$$\mathcal{R}(A)^\perp = \{(A_{1*})^T, \ldots, (A_{m*})^T\}^\perp.$$

Tedy $x \in \mathcal{R}(A)^\perp$ právě tehdy, když x je kolmé na řádky matice A. Neboli $A_{i*}x = 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$. Tedy $x \in Ker(A)$. $\square$

Důsledek

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak $\mathcal{R}(A) \oplus Ker(A) = \mathbb{R}^n$.

Ortogonální doplněk v $\mathbb{R}^n$ (se std. skalárním součinem)

Příklad

Buď V prostor generovaný vektory $(1,2,3)^T$ a $(1,-1,0)^T$. chceme-li určit $V^\perp$.

Sestavíme matici A takovou, aby $V = \mathcal{R}(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní již stačí nalézt bázi $V^\perp = Ker(A)$. Upravíme matici na RREF

$$\mathrm{RREF}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bázi jádra tvoří například vektor $(1,1,-1)^T$.

Matice A versus $A^T A$

Důsledek

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. *Pak*

1. $Ker(A^T A) = Ker(A)$,
2. $\mathcal{R}(A^T A) = \mathcal{R}(A)$,
3. $rank(A^T A) = rank(A)$.

Pozor, pro sloupcové prostory neplatí!

Matice A versus $A^T A$

Důsledek

Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pak

1. $Ker(A^T A) = Ker(A)$,
2. $\mathcal{R}(A^T A) = \mathcal{R}(A)$,
3. $rank(A^T A) = rank(A)$.

Důkaz.

1. Je-li $x \in Ker(A)$, pak $Ax = o$, a tedy také $A^T Ax = A^T o = o$, čímž $x \in Ker(A^T A)$.

   Naopak, je-li $x \in Ker(A^T A)$, pak $A^T Ax = o$.

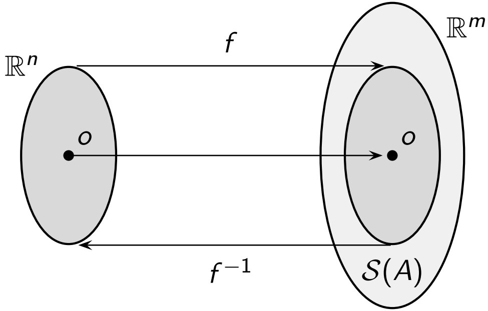
   Pronásobením x^T dostaneme $x^T A^T Ax = 0$, neboli $\|Ax\|^2 = 0$.

   Z vlastnosti normy musí $Ax = o$ a tudíž $x \in Ker(A)$.
2. $\mathcal{R}(A^T A) = Ker(A^T A)^\perp = Ker(A)^\perp = \mathcal{R}(A)$.
3. Triviálně z předchozího bodu. $\square$

Matice A versus $A^T A$ geometricky

Uvažujme lineární zobrazení $f(x) = Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Nechť $f(x)$ je prosté.

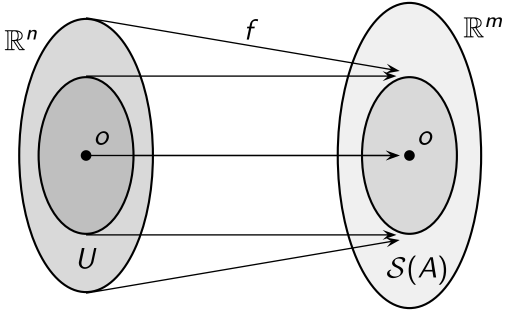


Lze tedy zavést inverzní zobrazení z prostoru $f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(A)$ do $\mathbb{R}^n$.

Matice A versus $A^T A$ geometricky

Uvažujme lineární zobrazení $f(x) = Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Nechť $f(x)$ není prosté.



Chceme najít $U \Subset \mathbb{R}^n$ tak, aby

$$dim\, U = dim\, f(\mathbb{R}^n) \;\text{ a }\; f(U) = f(\mathbb{R}^n).$$

Ukážeme, že lze zvolit $U = \mathcal{R}(A)$.

Matice A versus $A^T A$ geometricky

Tvrzení (Maticové prostory a lineární zobrazení)

Uvažujme lineární zobrazení $f(x) = Ax$*, kde* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$*.*

Pokud definiční obor $f(x)$ *omezíme pouze na prostor* $\mathcal{R}(A)$*, dostaneme isomorfismus mezi* $\mathcal{R}(A)$ *a* $f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(A)$*.*

Důkaz.

Buď $x \in \mathbb{R}^n$. Protože $\mathcal{R}(A) \oplus Ker(A) = \mathbb{R}^n$, lze rozložit

$$x = x^R + x^K, \quad \text{kde } x^R \in \mathcal{R}(A) \text{ a } x^K \in Ker(A).$$

Pak

$$f(x) = Ax = A(x^R + x^K) = Ax^R + Ax^K = Ax^R.$$

Tudíž $f(\mathcal{R}(A)) = f(\mathbb{R}^n)$.

Protože $dim\, \mathcal{R}(A) = dim\, f(\mathbb{R}^n)$, dostáváme isomorfismus. $\square$

Ortogonální projekce v $\mathbb{R}^n$ (se std. skalárním součinem)

- Odvodíme vzorec pro projekci vektoru x do podprostoru $U \Subset \mathbb{R}^m$.
- Vektory báze U dáme do sloupců matice A, čímž $U = \mathcal{S}(A)$.

Věta (Ortogonální projekce v $\mathbb{R}^m$)

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti n. Pak projekce vektoru $x \in \mathbb{R}^m$ do sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ je $x' = A(A^T A)^{-1} A^T x$.

Ortogonální projekce v $\mathbb{R}^n$ (se std. skalárním součinem)

Věta (Ortogonální projekce v $\mathbb{R}^m$)

Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hodnosti n. Pak projekce vektoru $x \in \mathbb{R}^m$ do sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ je

$$x' = A(A^T A)^{-1} A^T x.$$

Důkaz.

Nejprve si uvědomíme, že x' je dobře definované ($A^T A$ regulární):

$$rank(A^T A) = rank(A) = n, \text{tedy je regulární.}$$

Odvození vzorce: Hledáme x' splňující $x' \in \mathcal{S}(A)$ a $x - x' \in \mathcal{S}(A)^\perp$.

- $x' = Ay$ pro $y \in \mathbb{R}^n$
- $x - x' \in \mathcal{S}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^T)^\perp = Ker(A^T)$

Tudíž $A^T(x - x') = 0$, čili $A^T(x - Ay) = 0$, z čehož $A^T Ay = A^T x$.

Nakonec: $y = (A^T A)^{-1} A^T x$, a tedy $x' = A(A^T A)^{-1} A^T x$. $\square$

Matice projekce

Matice projekce do $\mathcal{S}(A)$ je:

$$P := A(A^T A)^{-1} A^T.$$

- P je symetrická.
- Platí $P^2 = P$.

  Důkaz možný algebraicky dosazením.

  Jiný důkaz významem: $P(Px) = Px$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$.
- Platí $\mathcal{S}(P) = \mathcal{S}(A)$, tedy $rank(P) = rank(A)$.

  Hodnost matice P je rovna dimenzi prostoru, do kterého projektujeme.

Tvrzení

Matice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je maticí projekce právě tehdy, když je symetrická a $P = P^2$.

Projekce s ortonormální bází

- Nechť sloupce A tvoří ortonormální systém $z_1, \ldots, z_n$.
  Pak $(A^T A)_{ij} = \langle z_i, z_j \rangle$, tedy $A^T A = I_n$ a matice projekce je
  $$P = A(A^T A)^{-1} A^T = AA^T.$$

Tvrzení (Ortogonální projekce s ortonormální bází)

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s ortonormálními sloupci. Pak matice projekce do $\mathcal{S}(A)$ je AA^T.

Paralela s dřívějším předpisem pro projekci:

$$Px = A(A^T x) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^T x \\ z_2^T x \\ \vdots \\ z_n^T x \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (z_i^T x) z_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i.$$

Projekce na přímku podruhé

- Buď $a \in \mathbb{R}^n$ je směrnice přímky (podprostoru dimenze 1).
- Matice projekce přímku má tvar $P = a(a^T a)^{-1} a^T$,
- Projekce vektoru x na přímku je pak vektor
$$Px = a(a^T a)^{-1} a^T x = \frac{a^T x}{a^T a} a.$$
- Pokud směrnici normujeme tak, aby $\|a\|_2 = 1$, potom matice projekce získá tvar $P = aa^T$.

Projekce do doplňku

Tvrzení (Ortogonální projekce do doplňku)

Buď $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matice projekce do podprostoru $V \Subset \mathbb{R}^n$.

Pak $I_n - P$ je maticí projekce do $V^\perp$.

Důkaz.

Každý vektor $x \in \mathbb{R}^n$ lze jednoznačně rozložit na součet $x = y + z$, kde $y \in V$ a $z \in V^\perp$.

Zde y je projekce x do V a z projekce x do $V^\perp$.

Tedy $z = x - y = x - Px = (I_n - P)x$. $\square$

Příklad (Matice projekce do nadroviny $a^T x = 0$)

$$I_n - \frac{1}{a^T a} a a^T.$$

Příklad (Matice projekce do $Ker(A)$)

Protože $Ker(A)^\perp = \mathcal{R}(A) = \mathcal{S}(A^T)$, matice projekce do $Ker(A)$ je

$$I_n - A^T (AA^T)^{-1} A.$$

Následující téma

Metoda nejmenších čtverců

- uvažujme soustavu $Ax = b$
- nechť nemá řešení (typicky, když $m \gg n$)
- chceme nějakou dobrou aproximaci, ale jakou?
- chceme vektor x, že levá a pravá strana jsou si co nejblíže:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|.$$

- pro eukleidovskou dostáváme

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2,$$

- vzhledem k monotonii druhé mocniny je to ekvivalentní s

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} (A_{j*}x - b_j)^2.$$

Odtud název *metoda nejmenších čtverců*.

Metoda nejmenších čtverců (MNČ) $\quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$

Ukážeme, že řešení metodou nejmenších čtverců jsou zároveň řešeními *soustava normálních rovnic*

$$A^T Ax = A^T b.$$

Věta (Množina řešení metodou nejmenších čtverců)
Množina přibližných řešení soustavy $Ax = b$ metodou nejmenších čtverců je neprázdná a rovna množině řešení normálních rovnic.

Důkaz.
Hledáme vlastně projekci vektoru b do podprostoru $\mathcal{S}(A)$.

Tato projekce je vektor tvaru Ax, kde $x \in \mathbb{R}^n$.

Víme, že je Ax projekcí právě tehdy, když

$$Ax - b \in \mathcal{S}(A)^{\perp} = Ker(A^T).$$

Jinými slovy, musí platit $A^T(Ax - b) = 0$, neboli

$$A^T Ax = A^T b.$$

□

Metoda nejmenších čtverců (MNČ) $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$

Soustava normálních rovnic

$$A^T Ax = A^T b.$$

- Je-li $Ax = b$ řešitelná, pak její řešení je také řešením MNČ.
- Jednoznačnost řešení, má-li A lineárně nezávislé sloupce. Pak je $A^T A$ regulární.

Důsledek

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti n. Pak přibližné řešení soustavy $Ax = b$ metodou nejmenších čtverců je jednoznačné a tvaru

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

- A regulární, pak řešení $Ax = b$ je $x = A^{-1} b$.
- $rank(A) = n$, pak řešení MNČ je $(A^T A)^{-1} A^T b$.

  Matice $B = (A^T A)^{-1} A^T$ je tedy něco jako zobecněná inverze (skutečně $BA = I_n$, ale ne naopak)

Poznámka

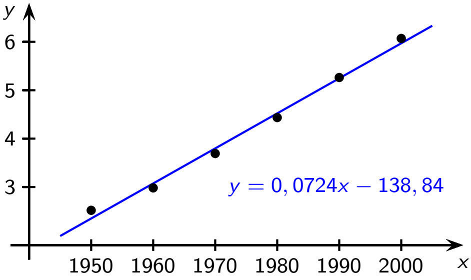
- Dříve: matice projekce do $\mathcal{S}(A)$:
$$A(A^TA)^{-1}A^T$$
- Nyní: řešení soustavy $Ax = b$ MNČ pro matici plné hodnosti:
$$(A^TA)^{-1}A^Tb$$

Metoda nejmenších čtverců – lineární regrese

Vývoj světové populace

rok	1950	1960	1970	1980	1990	2000
populace (mld.)	2,519	2,982	3,692	4,435	5,263	6,070

Proložení přímkou $y = px + q$:
$$\begin{aligned} 2,519 &= p \cdot 1950 + q \\ &\vdots \\ 6,070 &= p \cdot 2000 + q \end{aligned}$$




```
A=[1950 1960 1970
   1980 1990 2000;
   1 1 1 1 1 1 ]';
b=[2.519 2.982
   3.692 4.435
   5.263 6.070]';
x=inv(A'*A)*A'*b,
x'*[2009; 1]
```

Odhad pro rok 2009: 6,622 mld., skutečnost : 6,793 mld.

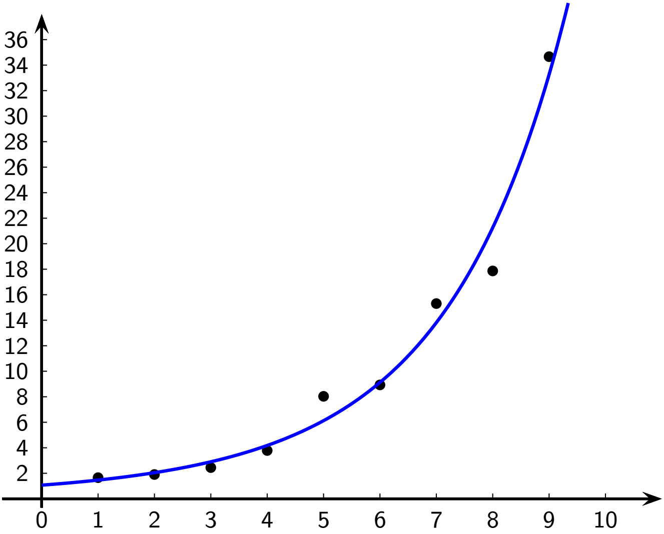
Metoda nejmenších čtverců – nelineární regrese

Některé nelineární modely se dají převést na lineární.

- uvažujme závislost
$$f(x) = ae^{bx},$$
kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou neznámé parametry
- mějme měření $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$:
$$y_i = ae^{bx_i},\ i = 1, \ldots, n$$
- zlogaritmováním: $\log(y_i) = \log(a) + bx_i$
- substitucí $y_i' \equiv \log(y_i)$, $a' \equiv \log(a)$ vede na lineární model
$$y_i' = a' + bx_i,\ i = 1, \ldots, n$$

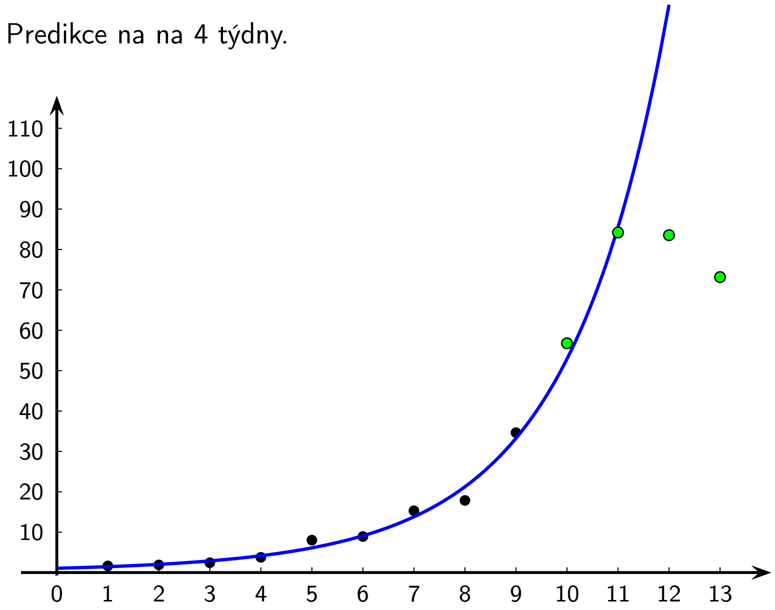
COVID-19

Období 10.8. – 5.10.2020 (týdenní součty, nové případy v tis.).



COVID-19

Predikce na na 4 týdny.

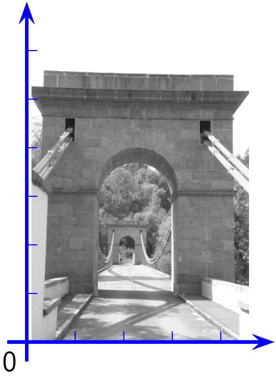


Následující téma

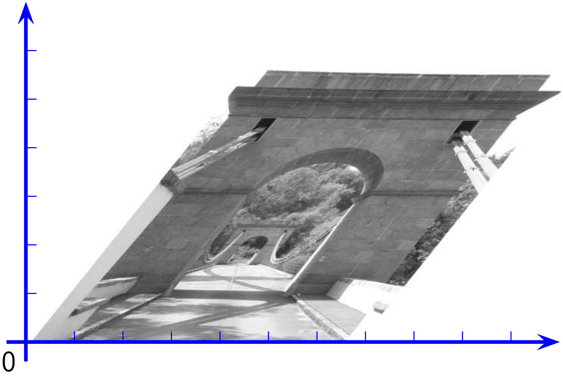
1. Skalární součin
   - Skalární součin a norma
   - Ortonormální báze, Gramova–Schmidtova ortogonalizace
   - Ortogonální doplněk a projekce
   - Ortogonální doplněk a projekce v $\mathbb{R}^n$
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Ortogonální matice
2. Determinanty
3. Vlastní čísla
4. Positivně (semi-)definitní matice
5. Kvadratické formy
6. Maticové rozklady

Ortogonální matice – motivace

Skosení deformuje objekty:



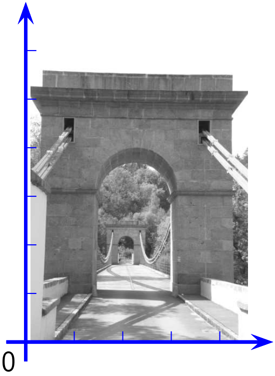
původní obrázek



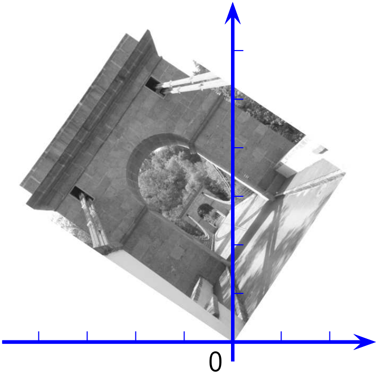
obrázek po transformaci

Ortogonální matice – motivace

Otočení nedeformuje objekty:



původní obrázek



obrázek po transformaci

Ortogonální matice

Definice (Ortogonální a unitární matice)

- Matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *ortogonální*, pokud $Q^T Q = I_n$.
- Matice $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je *unitární*, pokud $\overline{Q}^T Q = I_n$.

Tvrzení (Charakterizace ortogonálních matic)

Matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je ortogonální právě tehdy když sloupce Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

Důkaz.

$$(Q^T Q)_{ij} = \langle Q_{*i}, Q_{*j} \rangle = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \qquad \square$$

Tvrzení (Základní vlastnosti ortogonálních matic)

Buď $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální. Pak:

1. *Q^T je ortogonální,*
2. *Q^{-1} existuje a je ortogonální.*

Ortogonální matice

- Jsou uzavřené na součet? Jsou uzavřené na součin?

  Na součet uzavřené nejsou, na součin ano.

Tvrzení (Součin ortogonálních matic)

Jsou-li $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonální, pak $Q_1 Q_2$ je ortogonální.

Důkaz.

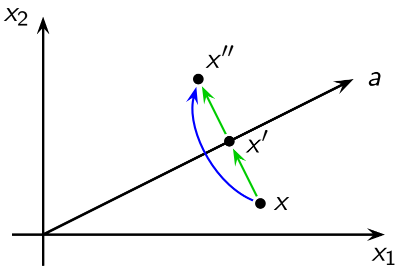
$(Q_1 Q_2)^T Q_1 Q_2 = Q_2^T Q_1^T Q_1 Q_2 = Q_2^T Q_2 = I_n.$ □

Příklad (Příklady ortogonálních matic)

- Jednotková matice I_n, nebo k ní opačná $-I_n$. ...
- Householderova matice: $H(a) := I_n - \frac{2}{a^T a} a a^T$, kde $o \neq a \in \mathbb{R}^n$.
- Givensova matice: matice otočení v rovině dvou os.

Householderova matice $\quad H(a) := I_n - \frac{2}{a^T a} a a^T$

Otočení dle osy o 180°:



Otočení bodu x kolem osy o 180° ve směru a:

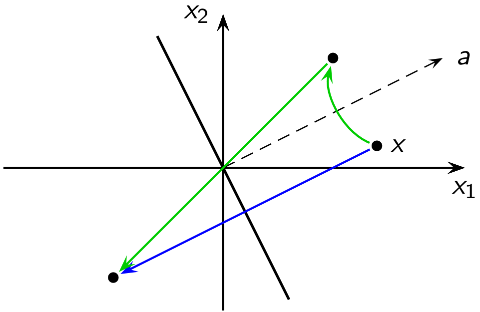
$$x'' = x + 2(x' - x) = 2x' - x = \frac{2}{a^T a} a a^T x - x = \left(2\frac{a a^T}{a^T a} - I_n\right) x$$

Tedy matice otočení:

$$2\frac{a a^T}{a^T a} - I_n.$$

Householderova matice $\quad H(a) := I_n - \frac{2}{a^T a} a a^T$

Householderovo zrcadlení dle nadroviny s normálou a:



Otočíme o 180° podle přímky a, nato překlopíme dle počátku:

$$H(a) = I_n - 2\frac{aa^T}{a^T a}.$$

- Každou ortogonální matici řádu n lze vyjádřit jako součin maximálně n Householderových matic.

Givensova matice

- Pro $n = 2$ je to matice otočení o úhel φ proti směru hodinových ručiček

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

  Jsou to tedy právě matice tvaru

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}, \quad \text{kde } c^2 + s^2 = 1$$

- Pro $n \geq 2$ je to matice otočení o úhel φ v rovině os x_i, x_j

$$G_{i,j}(c,s) = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & c & & -s & \\ & & I & & \\ & s & & c & \\ & & & & I \end{pmatrix}.$$

- Každou ortogonální matici řádu n lze vyjádřit jako součin maximálně $\binom{n}{2}$ Givensových matic (+ diagonální matice s ± 1).

Ortogonální matice řádu 2

Chceme popsat všechny ortogonální matice řádu 2.

- Vyjádříme takovou matici ve tvaru
$$\begin{pmatrix} c & ? \\ s & ? \end{pmatrix}$$
- Aby měl první sloupec jednotkovou velikost, musí $c^2 + s^2 = 1$.
- Aby druhý sloupec
  - byl kolmý na první, musí být násobkem vektoru $(-s, c)^T$,
  - měl jednotkovou velikost, musí to být $(-s, c)^T$, nebo $(s, -c)^T$.
- V prvním případě dostáváme matici rotace
$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$
- V druhém případě dostáváme matici
$$\begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix},$$
reprezentující překlopení podle přímky ve směru $(s, 1 - c)^T$.

Vlastnosti ortogonálních matic

Tvrzení (Vlastnosti ortogonálních matic (1/2))

Buď $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální. Pak:

1. $\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle$ *pro každé* $x, y \in \mathbb{R}^n$,
2. $\|Qx\| = \|x\|$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz.

1. $\langle Qx, Qy\rangle = (Qx)^T Qy = x^T Q^T Qy = x^T I_n y = x^T y = \langle x, y\rangle$.
2. $\|Qx\| = \sqrt{\langle Qx, Qx\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$. $\square$

- Zobrazení $x \mapsto Qx$ zachovává úhly a délky.
- Platí i naopak:
  matice zobrazení zachovávajícího skalární součin je ortogonální.

  Důkaz. Dosaď $x := e_i$, $y := e_j$. Pak

$$\begin{aligned}\langle Qx, Qy\rangle &= \langle x, y\rangle = x^T y = e_i^T e_j = (I_n)_{ij},\\ &= x^T Q^T Qy = e_i^T Q^T Qe_j = (Q^T Q)_{ij}.\end{aligned}$$ $\square$

Vlastnosti ortogonálních matic

Tvrzení (Vlastnosti ortogonálních matic (2/2))

Buď $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální. Pak:

1. $|Q_{ij}| \leq 1$ *a* $|Q^{-1}_{ij}| \leq 1$ *pro každé* $i, j = 1, \ldots, n$,
2. $\begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q \end{pmatrix}$ *je ortogonální matice.*

Důkaz.

1. Víme $\|Q_{*j}\| = 1$ pro každé $j = 1, \ldots, n$.
   Tedy $1 = \|Q_{*j}\|^2 = \sum_{i=1}^n q_{ij}^2$, z čehož $q_{ij}^2 \leq 1$, a tak $|q_{ij}| \leq 1$.
   Matice Q^{-1} je ortogonální, takže pro ni tvrzení platí také.
2. Z definice $\begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q^T Q \end{pmatrix} = I_{n+1}$. $\square$

Vlastnosti ortogonálních matic

- Ortogonální matice jsou ceněny numerické matematice:

  Nechť přibližně spočítaná hodnota vektoru x je tedy $\hat{x} = x + err$, kde err je chyba při výpočtu.
  Pak $Q\hat{x} = Q(x + err) = Qx + Q\,err$. Nová chyba je

  $$\|Q\,err\| = \|err\|.$$

Poznámka (Ortogonální matice a Fourierovy koeficienty)

Buď $z_1, \ldots, z_n$ báze $\mathbb{R}^n$, buď $v \in \mathbb{R}^n$ a chceme $v = \sum_{i=1}^n x_i z_i$.

Souřadnice jsou tedy řešením soustavy $Qx = v$, kde sloupce matice Q jsou tvořeny vektory báze.

Pokud je báze ortonormální, je matice Q ortogonální a

$$x = Q^{-1}v = Q^T v = \begin{pmatrix} — & z_1^T & — \\ — & z_2^T & — \\ & \vdots & \\ — & z_n^T & — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^T v \\ z_2^T v \\ \vdots \\ z_n^T v \end{pmatrix}.$$

Následující téma

Determinant

- jistá charakteristika matice
- historicky snaha o explicitní vzoreček pro řešení $Ax = b$
- vyskytuje se v různých souvislostech (výpočet objemu, substituce v integrálech, ...)

Definice (Determinant)

Determinant matice $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$ je číslo

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \dots a_{n,p(n)}.$$

Značení: $\det(A)$ nebo $|A|$.

- každý sčítanec má tvar $\operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \dots a_{n,p(n)}$, tj. z každého řádku a sloupce máme právě jeden prvek matice

Výpočet determinantu z definice

1. Matice řádu 2:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$
2. Matice řádu 3:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{array}$$

Mnemotechnicky (Sarrusovo pravidlo, pouze pro matice řádu 3):

$$\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right)$$

Determinant trojúhelníkové matice

- Počítat determinanty z definice pro větší matice je obecně značně neefektivní, protože vyžaduje zpracovat $n!$ sčítanců.
- Výpočet je jednodušší jen pro speciální matice.
- Například pro horní trojúhelníkovou matici ($a_{ij} = 0$ pro $i > j$). Míříme na Gaussovu eliminaci.

Tvrzení (Determinant trojúhelníkové matice)

Je-li $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ horní trojúhelníková, pak $\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Důkaz.

Z definice determinantu $\det(A) = \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \dots a_{n,p(n)}$:

- $a_{n,p(n)}$ je nenulový, pouze pokud $p(n) = n$
- $a_{n-1,p(n-1)}$ je nenulový, pouze pokud $p(n-1) = n$ (což nelze) nebo $p(n-1) = n-1$
- atd. až $a_{1,1}$ je nenulový, pouze pokud $p(1) = 1$. $\square$

Determinant transpozice

Tvrzení (Determinant transpozice)

Buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$*. Pak* $\det(A^T) = \det(A)$*.*

Důkaz.

$$
\begin{aligned}
\det(A^T) &= \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} A^T_{i,p(i)} = \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{p(i),i} \\
&= \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{j,p^{-1}(j)} = \sum_{p^{-1}\in S_n} \operatorname{sgn}(p^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{j,p^{-1}(j)} \\
&= \sum_{q\in S_n} \operatorname{sgn}(q) \prod_{j=1}^{n} a_{j,q(j)} = \det(A).
\end{aligned}
$$

- využili jsme vztah $\prod_{i=1}^n a_{p(i),i} = \prod_{j=1}^n a_{j,p^{-1}(j)}$, který dostaneme substitucí $j = p(i)$, z čehož $i = p^{-1}(i)$ (násobíme stejné prvky, pouze v jiném pořadí) $\square$

Řádková linearita determinantu

- Pro determinanty obecně $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.
- Ale platí tzv. řádková linearita

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_1 & \dots & a_{in}+b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \dots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tvrzení (Řádková linearita determinantu)

Buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{T}^n$. Pak pro libovolné $i = 1, \dots, n$ platí:

$$\det(A + e_i b^T) = \det(A) + \det(A + e_i(b^T - A_{i*})).$$

Řádková linearita determinantu

Tvrzení (Řádková linearita determinantu)

Buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{T}^n$. *Pak pro libovolné* $i = 1, \dots, n$ *platí:*

$$\det(A + e_i b^T) = \det(A) + \det(A + e_i(b^T - A_{i*})).$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
\det(A + e_i b^T) &= \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \dots (a_{i,p(i)} + b_{p(i)}) \dots a_{n,p(n)} \\
&= \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \dots a_{i,p(i)} \dots a_{n,p(n)} \\
&\quad + \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \dots b_{p(i)} \dots a_{n,p(n)} \\
&= \det(A) + \det(A + e_i(b^T - A_{i*}))
\end{aligned}$$

□

- Determinant je nejen řádkově, ale i sloupcově lineární.

Determinant a elementární úpravy

- Determinant trojúhelníkové matice je součin diagonálních prvků.
- Nejde k výpočtu použít Gaussova eliminace?
- Nechť matice A' vznikne z A nějakou elementární úpravou.

První elementární úprava.

Vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \in \mathbb{T}$: $\det(A') = \alpha \det(A)$.

Důkaz.

$$\begin{aligned}
\det(A') &= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) a'_{1,p(1)} \dots a'_{i,p(i)} \dots a'_{n,p(n)} = \\
&= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \dots (\alpha a_{i,p(i)}) \dots a_{n,p(n)} = \\
&= \alpha \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \dots a_{i,p(i)} \dots a_{n,p(n)} = \alpha \det(A). \quad \square
\end{aligned}$$

Determinant a elementární úpravy

Druhá elementární úprava.

Výměna i-tého a j-tého řádku: $\det(A') = -\det(A)$.

Důkaz.

Označme transpozici $t = (i, j)$, pak

$$\begin{aligned}
\det(A') &= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) a'_{1,p(1)} \dots a'_{i,p(i)} \dots a'_{j,p(j)} \dots a'_{n,p(n)} \\
&= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p \circ t(1)} \dots a_{j,p \circ t(j)} \dots a_{i,p \circ t(i)} \dots a_{n,p \circ t(n)} \\
&= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p \circ t(i)} = -\sum_{p \circ t \in S_n} \operatorname{sgn}(p \circ t) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p \circ t(i)} \\
&= -\sum_{q \in S_n} \operatorname{sgn}(q) \prod_{i=1}^{n} a_{i,q(i)} = -\det(A). \qquad \square
\end{aligned}$$

Determinant a elementární úpravy

Druhá elementární úprava.

Výměna i-tého a j-tého řádku: $\det(A') = -\det(A)$.

Důsledek

Má-li matice $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ dva stejné řádky, pak $\det(A) = 0$.

Důkaz (pro tělesa charakteristiky $\neq 2$).

Výměnou dvou stejných řádků dostaneme $\det(A) = -\det(A)$, a tedy $\det(A) = 0$. □

- Výsledek můžeme zobecnit na libovolnou permutaci řádků:

$$\det(A') = \operatorname{sgn}(p)\det(A).$$

Determinant a elementární úpravy

Třetí elementární úprava.

Přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému ($i \neq j$): $\det(A') = \det(A)$.

Důkaz.

Z řádkové linearity determinantu, důsledku a první elementární úpravy dostáváme

$$\det(A') = \det\begin{pmatrix} \dots \\ A_{j*} \\ \dots \\ A_{i*} + \alpha A_{j*} \\ \dots \end{pmatrix} = \det(A) + \det\begin{pmatrix} \dots \\ A_{j*} \\ \dots \\ \alpha A_{j*} \\ \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \det(A) + \alpha 0 = \det(A).$$

□

Výpočet determinantu pomocí elementárních úprav

Algoritmus

Převeď matici A do odstupňovaného tvaru A', ukládej si změny determinantu, a nakonec vynásob diagonální prvky matice A'.

Příklad

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5 \end{vmatrix} = 5$$

Následující téma

Kriterium regularity

Tvrzení (Kriterium regularity)

Matice $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ *je regulární právě tehdy, když* $\det(A) \neq 0$.

Důkaz.

Převedeme matici A elementárními úpravami na $\mathrm{REF}(A)$.
Úpravy mění hodnotu determinantu, ale nikoli jeho (ne)nulovost.
Pak A je regulární $\Leftrightarrow$ $\mathrm{REF}(A)$ má na diagonále nenulová čísla. $\square$

Poznámka (Míra regularity)

Čím je $\det(A)$ blíže k 0, tím je A blíž k nějaké singulární matici.

Hilbertova matice H_n:

- je špatně podmíněná, protože je “skoro” singulární
- její determinant je velmi blízko nule

n	$\det(H_n)$
4	$\approx 10^{-7}$
6	$\approx 10^{-18}$
8	$\approx 10^{-33}$
10	$\approx 10^{-53}$

Tato míra není ale ideální, protože je hodně citlivá ke škálování.

Multiplikativnost determinantu

Věta (Multiplikativnost determinantu)

Pro každé $A, B \in \mathbb{T}^{n\times n}$ *platí*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Důkaz.

1. Nejprve dokážeme, když A je matice elementární úpravy.

2. Obecně: Je-li A singulární, pak i AB je singulární.
Je-li A regulární, je součinem elementárních matic $A = E_1 \dots E_k$.

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1(E_2 \dots E_k B)) = \det(E_1)\det((E_2 \dots E_k)B)\\ &= \det(E_1)\det(E_2 \dots E_k)\det(B) = \det(E_1 E_2 \dots E_k)\det(B)\\ &= \det(A)\det(B).\end{aligned}$$

□

Důsledek

Buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ *regulární, pak* $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Důkaz. $1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$. □

Laplaceův rozvoj – rekurentní vzoreček na determinantu

Věta (Laplaceův rozvoj podle i-tého řádku)

Buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$, $n \geq 2$. Pak pro každé $i = 1, \dots, n$ platí

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij}),$$

kde A^{ij} vznikne z A vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce.

Důkaz (1/2). Nechť $A_{i*} = e_j^T$.

Vyměň řádky $(i, i+1), \dots, (n-1, n)$ a podobně pro sloupce:

$$A' := \left(\begin{array}{ccc|c} & A^{ij} & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\det(A) = (-1)^{(n-i)+(n-j)} \det(A') = (-1)^{i+j} \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a'_{i,p(i)}$$
$$= (-1)^{i+j} \sum_{p;\, p(n)=n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n-1} a'_{i,p(i)} = (-1)^{i+j} \det(A^{ij}).$$

Laplaceův rozvoj – rekurentní vzoreček na determinantu

Věta (Laplaceův rozvoj podle i-tého řádku)

Buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$, $n \geq 2$. Pak pro každé $i = 1, \dots, n$ platí

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij}),$$

kde A^{ij} vznikne z A vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce.

Důkaz (2/2).

Obecný případ. Z řádkové linearity determinantu a z předchozího:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \vdots & & & \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \end{pmatrix} + \ldots + \det \begin{pmatrix} & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{in} \\ & & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1}(-1)^{i+1} \det(A^{i1}) + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n} \det(A^{in}). \qquad \square$$

- Podobně můžeme rozvíjet podle libovolného sloupce.

Laplaceův rozvoj – příklad

Příklad

Laplaceův rozvoj determinantu podle 4. řádku

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{4+3} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{4+4} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = 8$$

Cramerovo pravidlo

Věta (Cramerovo pravidlo)

Buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ regulární, $b \in \mathbb{T}^n$. Pak řešení soustavy $Ax = b$ je dáno vzorcem

$$x_i = \frac{\det(A + (b - A_{*i})e_i^T)}{\det(A)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Poznámka

$$A + (b - A_{*i})e_i^T = \begin{pmatrix} | & | & & | & & | \\ A_{*1} & A_{*2} & \cdots & b & \cdots & A_{*n} \\ | & | & & | & & | \end{pmatrix}$$

Cramerovo pravidlo

Věta (Cramerovo pravidlo)

Buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ regulární, $b \in \mathbb{T}^n$. Pak řešení soustavy $Ax = b$ je dáno vzorcem

$$x_i = \frac{\det(A + (b - A_{*i})e_i^T)}{\det(A)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Důkaz.

Řešení soustavy splňuje $\sum_{j=1}^n A_{*j}x_j = b$.
Ze sloupcové linearity determinantu dostaneme

$$\begin{aligned}\det(A + (b - A_{*i})e_i^T) &= \det(A_{*1}|\dots|b|\dots|A_{*n}) = \\ &= \det(A_{*1}|\dots|\textstyle\sum_{j=1}^n A_{*j}x_j|\dots|A_{*n}) = \\ &= \sum_{j=1}^n \det(A_{*1}|\dots|A_{*j}|\dots|A_{*n})x_j.\end{aligned}$$

Pro $j \neq i$ je sčítanec nulový (matice má dva stejné sloupce). $\square$

Cramerovo pravidlo

Věta (Cramerovo pravidlo)

Buď $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$ regulární, $b \in \mathbb{T}^n$. Pak řešení soustavy $Ax = b$ je dáno vzorcem

$$x_i = \frac{\det(A + (b - A_{*i})e_i^T)}{\det(A)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Použití

- Explicitní vyjádření řešení soustavy lineárních rovnic.
- Spojitost řešení vzhledem k prvkům matice A a vektoru b.
- Odhad velikosti popisu řešení z velikosti popisu vstupních hodnot.

Cramerovo pravidlo

Příklad

Vyřešte soustavu rovnic Cramerovým pravidlem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

Řešení:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{2} = -1,$$

Následující téma

Adjungovaná matice

Definice (Adjungovaná matice)

Buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$, $n \geq 2$. Pak *adjungovaná matice* $\operatorname{adj}(A) \in \mathbb{T}^{n\times n}$ má složky

$$\operatorname{adj}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A^{ji}), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

kde A^{ji} opět vznikne z A vyškrtnutím j-tého řádku a i-tého sloupce.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pak:

$$\operatorname{adj}(A)_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 5, \ \dots$$

Celkem:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Adjungovaná matice

Věta (O adjungované matici)

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$ platí

$$A \operatorname{adj}(A) = \det(A) I_n.$$

Důkaz.

Odvodíme

$$(A \operatorname{adj}(A))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \operatorname{adj}(A)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} (-1)^{k+j} \det(A^{jk}) =$$
$$= \begin{cases} \det(A), & \text{pro } i = j, \\ 0, & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

Pro $i = j$ se jedná o Laplaceův rozvoj $\det(A)$ podle j-tého řádku.

Pro $i \neq j$ se zase jedná o rozvoj dle j-tého řádku matice A, v níž ale nejprve j-tý řádek nahradíme i-tým (matice je pak singulární). $\square$

Adjungovaná matice

Věta (O adjungované matici)

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ platí

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A) I_n.$$

Důsledek

Je-li $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ regulární, pak $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A)$.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Adjungovaná matice – použití

Tvrzení

Buď $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. *Pak* $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ *právě tehdy, když* $\det(A) = \pm 1$.

Důkaz.

• **Implikace** "$\Rightarrow$".

Víme $1 = \det(A)\det(A^{-1})$.

Protože $A, A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, determinanty jsou celočíselné, a tedy ± 1.

• **Implikace** "$\Leftarrow$".

Víme $A^{-1}_{ij} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}\det(A^{ji})$.

To je celé číslo, neboť $\det(A) = \pm 1$ a $\det(A^{ji})$ je celé číslo. $\square$

Následující téma

Geometrická interpretace determinantu

- Determinant pro výpočet objemů.
- Rovnoběžnostěn s lin. nezávislými hranami $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i,\ 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\}.$$

Věta (Objem rovnoběžnostěnu)

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Objem rovnoběžnostěnu s hranami danými řádky matice A (jakožto m-dimenzionálního útvaru) je $\sqrt{\det(AA^T)}$.

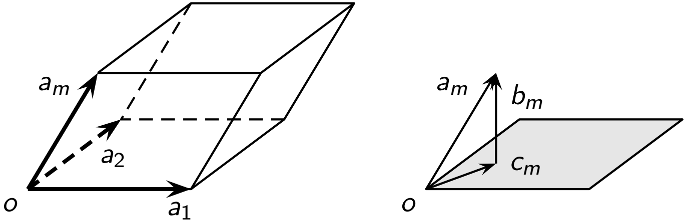
Speciálně, pro $m = n$ je objem $|\det(A)|$.

Poznámka

- Svou roli hraje i znaménko determinantu.
- Pro $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ je $\det(A) > 0$, pokud řádky A tvoří pravotočivou posloupnost vektorů (tzv. pravidlo palce).

Objem rovnoběžnostěnu

Důkaz (1/2). Matematickou indukcí podle m.



Označ $a_i^T := A_{i*}$.
Rozlož $a_m = b_m + c_m$, kde $c_m \in \mathcal{R}(D)$, $b_m \in \mathcal{R}(D)^\perp$ a definuj

$$D := \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_{m-1}^T \end{pmatrix}, \quad A' := \begin{pmatrix} D \\ b_m^T \end{pmatrix}.$$

- Podle indukčního předpokladu je obsah podstavy $\sqrt{\det(DD^T)}$.
- Objem je tedy $\|b_m\|\sqrt{\det(DD^T)}$.

Objem rovnoběžnostěnu

Důkaz (2/2).

Od A' k A lze přejít pomocí elementárních řádkových úprav (k poslednímu řádku stačí přičíst $c_m \in span\{a_1, \dots, a_{m-1}\}$).

Tedy existují elementární matice $E_1, \dots, E_k$ tak, že $A = E_1 \dots E_k A'$. Jejich determinant je 1 (jen přičítají násobek řádku k jinému). Tedy:

$$\begin{aligned}\det(AA^T) &= \det(E_1 \dots E_k A' A'^T E_k^T \dots E_1^T) = \\ &= \det(E_k) \dots \det(E_1) \det(A'A'^T) \det(E_k^T) \dots \det(E_1^T) \\ &= \det(A'A'^T).\end{aligned}$$

Dále,

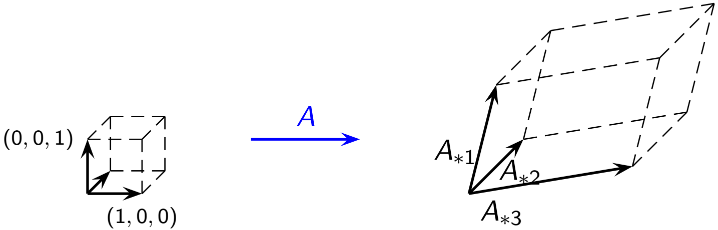
$$A'A'^T = \begin{pmatrix} D \\ b_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^T & b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DD^T & Db_m \\ b_m^T D^T & b_m^T b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DD^T & o \\ o^T & b_m^T b_m \end{pmatrix}.$$

Tudíž

$$\sqrt{\det(AA^T)} = \sqrt{\det(A'A'^T)} = \|b_m\| \sqrt{\det(DD^T)}. \qquad \square$$

Objem rovnoběžnostěnu

Obraz jednotkové krychle při zobrazení $x \mapsto Ax$:

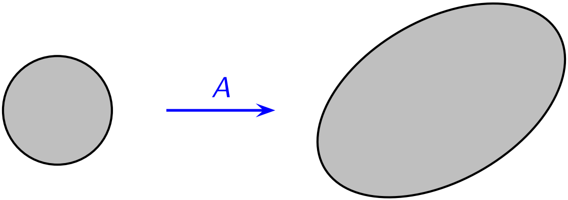


objem $= 1$

objem $= |\det(A)|$

Objem jiných těles

Obraz geometrického tělesa při zobrazení $x \mapsto Ax$:



objem $= V$

objem $= |\det(A)| \cdot V$

Objem rovnoběžnostěnu a elementární úpravy

Poznámka (Objem rovnoběžnostěnu a elementární úpravy)

- Determinant se nezmění, pokud na matici provádíme třetí elementární úpravu (přičtení násobku jednoho řádku k jinému).

  Rovnoběžnostěn se zkosí, ale základna i výška zůstane stejná.
- Prohození řádků matice A znamená překlopení rovnoběžnostěnu a jeho objem se proto nezmění.
- Vynásobení řádku matice A číslem α pak protáhne rovnoběžnostěn v jednom směru, objem se změní α-krát.

Poznámka (Vysvětlení definice determinantu)

Zavedeme tedy něco jako orientovaný objem, a to pomocí základních vlastností, které by objem měl splňovat:

1. $\det(I_n) = 1$,
2. změna determinantu dle elementárních úprav,
3. řádková linearita.

Vysvětlení definice determinantu

Z linearity determinantu:

$$\det(A) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \dots & 0 \\ a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{nn} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)}.$$

Následující téma

Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice (Vlastní čísla a vlastní vektory)

Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak $\lambda \in \mathbb{C}$ je *vlastní číslo* matice A a $x \in \mathbb{C}^n$ jemu příslušný *vlastní vektor*, pokud

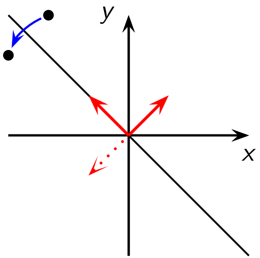
$$Ax = \lambda x, \;\; x \neq o.$$

- $x \neq o$ je nezbytná podmínka
  ($\lambda = 0$ ale klidně může nastat)
- vlastní vektor (při daném λ) není určen jednoznačně,
  (někdy se proto vlastní vektor normuje, aby $\|x\| = 1$)
- Proč těleso $\mathbb{C}$?
  (i pro reálné matice se komplexním číslům nevyhneme)

Geometrická interpretace:

- Vlastní vektor udává invariantní při zobrazení $x \mapsto Ax$.
- Vlastní číslo představuje škálování v tomto invariantním směru.

Vlastní čísla a vektory lineárních zobrazení v rovině

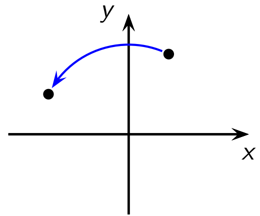


Překlopení dle přímky $y = -x$,

matice zobrazení $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

vlastní čísla:

- 1, vlastní vektor $(-1, 1)^T$
- -1, vlastní vektor $(1, 1)^T$



Rotace o úhel 90°,

matice zobrazení $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

žádná reálná vlastní čísla.

Charakterizace vlastních čísel a vektorů

Tvrzení (Charakterizace vlastních čísel a vektorů)

Buď $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$*. Pak*

1. $\lambda \in \mathbb{C}$ *je vlastním číslem* A *právě tehdy, když*
$$\det(A - \lambda I_n) = 0,$$
2. $x \in \mathbb{C}^n$ *je příslušným vlastním vektorem právě tehdy, když*
$$o \neq x \in Ker(A - \lambda I_n).$$

Důkaz.

1. $$Ax = \lambda I_n x, \; x \neq o,$$
$$(A - \lambda I_n)x = o, \; x \neq o,$$
což je ekvivalentní singularitě matice $A - \lambda I_n$.
2. $(A - \lambda I_n)x = o$ právě když $x \in Ker(A - \lambda I_n)$. □

- Lineárně nezávislých vlastních vektorů k vl. číslu λ je
$$dim\ Ker(A - \lambda I_n) = n - rank(A - \lambda I_n)$$

Následující téma

Vlastní čísla trojúhelníkové matice

Tvrzení (Vlastní čísla trojúhelníkové matice)

Je-li $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ trojúhelníková, její vlastní čísla jsou diagonální prvky.

Důkaz.

Hledáme λ takové, aby

$$0 = \det(A - \lambda I_n) = (a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) \qquad \square$$

Příklady

- Jednotková matice I_n má vlastní číslo 1, které je n-násobné.

  Protože $Ker(A - \lambda I_n) = Ker(0_n)$, množina příslušných vlastních vektorů je $\mathbb{R}^n \setminus \{o\}$.
- Nulová matice 0_n má vlastní číslo 0, které je n-násobné. Množina příslušných vlastních vektorů je $\mathbb{R}^n \setminus \{o\}$.

Poznámka

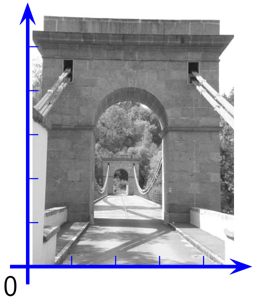
- Tvrzení by motivovalo Gaussovu eliminaci, ta ale nefunguje!

Lineární deformace obrázku

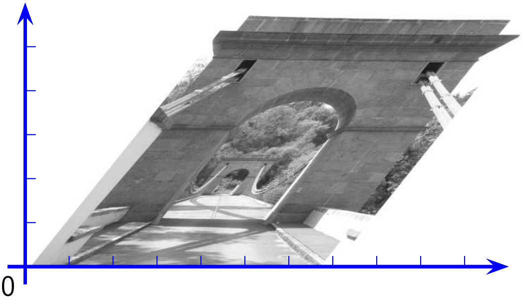
Mějme matici $A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.75 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vlastní čísla a vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 1.5,\ x_1 = (1,0)^T, \quad \lambda_2 = 1,\ x_2 = (-1.5,1)^T$$

Zobrazení $x \mapsto Ax$ představuje skosení a protáhnutí v ose x_1 o 50%.



původní obrázek



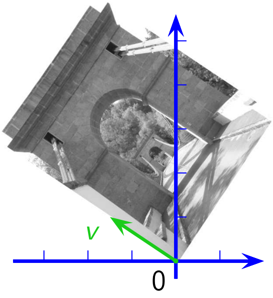
obrázek po transformaci

Lineární deformace obrázku

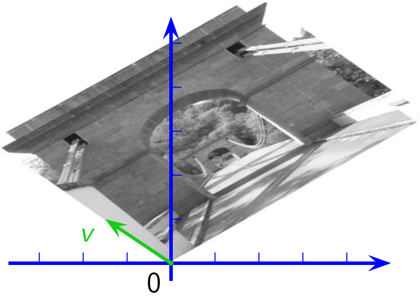
Mějme matici $A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.75 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vlastní čísla a vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 1.5,\ x_1 = (1,0)^T, \quad \lambda_2 = 1,\ x_2 = (-1.5,1)^T$$

Směr $x_2 = (-1.5,1)^T$ je invariantní.



původní obrázek



obrázek po transformaci

□

Charakteristický polynom

Definice (Charakteristický polynom)

Charakteristický polynom matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ proměnné λ je

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Proč je to polynom?

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Základní tvar charakteristického polynomu

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

- $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn})$
- $\alpha_0 = \det(A)$ (po dosazení $\lambda = 0$).

Charakteristický polynom

Podle základní věty algebry má polynom n komplexních kořenů (včetně násobností), označme je $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pak

$$p_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n).$$

Tvrzení

Vlastní čísla matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ jsou právě kořeny jejího charakteristického polynomu $p_A(\lambda)$, a je jich n včetně násobností.

- V praxi se vlastní čísla nepočítají jako kořeny charakteristického polynomu

Výpočet vlastních čísel pomocí charakteristického polynomu

Příklad

Matice otočení o úhel 90°:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Kořeny polynomu, a tedy vlastními čísly matice A, jsou $\pm i$.

Algebraická a geometrická násobnost

Definice (Algebraická a geometrická násobnost vlastního čísla)

Buď $\lambda^* \in \mathbb{C}$ vlastní číslo matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

1. **Algebraická násobnost** λ^* je násobnost λ^* jako kořene $p_A(\lambda)$.
2. **Geometrická násobnost** λ^* je rovna $n - rank(A - \lambda^* I_n)$,
   tj. počtu lin. nezávislých vlastních vektorů, které odpovídají λ^*.

Poznámka

- Uvidíme: algebraická násobnost $\geq$ geometrická násobnost.
- Defaultně násobnost $=$ algebraická násobnost.

Příklad

- Matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní číslo 1.

  Algebraická i geometrická násobnost je 2.
- Matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní číslo 1.

  Algebraická násobnost je 2, geometrická násobnost je 1.

Součin a součet vlastních čísel

Definice

Stopa matice $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ je $\operatorname{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Tvrzení (Součin a součet vlastních čísel)

Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pak

1. $\det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n$
2. $\operatorname{trace}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

Důkaz.

1. Dosaď $\lambda = 0$ do $\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n)$:
$$\det(A) = (-1)^n(-\lambda_1)\dots(-\lambda_n) = \lambda_1 \dots \lambda_n.$$
2. Rozvojem $\det(A - \lambda I_n)$ má koeficient u λ^{n-1} hodnotu
$$(-1)^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn}).$$
Rozvojem $(-1)^n(\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n)$ má hodnotu
$$(-1)^n(-\lambda_1 - \dots - \lambda_n).$$

□

Vlastní čísla a operace s maticemi

Tvrzení
A je regulární právě tehdy, když 0 není její vlastní číslo.

Důkaz.
λ je vlastní číslo právě tehdy, když $0 = \det(A - \lambda I_n)$. $\square$

Poznámka (Součet a součin matic)
- Pro vlastní čísla součtu a součinu matic není žádný předpis.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obě matice mají všechna vlastní čísla nulová. Součet matic

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla -1 a 1.

Vlastní čísla a operace s maticemi

Tvrzení (Vlastnosti vlastních čísel)

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$. Pak:

1. *je-li A regulární, pak A^{-1} má vlastní čísla $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,*
2. *A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,*
3. *αA má vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,*
4. *$A + \alpha I_n$ má vl. čísla $\lambda_1 + \alpha, \ldots, \lambda_n + \alpha$ a vektory $x_1, \ldots, x_n$,*
5. *A^T má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ale vlastní vektory obecně jiné.*

Důkaz (vlastnost 1.)

$$\begin{aligned} Ax_i &= \lambda_i x_i \\ x_i &= \lambda_i A^{-1} x_i \\ A^{-1} x_i &= \lambda_i^{-1} x_i \end{aligned}$$

□

Vlastní čísla reálných matic

Tvrzení

Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak i komplexně sdružené $\overline{\lambda}$ je vlastním číslem A.

Důkaz.

Víme, že λ je kořenem charakteristického polynomu

$$p_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0.$$

Komplexním sdružením obou stran rovnosti máme

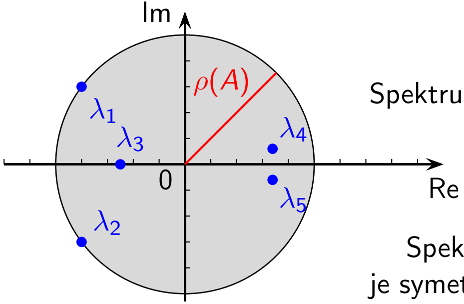
$$(-1)^n\overline{\lambda}^n + \alpha_{n-1}\overline{\lambda}^{n-1} + \ldots + \alpha_1\overline{\lambda} + \alpha_0 = 0. \qquad \square$$

Spektrum a spektrální poloměr

Definice (Spektrum a spektrální poloměr)

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pak

- *spektrum* matice A je množina vlastních čísel $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$
- *spektrální poloměr* je $\rho(A) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|$.



Spektrum a spektrální poloměr

Spektrum reálné matice
je symetrické podle reálné osy

Poznámka. Komplexní matice mohou mít za spektrum jakýchkoli n komplexních čísel.

Matice společnice

Definice (Matice společnice)

Buď $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Pak *matice společnice* polynomu $p(x)$ je čtvercová matice řádu n definovaná

$$C(p) := \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Tvrzení (O matici společnici)

Platí $p_{C(p)}(\lambda) = (-1)^n p(\lambda)$.

Tedy vlastní čísla matice $C(p)$ *odpovídají kořenům polynomu* $p(\lambda)$.

Matice společnice

Důkaz. Charakteristický polynom:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$$

Po úpravách:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -p(\lambda) \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} - a_{n-1}\lambda - \lambda^2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$$

Laplaceovým rozvojem podle prvního řádku pak dostaneme

$$p_{C(p)}(\lambda) = (-1)^{n+1}(-p(\lambda)) \det(I_{n-1}) = (-1)^n p(\lambda). \qquad \square$$

Matice společnice

Důsledky

- Hledání kořenů reálných polynomů a vlastních čísel matic jsou na sebe navzájem převoditelné.
- Vlastní čísla obecně můžeme počítat pouze numericky, žádné vyjádření vzorcem neexistuje.

  (pro polynomy stupňů vyšších než 4 ukázal roku 1824 Abel)
- Vlastní čísla se přes kořeny charakteristického polynomu v praxi nepočítají, opačný postup použitelný je.

Následující téma

Cayleyho–Hamiltonova věta

Příklad (Polynomiální matice a maticový polynom)

Jsou to dva zápisy stejné matice s parametrem λ:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 - \lambda & 2\lambda - 3 \\ 7 & 5\lambda^2 - 4 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Věta (Cayleyho–Hamiltonova)

Buď $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *a*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0.$$

Pak

$$(-1)^n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = 0.$$

- Zkráceně někdy: $p_A(A) = 0$

Cayleyho–Hamiltonova věta

Důkaz (1/2). Víme: $(A - \lambda I_n)\,\mathrm{adj}(A - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n) I_n$.

Lze psát $\mathrm{adj}(A - \lambda I_n) = \lambda^{n-1} B_{n-1} + \ldots + \lambda B_1 + B_0$ pro určitá B_i.

Dosazením

$$(A - \lambda I_n)(\lambda^{n-1} B_{n-1} + \ldots + \lambda B_1 + B_0) =$$
$$= ((-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0) I_n.$$

Roznásobením

$$-B_{n-1}\lambda^n + (AB_{n-1} - B_{n-2})\lambda^{n-1} + \ldots + (AB_1 - B_0)\lambda + AB_0 =$$
$$= (-1)^n \lambda^n I_n + a_{n-1}\lambda^{n-1} I_n + \ldots + \alpha_1 \lambda I_n + \alpha_0 I_n.$$

Porovnáním koeficientů

$$-B_{n-1} = (-1)^n I_n,$$
$$AB_j - B_{j-1} = \alpha_j I_n, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$
$$AB_0 = \alpha_0 I_n.$$

Vynásobme první rovnici A^n, další A^j a poslední $A^0 = I_n$.

Cayleyho–Hamiltonova věta

Důkaz (2/2). Porovnáním koeficientů [připomenutí]

$$\begin{aligned} -B_{n-1} &= (-1)^n I_n, \\ AB_j - B_{j-1} &= \alpha_j I_n, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ AB_0 &= \alpha_0 I_n. \end{aligned}$$

Vynásobme první rovnici A^n, další A^j a poslední $A^0 = I_n$.

Sečtením

$$\begin{aligned} &- A^n B_{n-1} + (A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2}) + \ldots + (A^2 B_1 - AB_0) + AB_0 = \\ &= 0 = (-1)^n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n. \qquad \square \end{aligned}$$

Cayleyho–Hamiltonova věta – důsledky (1/3)

Důsledek

Buď $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$A^k \in span\{I_n, A, \dots, A^{n-1}\},$$

tedy A^k je lineární kombinací matic $I_n, A, \dots, A^{n-1}$.

Důkaz.

Stačí uvažovat $k \geq n$.
Vydělíme polynom λ^k polynomem $p_A(\lambda)$ se zbytkem

$$\lambda^k = r(\lambda)\, p_A(\lambda) + s(\lambda),$$

kde

- $r(\lambda)$ je polynom stupně $k - n$
- $s(\lambda) = b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0$ je zbytek.

Pak

$$\begin{aligned} A^k &= r(A)\, p_A(A) + s(A) = s(A) = \\ &= b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 I_n. \end{aligned}$$

□

Cayleyho–Hamiltonova věta – důsledky (2/3)

Důsledek

Buď $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Je-li A regulární, pak

$$A^{-1} \in span\{I_n, A, \ldots, A^{n-1}\}.$$

tedy A^{-1} je lineární kombinací matic $I_n, A, \ldots, A^{n-1}$.

Důkaz.

Víme $p_A(A) = (-1)^n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = 0$.
Víme $\alpha_0 = \det(A) \neq 0$. Tedy

$$\begin{aligned} I &= -\frac{(-1)^n}{\alpha_0} A^n - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0} A^{n-1} - \ldots - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} A = \\ &= A \left(-\frac{(-1)^n}{\alpha_0} A^{n-1} - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0} A^{n-2} - \ldots - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} I_n \right). \end{aligned}$$

Tudíž vynásobením A^{-1} dostáváme

$$A^{-1} = -\frac{(-1)^n}{\alpha_0} A^{n-1} - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0} A^{n-2} - \ldots - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} I_n. \qquad \square$$

Cayleyho–Hamiltonova věta – důsledky (3/3)

Řešení soustavy $Ax = b$ s regulární maticí jde vyjádřit

$$A^{-1}b = -\frac{(-1)^n}{\alpha_0}A^{n-1}b - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0}A^{n-2}b - \ldots - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}b.$$

- Stačí počítat $b,\ Ab,\ A(Ab),\ A(A(Ab)), \ldots$
- Podobná myšlenka se používá pro řešení obřích soustav.

Následující téma

Podobnost

Paralela:

- Elementární řádkové úpravy a Gaussova eliminace na $Ax = b$

Definice (Podobnost)

Matice $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ jsou *podobné*, pokud existuje regulární $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tak, že $A = SBS^{-1}$.

- Ekvivalentně $AS = SB$.

Příklad

Matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jsou si podobné skrze matici $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = S^{-1}$.

Podobnost a vlastní čísla

Tvrzení (Vlastní čísla podobných matic)

Podobné matice mají stejná vlastní čísla.

Důkaz.

Z podobnosti matic existuje regulární matice S taková, že

$$A = SBS^{-1}.$$

Pak

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) = \det(SBS^{-1} - \lambda S I_n S^{-1}) \\ &= \det(S(B - \lambda I_n)S^{-1}) = \det(S)\det(B - \lambda I_n)\det(S^{-1}) \\ &= \det(B - \lambda I_n) = p_B(\lambda). \end{aligned}$$

Obě matice mají stejné charakteristické polynomy, tedy i vlastní čísla. □

- A co vlastní vektory?

Podobnost a vlastní čísla

Tvrzení

Nechť $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jsou podobné a λ je jejich vlastní číslo. Pak počet vlastních vektorů pro λ je stejný u obou matic.

Důkaz.

Buď $A = SBS^{-1}$.
Počet vlastních vektorů pro λ matice A, je

$$dim\ Ker(A - \lambda I_n) = n - rank(A - \lambda I_n).$$

Upravíme

$$\begin{aligned} rank(A - \lambda I_n) &= rank(SBS^{-1} - \lambda I_n) = rank(SBS^{-1} - \lambda SS^{-1}) \\ &= rank(S(B - \lambda I_n)S^{-1}) = rank(B - \lambda I_n). \end{aligned}$$

Tudíž dimenze jádra obou matic $A - \lambda I_n$ a $B - \lambda I_n$ jsou stejné. $\square$

Diagonalizovatelnost

Definice (Diagonalizovatelnost)

Matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je *diagonalizovatelná*, pokud je podobná nějaké diagonální matici.

- Diagonalizovatelná matice A jde tedy vyjádřit ve tvaru
$$A = S\Lambda S^{-1},$$
kde S je regulární a Λ diagonální.
- Tomuto tvaru se říká *spektrální rozklad*.

Příklad

Ne každá matice je diagonalizovatelná, např.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Její vlastní číslo (dvojnásobné) je 0.
Pokud by A byla diagonalizovatelná, pak $A = S0S^{-1} = 0$, spor.

Diagonalizovatelnost

Věta (Charakterizace diagonalizovatelnosti)

Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je diagonalizovatelná právě tehdy, když má n lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Důkaz.

"$\Rightarrow$". Spektrální rozklad $A = S\Lambda S^{-1}$.
Přepiš na $AS = S\Lambda$ a porovnej j-té sloupce

$$AS_{*j} = (AS)_{*j} = (S\Lambda)_{*j} = S\Lambda_{*j} = S\Lambda_{jj}e_j = \Lambda_{jj}S_{*j},$$

což můžeme názorně zapsat jako

$$AS = A\begin{pmatrix} | & & | \\ S_{*1} & \dots & S_{*n} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ (\Lambda_{11}S_{*1}) & \dots & (\Lambda_{nn}S_{*n}) \\ | & & | \end{pmatrix} = S\Lambda.$$

Tedy Λ_{jj} je vlastní číslo a S_{*j} je příslušný vlastní vektor.

"$\Leftarrow$". Analogicky opačným směrem.
Sestav S z vlastních vektorů a Λ diagonální z vlastních čísel. $\square$

Diagonalizovatelnost

- Důkaz věty byl konstruktivní, $A = S\Lambda S^{-1}$.

Poznámka (Vlastnosti diagonalizovatelných matic)

- Algebraická a geometrická násobnost vlastních čísel je stejná.
  Důkaz. Ze spektrálního rozkladu $A = S\Lambda S^{-1}$.
  Ke každému výskytu vlastního čísla přísluší jiný vlastní vektor.
- Hodnost matice A je rovna počtu nenulových vlastních čísel A.
  Důkaz. $rank(A) = rank(S\Lambda S^{-1}) = rank(\Lambda)$,
  což udává počet nenulových vlastních čísel.

Příklad

Matice $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ není diagonalizovatelná, vlastnosti shora neplatí.

Diagonalizovatelnost – geometrická interpretace

- Víme:
  vlastní vektor = invariantní směr zobrazení $f\colon x \to Ax$
  vlastní číslo = škálování v tomto směru
- Nechť $A = {}_B[f]_B$ představuje matici lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ vzhledem k bázi B.
- Buď $S = {}_{B'}[id]_B$ matice přechodu od B k jiné bázi B'. Pak
  $$SAS^{-1} = {}_{B'}[id]_B \cdot {}_B[f]_B \cdot {}_B[id]_{B'} = {}_{B'}[f]_{B'}$$
- Diagonalizace = hledání vhodné báze B', aby příslušná matice byla diagonální.
- Podobnost znamená změnu báze, nemění zobrazení f, takže vlastní čísla musí zůstat stejná.

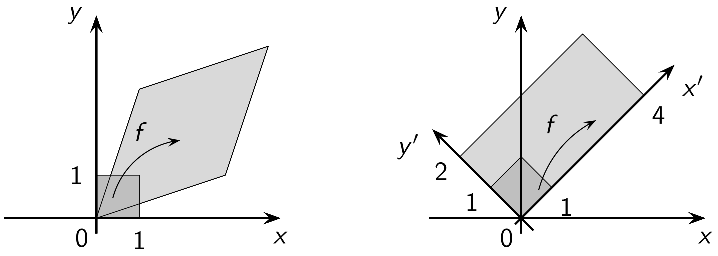
Diagonalizovatelnost – příklad

Buď
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla a vlastní vektory matice A jsou:
$$\lambda_1 = 4,\ x_1 = (1,1)^T, \quad \lambda_2 = 2,\ x_2 = (-1,1)^T.$$

Diagonalizace má tvar:
$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Geometrická interpretace:



Diagonalizovatelnost

Tvrzení (Vlastní vektory různých vlastních čísel)

Buďte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ navzájem různá vlastní čísla matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak odpovídající vlastní vektory $x_1, \ldots, x_k$ jsou lineárně nezávislé.

Důkaz.

Matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ zřejmé. Uvaž

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = o.$$

Pak přenásobením maticí A dostaneme

$$\alpha_1 A x_1 + \ldots + \alpha_k A x_k = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k x_k = o.$$

Odečtením λ_k-násobku horní rovnice od dolní:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = o.$$

Z induk. předpokladu $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$. Dopočti $\alpha_k = 0$. $\square$

Důsledek

Pokud matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ má n navzájem různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelná.

Diagonalizovatelnost – aplikace

Příklad (Mocnina matice)

Buď $A = S\Lambda S^{-1}$ spektrální rozklad matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak

- $A^2 = S\Lambda S^{-1} S\Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1}$.
- Obecněji:
$$A^k = S\Lambda^k S^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} S^{-1}.$$
- Asymptotické chování:
$$\lim_{k\to\infty} A^k = S \begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_n^k \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{cases} 0, & \rho(A) < 1, \\ \text{diverguje}, & \rho(A) > 1, \\ \text{konverguje/div.}, & \rho(A) = 1. \end{cases}$$

  Případ $\rho(A) = 1$: uvaž $A = I_n$ resp. $A = -I_n$.
- Nahlédni geometricky.
- Využití: diskrétní dynamické systémy $x \mapsto Ax$.

Následující téma

Jordanova normální forma

- Motivace: nejjednodušší tvar dosažitelný podobností

Definice (Jordanova buňka)

Buď $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. *Jordanova buňka* $J_k(\lambda)$ je čtvercová matice řádu k definovaná

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- Jordanova buňka má vlastní číslo λ, které je k-násobné
- přísluší mu pouze jeden vlastní vektor $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$

Jordanova normální forma

Definice (Jordanova normální forma)

Matice $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je v *Jordanově normální formě*, pokud je v blokově diagonálním tvaru

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{k_m}(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

a na diagonále jsou Jordanovy buňky $J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_m}(\lambda_m)$.

- Hodnoty λ_i a k_i nemusí být navzájem různé. Jordanova buňka se může vyskytovat vícekrát.
- Pokud Jordanovy buňky mají velikost 1, matice je diagonální.

Jordanova normální forma

Příklad

Uvažujme dvě matice v Jordanově normální formě

$$A = \left(\begin{array}{c|c|ccc} \boxed{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \end{array}\right).$$

- Obě matice mají vlastní čísla:

  5 (dvojnásobné) a 7 (trojnásobné)

- Matice A: pro 5 dva vlastní vektory, pro 7 jeden
- Matice B: pro 5 jeden vlastní vektor, pro 7 dva

Jordanova normální forma

Věta (O Jordanově normální formě)

Každá matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je podobná matici v Jordanově normální formě. Tato matice je až na pořadí buněk určena jednoznačně.

Důsledek

1. *Počet všech Jordanových buněk odpovídajících λ je roven počtu vlastních vektorů pro λ.*
2. *Násobnost vlastního čísla je větší nebo rovna počtu vlastních vektorů, které mu přísluší.*

Poznámka (Velikosti a počet buněk)

Počet buněk $J_k(\lambda)$ matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ve výsledné Jordanově normální formě je roven

$$rank\left(\tilde{A}^{k-1}\right) - 2\,rank\left(\tilde{A}^{k}\right) + rank\left(\tilde{A}^{k+1}\right),$$

kde $\tilde{A} = A - \lambda I_n$.

Jordanova normální forma

Myšlenky z důkazu či konstrukce.

- Pokud $A = J_k(\lambda)$, pak

$$\tilde{A} = A - \lambda I_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Jak vypadá $\tilde{A}^2, \tilde{A}^3, \dots$?
- Tedy

$$rank(\tilde{A}) = k - 1, \quad rank(\tilde{A}^2) = k - 2,$$
$$rank(\tilde{A}^3) = k - 3, \dots, rank(\tilde{A}^k) = 0.$$

- Pokud vím, že $A = J_k(\lambda)$, ale neznám k, určím ho z hodnosti.
- Pokud vím, že A je v JNF, znám vlastní čísla, ale neznám jednotlivé buňky, mohu je určit z hodností.

Jordanova normální forma

Příklad

Buď $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ a nechť

- $rank(A - 8I_5) = 3$

  Co to říká o Jordanových buňkách pro vlastní číslo 8?

  $\rightarrow$ Jsou dvě.

- $rank(A - 8I_5)^2 = rank(A - 8I_5)^3 = 2$

  Co to říká o Jordanových buňkách a jejich velikostech?

  $\rightarrow$ Jedna velikosti 1 a jedna velikosti 2.

Jordanova normální forma

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla 5 (dvojnásobné) a 7 (trojnásobné).

- Víme $3 = rank(A - 5I_5) = rank(A - 5I_5)^2$
- $rank(A - 7I_5) = 3$ a $rank(A - 7I_5)^2 = rank(A - 7I_5)^3 = 2$.

$$J = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \boxed{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \end{pmatrix}$$

Jordanova normální forma

Příklad (Mocnina matice)

Buď $A = SJS^{-1}$ Jordanův normální forma matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Pak

- $A^k = SJ^kS^{-1}$.
- J je blokově diagonální, stačí mocnit Jordanovy buňky
- Asymptotické chování jako pro diagonalizovatelné matice:

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \begin{cases} 0, & \rho(A) < 1, \\ \text{diverguje}, & \rho(A) > 1, \\ \text{konverguje/div.}, & \rho(A) = 1. \end{cases}$$

Soustava lineárních diferenciálních rovnic

Soustava lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

$$u(t)' = Au(t),$$

kde $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je neznámá funkce a $u(t_0) = u_0$ počáteční stav.

- Pro případ $n = 1$ je řešením $u(t)' = au(t)$ funkce

  $$u(t) = v \cdot e^{at}, \quad \text{kde } v \in \mathbb{R}.$$

- Hledáme řešení tvaru $u(t) = e^{\lambda t} v$ s neznámými $\lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$.
- Dosazením:

  $$\lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} A v, \;\text{ neboli }\; \lambda v = Av.$$

- Vede na výpočet vlastních čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a vektorů $x_1, \ldots, x_n$.
- Řešení je

  $$u(t) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} x_i,$$

  kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (získá se z počátečních podmínek).
- Pokud A není diagonalizovatelná, vyjádření složitější.

Soustava lineárních diferenciálních rovnic

Příklad

$$
\begin{aligned}
u_1' &= 7u_1 - 4u_2 \\
u_2' &= 5u_1 - 2u_2
\end{aligned}
$$

Matice $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ má vlastní čísla:

- 2, vlastní vektor $(4, 5)^T$,
- 3, vlastní vektor $(1, 1)^T$.

Řešení úlohy jsou tvaru

$$
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = a \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + b \cdot e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.
$$

Následující téma

Symetrické matice

Definice (Hermitovská matice a transpozice)

Hermitovská transpozice matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je matice $A^* := \overline{A}^T$.
Matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se nazývá *hermitovská*, pokud $A^* = A$.

Hermitovská transpozice má podobné vlastnosti jako klasická:

- $(A^*)^* = A$, $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$,...

Důsledky:

- Unitární matice: $Q^*Q = I_n$.
- norma indukovaná std. skalárním součinem v $\mathbb{C}^n$: $\|x\| = \sqrt{x^*x}$.

Příklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 5 \end{pmatrix}$$

První symetrická, ale ne hermitovská. Druhá naopak.

Symetrické matice – vlastní čísla

Tvrzení (Vlastní čísla symetrických matic)

Vlastní čísla reálných symetrických matic jsou reálná.
(či obecněji pro komplexní hermitovské matice)

Důkaz.

Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitovská, $\lambda \in \mathbb{C}$ její vlastní číslo a $x \in \mathbb{C}^n$ příslušný vlastní vektor jednotkové velikosti, tj. $\|x\|_2 = \sqrt{x^*x} = 1$.

Přenásobením rovnice $Ax = \lambda x$ vektorem x^* máme

$$x^*Ax = \lambda x^*x = \lambda.$$

Nyní

$$\lambda = x^*Ax = x^*A^*x = (x^*Ax)^* = \lambda^*.$$

Tedy $\lambda = \lambda^*$, a proto musí být λ reálné. □

- Komplexní symetrické matice mohou mít ryze komplexní vlastní čísla (uvaž diagonální matici).

Symetrické matice – příklad

Příklad (Vlastní čísla matice projekce)

Buď $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matice projekce do podprostoru U dimenze d.

Jaká má vlastní čísla a vlastní vektory?

- Pro každý vektor $x \in U$ platí $Px = x$.

  Tedy 1 je vlastním číslem,
  odpovídá mu d vlastních vektorů z báze prostoru U.

- Pro každý vektor $x \in U^{\perp}$ platí $Px = o$.

  Tedy 0 je vlastním číslem,
  odpovídá mu $n - d$ vlastních vektorů z báze prostoru $U^{\perp}$

Symetrické matice – spektrální rozklad

Věta (Spektrální rozklad symetrické matice)

Pro každou symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje ortogonální $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a diagonální $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takové, že

$$A = Q\Lambda Q^T.$$

Důkaz (začátek).

Mat. indukcí podle n. Případ $n = 1$ je triviální: $\Lambda = A$, $Q = 1$.

Buď λ vlastní číslo a x odpovídající vlastní vektor, $\|x\|_2 = 1$.

Bez újmy na obecnost nechť $\lambda = 0$:

- Jinak uvaž $\tilde{A} = A - \lambda I_n$ a z rozkladu $\tilde{A} = Q\tilde{\Lambda}Q^T$ máme

$$A = \tilde{A} + \lambda I_n = Q\tilde{\Lambda}Q^T + Q\lambda I_n Q^T = Q(\tilde{\Lambda} + \lambda I_n)Q^T.$$

Nyní doplňme x na ortogonální matici $S := (x \mid \cdots)$.

- Protože $Ax = o$, máme $AS = (o \mid \cdots)$.
- Tudíž $S^T AS = S^T(o \mid \cdots) = (o \mid \cdots)$.

Symetrické matice – spektrální rozklad

Důkaz (pokr.)

- A jelikož je tato matice symetrická, máme
$$S^TAS = \begin{pmatrix} 0 & o^T \\ o & A' \end{pmatrix},$$
kde A' je nějaká symetrická matice řádu $n-1$.
- Podle indukčního předpokladu má spektrální rozklad $A' = Q'\Lambda'Q'^T$, kde Λ' je diagonální a Q' ortogonální.
- Matice a rovnost rozšíříme o jeden řád takto:
$$\begin{pmatrix} 0 & o^T \\ o & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & o^T \\ o & \Lambda' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q'^T \end{pmatrix} = R\Lambda''R^T.$$
- Nyní můžeme psát
$$S^TAS = R\Lambda''R^T,$$
z čehož
$$A = SR\Lambda''R^TS^T = (SR)\Lambda''(SR)^T \equiv Q\Lambda Q^T. \qquad \square$$

Symetrické matice – spektrální rozklad

Příklad (Spektrální rozklad symetrické matice)

Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Vlastní čísla matice A jsou $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 3$.
- Vl. vektory: $v_1 = (1, -1, 0)^T, v_2 = (0, 1, -1)^T, v_3 = (1, 1, 1)^T$.
- Spektrální rozklad matice A je

$$A = S\Lambda S^{-1}, \quad \text{kde} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- NE, matice S není ortogonální! Lépe:

$$A = Q\Lambda Q^T, \quad \text{kde} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

Symetrické matice – jiná forma spektrálního rozkladu

Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická a $A = Q\Lambda Q^T$ spektrální rozklad.

- Označ $\lambda_i = \Lambda_{ii}$ a $x_i = Q_{*i}$ vlastní vektory.
-
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i e_i^T,$$
- Pak matici A lze vyjádřit jako
$$A = Q\Lambda Q^T = Q\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i e_i^T\right) Q^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q e_i e_i^T Q^T =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_{*i} Q_{*i}^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i x_i^T.$$

Symetrické matice – jiná forma spektrálního rozkladu

Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická a $A = Q\Lambda Q^T$ spektrální rozklad.

- Označ $\lambda_i = \Lambda_{ii}$ a $x_i = Q_{*i}$ vlastní vektory.
- Alternativní tvar spektrálního rozkladu: $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i x_i^T$
- A rozepisujeme na součet n matic hodnosti 0 nebo 1.
- Navíc, $x_i x_i^T$ je matice projekce na přímku $span\{x_i\}$
- zobrazení $x \mapsto Ax$ je tvaru součtu n zobrazení, každé z nich je projekcí na přímku (kolmou na ostatní) a škálování dle λ_i.

Následující téma

Teorie nezáporných matic

Věta (Perronova)

1. *Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nezáporná matice. Pak v absolutní hodnotě největší vlastní číslo je reálné nezáporné a příslušný vlastní vektor je nezáporný (ve všech složkách).*
2. *Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kladná matice. Pak v absolutní hodnotě největší vlastní číslo je reálné kladné, je jediné (ostatní mají menší absolutní hodnotu), má násobnost 1, a příslušný vlastní vektor je kladný (ve všech složkách).*

Příklad

- Matice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ je kladná.
  Největší vlastní číslo je 5, vlastní vektor $(1,2)^T$.
  Druhé vlastní číslo je -1, vlastní vektor $(1,-1)^T$.
- matice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ má dvě dominantní vlastní čísla, 1 a -1.

Markovovy řetězce – příklad

Migrace obyvatel USA město–předměstí–venkov:

z města:	96% zůstane, 3% do předměstí, 1% na venkov
z předměstí:	1% do města, 98% zůstane, 1% na venkov
z venkova:	1.5% do města, 0.5% do předměstí, 98% zůstane

Počáteční stav: 58 mil. město, 142 mil. předměstí, 60 mil. venkov.

Otázka: Jak se bude vyvíjet v čase?

$$A := \begin{pmatrix} 0.96 & 0.01 & 0.015 \\ 0.03 & 0.98 & 0.005 \\ 0.01 & 0.01 & 0.98 \end{pmatrix}, \quad x_0 = (58, 142, 60)^T.$$

Vývoj v čase: Ax_0, A^2x_0, A^3x_0, $\ldots$,$A^\infty x_0$.

$$A = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 \\ 0 & 0 & 0.97 \end{pmatrix} S^{-1} \ \Rightarrow \ A^\infty = S_{*1}(S^{-1})_{1*} = \begin{pmatrix} 0.23 & 0.23 & 0.23 \\ 0.43 & 0.43 & 0.43 \\ 0.33 & 0.33 & 0.33 \end{pmatrix}.$$

Závěr: 23% ve městě, 43% předměstí, 33% venkov. Na x_0 nezáleží.

Markovovy řetězce – obecně

- Systém se skládá ze stavů $1, 2, \ldots, n$.
  Jejich hodnota v čase i je reprezentována vektorem $x_i \in \mathbb{R}^n$.
- Stav systému v čase $i+1$ získáme jako $x_{i+1} = Ax_i$
  - Např. stav počasí, deskové hry, pohyb mezi webovými stránkami, vývoj populace ekosystému, stav sportovních zápasů
- Matice A je přechodová matice:
  a_{ij} =pravděpodobnost přechodu ze stavu j do stavu i.
  Logicky předpokládáme $A^T e = e$
  (z každého stavu musím někam přejít)
- Počáteční stav x_0.
  Zajímá nás $\lim_{k\to\infty} A^k x_0$
- Pro analýzu použijeme:
  $A \geq 0$, A^k souvisí s vlastními čísly, $\rho(A) = 1$, …

Poznámka. Markovova vlastnost: x_{i+1} závisí jen na předchozím stavu

Markovovy řetězce – souhrn

- Je-li $A > 0$, pak $A^\infty = ve^T$, kde $v \geq 0$ je vlastní vektor pro 1.

  (Důkaz. Podle Perronovy věty je 1 jediné dominantní vlastní číslo, ostatní splňují $|\lambda| < 1$.)

  Tedy vektor v splňuje $Av = v$ (tzv. stacionární rozložení)

  Posloupnost $Ax_0, A^2x_0, A^3x_0, \dots, A^\infty x_0$ konverguje $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

- Pro $A \geq 0$ se ustálit nemusí.

  Např. $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní čísla ± 1 a reprezentuje proces, kdy dva stavy přechází střídavě mezi sebou.

Následující téma

Výpočet vlastních čísel, Gerschgorinovy disky

- Žádný konečný algoritmus, jen numericky (iterační metody).

Věta (Gerschgorinovy disky, 1931)

Každé vlastní číslo λ *matice* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *leží v kruhu o středu* a_{ii} *a poloměru* $\sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ *pro nějaké* $i \in \{1, \dots, n\}$.

Důkaz.

Buď λ vlastní číslo a x vlastní vektor, tedy $Ax = \lambda x$.

Nechť i-tá složka x je největší, tj. $|x_i| = \max_{k=1,\dots,n} |x_k|$.

i-tá rovnice má tvar $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i$ vydělením $x_i \neq 0$ dostáváme

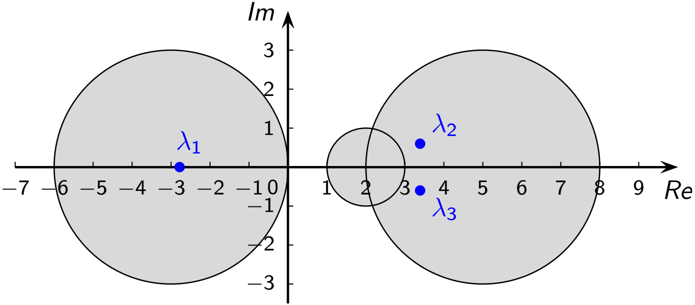
$$\lambda = a_{ii} + \sum_{j\neq i} a_{ij}\frac{x_j}{x_i},$$

a tím pádem

$$|\lambda - a_{ii}| = \left|\sum_{j\neq i} a_{ij}\frac{x_j}{x_i}\right| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\frac{|x_j|}{|x_i|} \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|. \qquad \square$$

Gerschgorinovy disky – příklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{vlastní čísla: } -2.78,\ 3.39 \pm 0.6\, i$$



- V každé komponentě souvislosti je tolik vlastních čísel, z kolika kruhů daná komponenta vznikla.

Gerschgorinovy disky – 3 použití

1) Diagonálně dominantní matice.

   Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je regulární, pokud $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\ \forall i$.

2) Kriterium pro zastavení výpočtu iteračních metod.

   Některé metody postupně zmenšují nediagonální prvky, matice konverguje k diagonální.

   Například matice

$$A = \begin{pmatrix} 7{,}0001 & 0{,}0001 & -0{,}0002 \\ 0{,}0001 & 5{,}0000 & 0{,}0003 \\ -0{,}0002 & 0{,}0003 & 1{,}9990 \end{pmatrix}$$

   má vlastní čísla $7{,}0001 \pm 0{,}0003$, $5 \pm 0{,}0004$ a $1{,}999 \pm 0{,}0005$.

3) Markovovy matice.

   Buď A Markovova matice ($A \geq 0$, $A^T e = e$).

   Pak 1 je vlastním čísel a je největší
   (Gerschgorinovy disky se zleva dotýkají bodu 1).

Mocninná metoda

- Jednoduchá metoda, ale v řadě situaci se používá (či variace).

Algoritmus (Mocninná metoda, von Mises, 1929)

Vstup: matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

1: Zvol $o \neq x_0 \in \mathbb{C}^n$, $i := 1$,
2: **while not** splněna ukončovací podmínka **do**
3: $\quad y_i := Ax_{i-1}$,
4: $\quad x_i := \frac{1}{\|y_i\|_2} y_i$,
5: $\quad i := i + 1$,
6: **end while**

Výstup: $v := x_i$ je odhad vlastního vektoru,
$\lambda := x_{i-1}^T y_i$ je odhad vlastního čísla.

- Může být pomalá, počítá jen dominantní vlastní číslo.
- Je robustní (za zaokrouhlení) a použitelná pro velké řády.

Mocninná metoda – příklad

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = (1, 0, 1)^T.$$

Jednotlivé iterace výpočtu:

i	$\frac{1}{\|x_i\|_\infty} x_i$	$x_{i-1}^T y_i$
0	$(1.00, 0.00, 1.00)^T$	–
1	$(0.67, 1.00, 0.17)^T$	5
2	$(1.00, 0.88, 0.56)^T$	6.32
3	$(0.97, 1.00, 0.47)^T$	6.94
4	$(1.00, 1.00, 0.50)^T$	7

```
A=[2 4 2; 4 2 2;
   2 2 -1];
x=[1;0;1];
for i=1:4
  y=A*x;
  (y'*x),
  x=y/norm(y);
  x/max(abs(x)),
end
```

Mocninná metoda – konvergence

Tvrzení (Konvergence mocninné metody)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s vlastními čísly $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$ a lineárně nezávislými vlastními vektory $v_1, \ldots, v_n$ velikosti 1.
Nechť x_0 má nenulovou souřadnici ve směru v_1.
Pak x_i konverguje k vektoru v_1 a $x_{i-1}^T y_i$ konverguje k λ_1.

Důkaz.

Vektory $v_1, \ldots, v_n$ tvoří bázi $\mathbb{R}^n$, tedy $x_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$, kde $\alpha_1 \neq 0$.
Pak $x_i = \frac{1}{\|A^i x_0\|} A^i x_0$ a lze psát

$$A^i x_0 = A^i \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j A^i v_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^i v_j = \lambda_1^i \left(\alpha_1 v_1 + \sum_{j\neq 1} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^i v_j \right).$$

Vektory x_i postupně normujeme, takže na násobku λ_1^i nezáleží.
Protože $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| < 1$, je $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^i \to 0$ pro $i \to \infty$. Tudíž $x_i \to_{i\to\infty} v_1$.
Pokud $x_i \approx v_1$, tak

$$x_{i-1}^T y_i = x_{i-1}^T A x_{i-1} = x_{i-1}^T \lambda_1 x_{i-1} = \lambda_1 \|x_{i-1}\|_2^2 = \lambda_1. \qquad \square$$

Deflace vlastního čísla

- Mocninná metoda počítá jen dominantní vlastní číslo a vektor.
- Následující transformací ho vynulujeme.
- Takže pak můžeme vypočítat ostatní vlastní čísla rekurzivně.

Tvrzení (O deflaci vlastního čísla symetrické matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ její vlastní čísla a $v_1, \dots, v_n$ odpovídající ortonormální vlastní vektory.
Pak matice $A - \lambda_1 v_1 v_1^T$ má vlastní čísla $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ a vlastní vektory $v_1, \dots, v_n$.

Důkaz.

Spektrální rozklad (ten alternativní): $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^T$.
Pak $A - \lambda_1 v_1 v_1^T = 0 v_1 v_1^T + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i v_i^T$.
To je spektrální rozklad matice $A - \lambda_1 v_1 v_1^T$. $\square$

- Umí se i pro nesymetrické matice

Vyhledávač Google™ a PageRank

PageRank (Sergey Brin a Larry Page, 2001):

N webových stránek

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & j\text{-tá stránka odkazuje na } i\text{-tou} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$b_j =$ počet odkazů z j-té stránky

$x_i =$ důležitost i-té stránky

- Řešíme $x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{b_j} x_j$, $i = 1, \ldots, N$.
- Maticově $A'x = x$, kde $a'_{ij} := \frac{a_{ij}}{b_j}$. Tedy $x \geq 0$ je vl. vektor k 1.
- Příklady Page ranku:

`www.google.com`	10
`www.cuni.cz`	8
`www.mff.cuni.cz`	7
`kam.mff.cuni.cz`	6
`kam.mff.cuni.cz/~hladik`	4

- Prakticky: $N \approx 10^{10}$, řídká matice, ca 100 iterací, úprava A'.
- Matice A' je vlastně Markovovou maticí.
- Další aplikace: geny, důležitosti funkcí, ranky ve fotbale, …

Následující téma

1. Skalární součin
2. Determinanty
3. Vlastní čísla
4. Positivně (semi-)definitní matice
   - Positivně definitní a positivně semidefinitní matice
   - Metody na testování positivní definitnosti
   - Aplikace positivní (semi-)definitnosti
5. Kvadratické formy
6. Maticové rozklady

Úvod – výraz $x^T Ax$

Matice řádu $n = 1$

- zde je $x^T Ax = ax^2$
- $ax^2 \geq 0$, pokud $a \geq 0$ [positivně semidefinitní matice]
- $ax^2 > 0$ pro $x \neq 0$, pokud $a > 0$ [positivně definitní matice]

Matice obecného řádu n

- zde $x^T Ax = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$
- bude nás zajímat kdy $x^T Ax \geq 0$ resp. $x^T Ax > 0$

Positivně definitní a positivně semidefinitní matice

Definice (Positivně (semi-)definitní matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická. Pak A je

- *positivně semidefinitní*, pokud $x^T Ax \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$,
- *positivně definitní*, pokud $x^T Ax > 0$ pro všechna $x \neq o$.

Poznámky

- Je-li A positivně definitní, pak je i positivně semidefinitní.
- Stačí testovat pro $\|x\| = 1$, tj. na jednotkové kružnici.
- A je negativně definitní, pokud je $-A$ positivně definitní.

Příklady

- 0 positivně semidefinitní, ale ne positivně definitní.
- I_n positivně definitní.

Poznámka (Positivně definitní matice mají kladnou diagonálu)

Je-li $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positivně definitní, dosazením $x = e_i$ dostaneme

$$x^T Ax = e_i^T Ae_i = a_{ii} > 0.$$

Positivně definitní a positivně semidefinitní matice

Definice (Positivně (semi-)definitní matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická. Pak A je

- *positivně semidefinitní*, pokud $x^T A x \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$,
- *positivně definitní*, pokud $x^T A x > 0$ pro všechna $x \neq o$.

Matice $A = (a) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$

- je positivně semidefinitní právě tehdy, když $a \geq 0$,
- je positivně definitní právě tehdy, když $a > 0$.

Poznámka (Proč pro symetrické matice?)

Nesymetrické matice můžeme zesymetrizovat úpravou $\frac{1}{2}(A + A^T)$:

$$x^T \tfrac{1}{2}(A + A^T)x = \tfrac{1}{2}x^T A x + \tfrac{1}{2}x^T A^T x = \tfrac{1}{2}x^T A x + \left(\tfrac{1}{2}x^T A x\right)^T = x^T A x.$$

Řada testovacích podmínek funguje pouze pro symetrické matice.

Positivně (semi-)definitní matice – základní vlastnosti

Tvrzení (Vlastnosti positivně definitních matic)

1. *Jsou-li $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pos. definitní, pak $A + B$ je pos. definitní.*
2. *Je-li A pos. definitní a $\alpha > 0$, pak i αA je pos. definitní.*
3. *Je-li A pos. definitní, pak je regulární a A^{-1} je pos. definitní.*

Důkaz (jen 3.)

Regularita. Buď x řešení soustavy $Ax = o$. Pak $x^T Ax = x^T o = 0$. Z předpokladu musí $x = o$.

Positivní definitnost. Sporem nechť $x^T A^{-1} x \leq 0$ pro $x \neq o$. Pak

$$x^T A^{-1} x = x^T A^{-1} A A^{-1} x = y^T A y \leq 0,$$

kde $y = A^{-1} x \neq o$. To je spor, neboť A je positivně definitní. $\square$

Poznámky

- Analogie věty platí i pro positivně semidefinitní matice.
- Se součinem positivně definitních matic je to komplikovanější.

Charakterizace positivní definitnosti

Věta (Charakterizace positivní definitnosti)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. *A je positivně definitní,*
2. *vlastní čísla A jsou kladná,*
3. *existuje matice $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti n taková, že $A = U^T U$.*

Důkaz (1/2).

• **Implikace** (1) $\Rightarrow$ (2)**:** Sporem nechť existuje vlastní číslo $\lambda \leq 0$, a x je příslušný vlastní vektor $\|x\| = 1$.
Pak $Ax = \lambda x$ implikuje $x^T A x = \lambda x^T x = \lambda \leq 0$. Spor.

• **Implikace** (2) $\Rightarrow$ (3): Symetrická A má spektrální rozklad $A = Q \Lambda Q^T$, kde Λ je diagonální matice s prvky $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.
Definujme Λ' jako diagonální s prvky $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n} > 0$.
Lze volit $U = \Lambda' Q^T$, neboť $U^T U = Q \Lambda'^2 Q^T = Q \Lambda Q^T = A$.
Matice U je regulární, neboť je součinem dvou regulárních.

Charakterizace positivní definitnosti

Věta (Charakterizace positivní definitnosti)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. *A je positivně definitní,*
2. *vlastní čísla A jsou kladná,*
3. *existuje matice $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti n taková, že $A = U^T U$.*

Důkaz (2/2).

• **Implikace** (3) $\Rightarrow$ (1): Sporem nechť $x^T A x \leq 0$ pro nějaké $x \neq o$. Pak $0 \geq x^T A x = x^T U^T U x = (Ux)^T U x = \langle Ux, Ux \rangle = \|Ux\|_2^2$. Tedy musí $Ux = o$, ale sloupce U jsou lineárně nezávislé, a tak $x = o$, spor. □

Poznámka (Výskyt matice $U^T U$)

- matice projekce a metoda nejmenších čtverců
- determinant a objem rovnoběžnostěnu

Charakterizace positivní semidefinitnosti

Věta (Charakterizace positivní semidefinitnosti)
Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. *A je positivně semidefinitní,*
2. *vlastní čísla A jsou nezáporná,*
3. *existuje matice $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ taková, že $A = U^T U$.*

Příklad (Matice projekce)

- Matice projekce do sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ má tvar
$$P = A(A^T A)^{-1} A^T.$$
- Vlastní čísla matice P jsou pouze 0 a 1.
- Protože P je symetrická, je positivně semidefinitní.

Transformace pro positivní (semi-)definitnost

- Elementární řádkové úpravy nemění množinu řešení $Ax = b$.
- Podobnost SAS^{-1} nemění vlastní čísla matice.
- Jaká transformace zachovává positivní definitnost matice A?

Tvrzení (Transformace pro positivní definitnost)

Buď $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární matice a $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická. Pak

$$A \text{ positivně definitní} \Leftrightarrow S^T AS \text{ je positivně definitní.}$$

Důkaz.

- **Implikace "$\Rightarrow$".**

Buď $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$. Z regularity matice S je $Sx \neq o$.
Proto $x^T S^T ASx = (Sx)^T A(Sx) > 0$.

- **Implikace "$\Leftarrow$".**

Použijme předchozí implikaci na matici $S^T AS$. Přenásobením S^{-1}:

$$S^{-T}(S^T AS)S^{-1} = S^{-T} S^T ASS^{-1} = A. \qquad \square$$

Následující téma

Rekurentní vzoreček

Věta (Rekurentní vzoreček na testování positivní definitnosti)

Buď $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ *symetrická. Pak matice*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix}$$

je positivně definitní právě tehdy, když platí zároveň

1. $\alpha > 0$,
2. $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T$ *je positivně definitní.*

Důkaz.

Aby A byla positivně definitní, musí $\alpha > 0$. Označ

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\alpha} a^T \\ o & I_{n-1} \end{pmatrix},$$

Nyní

$$S^T A S = \begin{pmatrix} 1 & o^T \\ -\frac{1}{\alpha} a & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\alpha} a^T \\ o & I_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & o^T \\ o & \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T \end{pmatrix}.$$

Tato blokově diagonální matice je positivně definitní právě tehdy, když jsou positivně definitní oba bloky. □

Rekurentní vzoreček – příklad

Příklad

Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & a^T \\ \hline a & \tilde{A} \end{array}\right).$$

Zde $\alpha = 4$, $a = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ a $\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{smallmatrix}\right)$.

Protože $\alpha > 0$, upravíme matici podle předpisu

$$\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Není-li zřejmé, že je matice positivně definitní, postup opakujeme.

V další iteraci dostaneme matici řádu 1

$$(2) - \frac{1}{9}(3)(3) = (1),$$

která je positivně definitní. Proto je positivně definitní i matice A.

Gaussova eliminace a positivní definitnost

- Rekurentní vzorec vlastně udělal 1 krok Gaussovy eliminace.

Tvrzení (Gaussova eliminace a positivní definitnost)

Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je positivně definitní právě tehdy, když ji Gaussova eliminace převede do odstupňovaného tvaru s kladnou diagonálou za použití pouze elementární úpravy přičtení násobku řádku s pivotem k jinému řádku pod ním.

Důkaz.

• Nechť A positivně definitní. První krok Gaussovy eliminace:

$$\begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ o & \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} aa^T \end{pmatrix}.$$

Podle rekurzivního vzorečku je $\alpha > 0$ a $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} aa^T$ je zase positivně definitní, takže můžeme pokračovat induktivně dál.

• Nechť Gaussova eliminace převede A do požadovaného tvaru. Mat. indukcí předpokládáme, že $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} aa^T$ je positivně definitní. Tudíž A je positivně definitní podle rekurentního vzorečku. □

Gaussova eliminace a positivní definitnost – příklad

Příklad

Upravme matici Gaussovou eliminací za použití pouze příslušné úpravy:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonála je kladná, tudíž matice A je positivně definitní.

- Vidíme, že podmatice vpravo dole jsou stejné jako ty, které vznikají aplikací rekurentního vzorečku.

Poznámka

- Od Gaussovy eliminace ke krůček k determinantům.

Sylvestrovo kriterium

- Hlavní vedoucí podmatice A_i matice A je levá horní podmatice A velikosti i.
  (tj. vznikne z A odstraněním posledních $n - i$ řádků a sloupců).

Tvrzení (Sylvestrovo kriterium positivní definitnosti)

Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je positivně definitní právě tehdy, když determinanty hlavních vedoucích podmatic $A_1, \dots, A_n$ jsou kladné.

Důkaz.

Uprav matici A na REF tvar R jen s úpravami z minulého tvrzení.

Pak hlavní podmatice R jsou REF tvary hlavních podmatic A.

• **Implikace "$\Rightarrow$".** Diagonála R i hlavních podmatic je kladná, takže determinanty jsou taky kladné.

• **Implikace "$\Leftarrow$".**
Během Gaussovy eliminace matice A jsou všechny pivoty kladné, neboť pokud je i-tý pivot první nekladný, pak $\det(A_i) \leq 0$. $\square$

Sylvestrovo kriterium – příklad

Příklad

Uvažujme opět matici:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Aplikujme Sylvestrovo kriterium:

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= \det\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} = 4, \\ \det(A_2) &= \det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = 36, \\ \det(A_3) &= \det\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = 36. \end{aligned}$$

Determinanty jsou kladné, a proto je matice A positivně definitní.

Sylvestrovo kriterium positivní semidefinitnosti

- Positivní definitnost a semidefinitost jsou podobné vlastnosti, ale metody této sekce mají pro PSD dost odlišnou podobu.
- Jen hlavní vedoucí podmatice nestačí, viz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- *Hlavní podmatice* je matice, která vznikne z A odstraněním určitého počtu (i nulového) řádků a sloupců s týmiž indexy.

Tvrzení (Sylvestrovo kriterium positivní semidefinitnosti)

Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je positivně semidefinitní právě tehdy, když determinanty všech hlavních podmatic jsou nezáporné.

Poznámka (Porovnání PD a PSD)

- Sylvestrovo kriterium pro PD: n determinantů
- Sylvestrovo kriterium pro PSD: $2^n - 1$ determinantů.

Choleského rozklad

Věta (Choleského rozklad)

Pro každou positivně definitní matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje jediná dolní trojúhelníková matice $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s kladnou diagonálou taková, že

$$A = LL^T.$$

Důkaz (1/2).

Mat. indukcí podle n. Pro $n = 1$ máme $A = (a_{11})$ a $L = (\sqrt{a_{11}})$.

Indukční krok $n \leftarrow n-1$. Mějme $A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix}$.

Podle rekurentního vzorečku je $\alpha > 0$ a $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T$ je pos. definitní.

Dle indukčního předpokladu existuje dolní trojúhelníková matice $\tilde{L}$ s kladnou diagonálou tak, že $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T = \tilde{L}\tilde{L}^T$.

Volme $L = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & o^T \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}}a & \tilde{L} \end{pmatrix}$, neboť

$$LL^T = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & o^T \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}}a & \tilde{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & \frac{1}{\sqrt{\alpha}}a^T \\ o & \tilde{L}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \frac{1}{\alpha}aa^T + \tilde{L}\tilde{L}^T \end{pmatrix} = A.$$

Choleského rozklad

Věta (Choleského rozklad)

Pro každou positivně definitní matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje jediná dolní trojúhelníková matice $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s kladnou diagonálou taková, že

$$A = LL^T.$$

Důkaz (2/2).

Pro důkaz jednoznačnosti mějme jiný rozklad $A = L'L'^T$, kde

$$L' = \begin{pmatrix} \beta & o^T \\ b & \tilde{L}' \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix} = A = L'L'^T = \begin{pmatrix} \beta^2 & \beta b^T \\ \beta b & bb^T + \tilde{L}'\tilde{L}'^T \end{pmatrix}.$$

Porovnáním dostaneme: $\beta = \sqrt{\alpha}$, $b = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}a$, $\tilde{A} = bb^T + \tilde{L}'\tilde{L}'^T$,

Tudíž $\tilde{L}'\tilde{L}'^T = \tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T$, jenže podle indukčního předpokladu je $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T = \tilde{L}\tilde{L}^T$ jednoznačné, tedy $\tilde{L}' = \tilde{L}$, a proto i $L' = L$. $\square$

Choleského rozklad – příklad

Příklad

Počítáme prvky L od prvního sloupce shora dolů

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Choleského rozklad – odvození algoritmu

Základní idea

- Postupně z rovnice $A = LL^T$ porovnávat shora prvky v prvním sloupci matice nalevo a napravo, pak ve druhém sloupci atd.

Prvek ℓ_{kk}

- Nechť už známe první až $(k-1)$-ní sloupec matice L.
- Ze vztahu $A = LL^T$ odvodíme pro prvek na pozici (k, k)

$$a_{kk} = \sum_{j=1}^{n} L_{kj}(L^T)_{jk} = \sum_{j=1}^{n} \ell_{kj}^2 = \sum_{j=1}^{k} \ell_{kj}^2.$$

- Vyjádříme neznámou hodnotu ℓ_{kk} (ostatní již známe):

$$\ell_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{kj}^2}.$$

Dobře definované pro pokud A je positivně definitní.

Choleského rozklad – odvození algoritmu

Základní idea

- Postupně z rovnice $A = LL^T$ porovnávat shora prvky v prvním sloupci matice nalevo a napravo, pak ve druhém sloupci atd.

Prvek ℓ_{ik}, $i > k$

- Nechť z L známe navíc hodnoty prvních $i-1$ prvků sloupce k.
- Ze vztahu $A = LL^T$ odvodíme pro prvek na pozici (i,k), kde $i > k$,

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}(L^T)_{jk} = \sum_{j=1}^{n} \ell_{ij}\ell_{kj} = \sum_{j=1}^{k} \ell_{ij}\ell_{kj}.$$

Vyjádříme neznámou hodnotu ℓ_{ik} (ostatní již známe):

$$\ell_{ik} = \frac{1}{\ell_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{ij}\ell_{kj} \right).$$

Choleského rozklad – algoritmus

Algoritmus (Choleského rozklad)

Vstup: symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. $L := 0_n$,
2. **for** $k := 1$ **to** n **do** //v k-tém cyklu určíme hodnoty L_{*k}
3. **if** $a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{kj}^2 \leq 0$ **then return** "A není pos. definitní",
4. $\ell_{kk} := \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{kj}^2}$,
5. **for** $i := k+1$ **to** n **do**
6. $\ell_{ik} := \frac{1}{\ell_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{ij} \ell_{kj} \right)$,
7. **end for**
8. **end for**

Výstup: $A = LL^T$ nebo informace, že A není positivně definitní.

Choleského rozklad pro řešení soustavy $Ax = b$

Základní idea:

Pokud máme rozklad $A = LL^T$, pak soustava má tvar $L(L^T x) = b$. Substituuj $y = L^T x$, vyřeš soustavu $Ly = b$, a potom $L^T x = y$.

Výsledný postup:

1. Najdi Choleského rozklad $A = LL^T$.
2. Najdi řešení y^* soustavy $Ly = b$ pomocí dopředné substituce.
3. Najdi řešení x^* soustavy $L^T x = y^*$ pomocí zpětné substituce.

Poznámka

Tato metoda je řádově o 50 % rychlejší než Gaussova eliminace.

Choleského rozklad pro řešení soustavy $Ax = b$

Příklad

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 4 & 4 \\ -2 & 10 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

1. Choleského rozklad $A = LL^T$, kde

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Najdi řešení y^* soustavy $Ly = b$ pomocí dopředné substituce:

$$(L \mid b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad y^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

3. Najdi řešení x^* soustavy $L^T x = y^*$ pomocí zpětné substituce:

$$(L^T \mid y^*) = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad x^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Následující téma

Positivní definitnost a skalární součin

Věta (Skalární součin a positivní definitnost)

Operace $\langle x, y\rangle$ je skalární součin v $\mathbb{R}^n$ právě tehdy, když má tvar

$$\langle x, y\rangle = x^T A y$$

pro nějakou positivně definitní matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Důkaz.

- **Implikace "$\Rightarrow$".**

Víme (Viz str. 37), že každý skalární součin v $\mathbb{R}^n$ je tvaru

$$\langle x, y\rangle = x^T (R^T R) y.$$

- **Implikace "$\Leftarrow$".** Ověříme axiomy skalárního součinu, mj.:
  - $\langle x, x\rangle = x^T A x \geq 0$ a nulové jen pro $x = o$,
  - $\langle x, y\rangle = x^T A y = (x^T A y)^T = y^T A^T x = y^T A x = \langle y, x\rangle.$ $\square$

Positivní definitnost a skalární součin

Věta (Skalární součin a positivní definitnost)

Operace $\langle x, y\rangle$ je skalární součin v $\mathbb{R}^n$ právě tehdy, když má tvar

$$\langle x, y\rangle = x^T A y$$

pro nějakou positivně definitní matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Důsledek

Norma indukovaná výše zmíněným skalárním součinem je

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x^T A x}.$$

V této normě má jednotková koule tvar elipsoidu.

Příklad

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 7x_2 y_2 + 3x_2 y_3 + 3x_3 y_2 + 2x_3 y_3 \\ &= x^T \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} y = x^T A y. \end{aligned}$$

Protože A je positivně definitní, je zobrazení skalární součin.

Positivní definitnost a skalární součin

Poznámka (Standardní a nestandardní skalární součin)

Uvažujme nestandardní skalární součin $\langle x, y \rangle = x^T A y$

- A je positivně definitní, lze rozložit jako
$$A = R^T R,$$
kde R je regulární.
- Buď B báze tvořená sloupci matice R^{-1}. Potom
$$R^{-1} = {}_{\mathrm{kan}}[id]_B \text{ je matice přechodu od } B \text{ do kan. báze,}$$
$$R = {}_B[id]_{\mathrm{kan}} \text{ je matice přechodu od kan. báze do } B.$$
- Nyní $x^T A y = x^T R^T R y = (Rx)^T (Ry) = [x]_B^T [y]_B$.
- Nestandardní skalární součin lze vyjádřit jako standardní skalární součin vzhledem k určité bázi.

Odmocnina z matice

Tvrzení (Odmocnina z matice)

Pro každou positivně semidefinitní matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existuje positivně semidefinitní matice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že

$$B^2 = A.$$

Důkaz.

Nechť A má spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^T$, kde

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0.$$

Definujme diagonální matici

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\lambda_n} & \end{pmatrix}.$$

Pak matice $B = Q\Lambda' Q^T$ splňuje

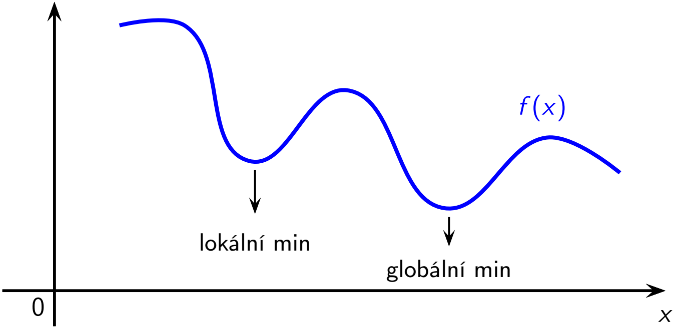
$$B^2 = Q\Lambda' Q^T Q\Lambda' Q^T = Q\Lambda'^2 Q^T = Q\Lambda Q^T = A. \qquad \square$$

Positivní definitnost a optimalizace

Optimalizace je všude:

- výnos v ekonomii; transport zboží, osob; design staveb; příroda

Hledání minima:

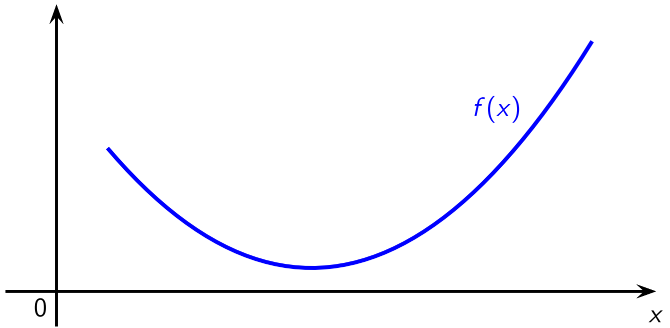


- Positivní definitnost Hessovy matice

Positivní definitnost – další aplikace

Konvexita funkce:

- Positivní semidefinitnost Hessovy matice



Statistika:

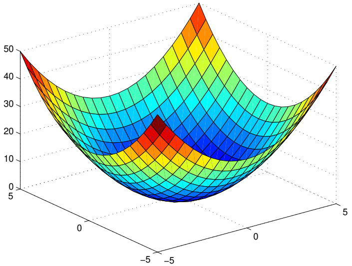
- Kovarianční matice je vždy positivně semidefinitní.

Následující téma

Úvod – výraz $x^T Ax$

Výraz $x^T Ax$ (kvadratické formy)

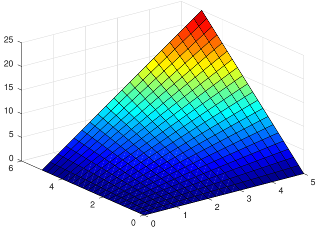
- Setkali jsme se s ním u positivní (semi-)definitnosti.
- $f(x) = x^T Ax = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$
  - příklad pro $n = 1$: $f(x) = 7x^2$
  - příklad pro $n = 2$: $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 3x_1x_2 + 12x_2^2$
    (součet stupňů každého členu je 2)



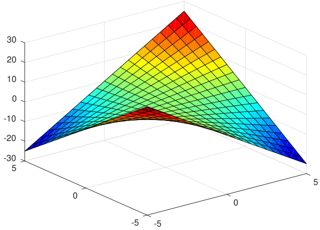
Úvod – výraz $x^T Ay$

Výraz $x^T Ay$ (bilineární formy)

- Setkali jsme se s ním u skalárního součinu.
- Například:
  - příklad pro $n = 1$: $f(x, y) = 7xy$
  - příklad pro $n = 2$: $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = 5x_1y_1 - 3x_1y_2 + 12x_2y_2$



$b(x, y) = xy$
na intervalu $[0, 5]^2$



$b(x, y) = xy$
na intervalu $[-5, 5]^2$

Bilineární a kvadratická forma

Definice (Bilineární a kvadratická forma)

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$.

1. **Bilineární forma** je zobrazení $b\colon V^2 \to \mathbb{T}$, které je lineární v první i druhé složce zvlášť, tj.
$$b(\alpha u + \beta v, w) = \alpha b(u, w) + \beta b(v, w), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{T}, \forall u, v, w \in V,$$
$$b(w, \alpha u + \beta v) = \alpha b(w, u) + \beta b(w, v), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{T}, \forall u, v, w \in V.$$
2. Bilineární forma se nazývá **symetrická**, pokud
$$b(u, v) = b(v, u) \quad \forall u, v \in V.$$
3. Zobrazení $f\colon V \to \mathbb{T}$ je **kvadratická forma**, pokud
$$f(u) = b(u, u)$$
pro nějakou symetrickou bilineární formu b.

Poznámka

- Je snadno vidět, že platí $b(o, v) = b(v, o) = 0$, $f(o) = 0$.
- Symetrizace $\frac{1}{2}\big(b(u, v) + b(v, u)\big)$ pro nesym. bilin. formu. (Indukují stejnou kvadratickou formu. Musí $char(\mathbb{T}) \neq 2$.)

Bilineární a kvadratická forma – příklady

Příklady forem

- Reálný skalární součin na prostoru V je bilineární formou.
- Komplexní skalární součin není bilineární formou.
  (Není lineární v druhé složce.)
- Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je zobrazení
  $$b(x, y) = x^T A y$$
  bilineární formou.

  (**Důkaz.** Buď $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Pak pro první složku
  $$\begin{aligned} b(\alpha x + \beta x', y) &= (\alpha x + \beta x')^T A y = \alpha x^T A y + \beta x'^T A y \\ &= \alpha b(x, y) + \beta b(x', y) \end{aligned} \qquad \square)$$
- Pro symetrickou matici A je pak kvadratickou formou zobrazení
  $$f(x) = x^T A x.$$

Bilineární a kvadratická forma – příklady

Příklady forem

- Bilineární forma na $V = \mathbb{R}^2$:

$$b(x, y) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 4x_2 y_1 + 10x_2 y_2$$

Odpovídající maticové vyjádření:

$$b(x, y) = x^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} y$$

- Symetrická bilineární forma na $V = \mathbb{R}^2$:

$$b'(x, y) = x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 10x_2 y_2$$

Odpovídající kvadratická forma:

$$f(x) = b'(x, x) = x_1^2 + 6x_1 x_2 + 10x_2^2$$

Maticové vyjádření:

$$f(x) = x^T \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} x$$

Motivace a srovnání – lineární zobrazení

Lineární zobrazení

- definice: $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$
- lineární zobrazení je určeno obrazy báze
- maticová reprezentace $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$: $f(x) = Ax$
- maticová reprezentace $f\colon U \to V$: $[f(x)]_{B_V} = {}_{B_V}[f]_{V_U} \cdot [x]_{B_U}$.
- jednoznačnost matice
- změna matice při změně báze
$$ {}_{B_4}[f]_{B_3} = {}_{B_4}[id]_{B_2} \cdot {}_{B_2}[f]_{B_1} \cdot {}_{B_1}[id]_{B_3} \, . $$

Matice bilineární a kvadratické formy

Poznámka

Buď $b\colon V^2 \to \mathbb{T}$ bilineární forma a $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ báze V.

- Mějme $u = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$, $v = \sum_{i=1}^{n} y_i w_i$.
- Pak
  $$b(u, v) = b(\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i w_i, \sum_{j=1}^{n} y_j w_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j b(w_i, w_j).$$
- Bilineární forma je určena obrazy dvojic bázických vektorů.

Definice (Matice bilineární a kvadratické formy)

Buď $b\colon V^2 \to \mathbb{T}$ bilineární forma a $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ báze V. **Matice bilineární formy** b vzhledem k bázi B je $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$, kde

$$a_{ij} = b(w_i, w_j).$$

Matice kvadratické formy $f\colon V \to \mathbb{T}$ je matice libovolné symetrické bilineární formy indukující f.

Maticové vyjádření forem

Věta (Maticové vyjádření forem)

Buď B báze prostoru V a buď b bilineární forma na V.
Pak A je matice formy b vzhledem k bázi B právě tehdy, když

$$b(u,v) = [u]_B^T A [v]_B, \quad \forall u, v \in V.$$

Je-li b symetrická forma, pak pro odpovídající kvadratickou formu f:

$$f(u) = [u]_B^T A [u]_B \quad \forall u \in V.$$

Důkaz.

Nechť $x := [u]_B$, $y := [v]_B$, $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$.

- Implikace "$\Rightarrow$". Je-li A matice formy b, tak

$$b(u,v) = b\left(\sum_{i=1}^n x_i w_i, \sum_{j=1}^n y_j w_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j b(w_i, w_j) = x^T A y.$$

- Implikace "$\Leftarrow$". Dosazením $u := w_i$, $v := w_j$ dostaneme

$$b(w_i, w_j) = [w_i]_B^T A [w_j]_B = e_i^T A e_j = a_{ij} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

- Kvadratická forma $f(u) = b(u,u) = x^T A x$. $\square$

Existence, jednoznačnost a prostor forem

Důsledek (Existence a jednoznačnost)

Buď $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ báze prostoru V nad $\mathbb{T}$ a buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$. Pak existuje jediná bilineární forma $b\colon V^2 \to \mathbb{T}$ taková, že

$$b(w_i, w_j) = a_{ij} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Důkaz.

Existence. Stačí ověřit, že $b(u, v) = [u]_B^T A [v]_B$ splňuje podmínky bilineární formy (zobrazení $u \mapsto [u]_B$ je lineární).

Jednoznačnost. Pro každé $u, v \in V$ je $b(u, v) = [u]_B^T A [v]_B$, tedy obrazy jsou jednoznačně dány. $\square$

Prostor bilineárních forem na prostoru V dimenze n

- Buď B pevná báze prostoru V dimenze n.
- Každé bilineární formě odpovídá jednoznačná matice $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$.
- Prostor bilineárních forem je isomorfní s $\mathbb{T}^{n\times n}$.

Maticové vyjádření forem v prostoru $\mathbb{T}^n$

Důsledek

*Každá **bilineární** forma na $\mathbb{T}^n$ se dá vyjádřit ve tvaru*

$$b(x,y) = x^T A y$$

pro určitou matici $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$.

*Každá **kvadratická** forma na $\mathbb{T}^n$ se dá vyjádřit ve tvaru*

$$f(x) = x^T A x$$

pro určitou symetrickou matici $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$.

Důkaz.

Stačí vzít A jako matici formy vzhledem ke kanonické bázi. Pak

$$b(x,y) = [x]_{\mathrm{kan}}^T A [y]_{\mathrm{kan}} = x^T A y.$$

Pro kvadratickou formu pak platí $f(x) = b(x,x) = x^T A x$.

Matice A je symetrická, protože kvadratická forma $f(x)$ je generovaná symetrickou bilineární formou. $\square$

Maticové vyjádření forem v prostoru $\mathbb{T}^n$ – příklad

Příklad

- Uvažme bilineární formu na $\mathbb{R}^2$
$$b(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_1 + 10x_2y_2.$$
Matice b vzhledem ke kanonické bázi je $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{smallmatrix}\right)$, tedy
$$b(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j = x^TAy = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$
- Symetrická bilineární forma:
$$b'(x,y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 10x_2y_2.$$
Matice b' vzhledem ke kanonické bázi je $A' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$.
- Odpovídající kvadratická forma
$$f'(x) = x^TA'x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 6x_1x_2 + 10x_2^2.$$

Maticové vyjádření forem v prostoru $\mathbb{T}^n$ – příklad

Příklad

Uvažme zobrazení

$$f(x) = x_1 x_2.$$

Je to kvadratická forma?

Matice kvadratické formy při změně báze

- Jak se změní matice, když přejdeme k jiné bázi?

Tvrzení (Matice kvadratické formy při změně báze)

Buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ matice kvadratické formy f vzhledem k bázi B. Buď B' jiná báze a $S = {}_B[id]_{B'}$ matice přechodu od B' k B. Pak matice formy f vzhledem k bázi B' je

$$S^T A S$$

a odpovídá stejné symetrické bilineární formě.

Důkaz.

Buď $u, v \in V$ a b symetrická bilineární forma indukující f. Pak

$$\begin{aligned} b(u,v) &= [u]_B^T A [v]_B = ({}_B[id]_{B'} \cdot [u]_{B'})^T A ({}_B[id]_{B'} \cdot [v]_{B'}) \\ &= [u]_{B'}^T S^T A S [v]_{B'}. \end{aligned}$$

Podle věty o maticovém vyjádření forem jsme hotovi. □

- Cíl: najít takovou bázi, vůči níž je matice co nejjednodušší.
- Srovnej: diagonalizace matice v teorii vlastních čísel ($S^{-1}AS$).

Následující téma

Sylvestrův zákon setrvačnosti

- Uvažujeme reálný prostor $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$.
- Matice kvadratické formy je symetrická.

Věta (Sylvestrův zákon setrvačnosti)

Buď $f(x) = x^T A x$ kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$.

Pak existuje báze, vůči níž má f diagonální matici s prvky $1, -1, 0$.

Navíc, tato matice je až na pořadí prvků jednoznačná.

Důkaz (existence).

Protože A je symetrická, tak má spektrální rozklad

$$A = Q \Lambda Q^T, \quad \text{kde } \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Tedy $\Lambda = Q^T A Q$ je diagonalizace formy.

Abychom docílili na diagonále ± 1, tak provedeme ještě úpravu

$$\Lambda' Q^T A Q \Lambda',$$

kde Λ' je diagonální s prvky $\Lambda'_{ii} = |\lambda_i|^{-\frac{1}{2}}$ pro $\lambda_i \neq 0$ a $\Lambda'_{ii} = 1$ jinak.

Nyní asociuj $Q\Lambda' = {}_{\text{kan}}[id]_B$ a máme bázi B. $\square$

Sylvestrův zákon setrvačnosti

Důkaz (jednoznačnost).

Sporem předpokládejme dvě různé diagonalizace D, D':

$$D = \mathrm{diag}(1, \dots, -1, \dots, 0), \quad p \text{ jedniček, } q - p \text{ minus jedniček}$$

$$D' = \mathrm{diag}(1, \dots, -1, \dots, 0), \quad s \text{ jedniček, } t - s \text{ minus jedniček}$$

Příslušné báze $B = \{w_1, \dots, w_n\}$, $B' = \{w'_1, \dots, w'_n\}$.

Buď $u \in \mathbb{R}^n$ libovolné a označ $y = [u]_B$, $z = [u]_{B'}$. Pak

$$f(u) = y^T D y = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_q^2 + 0y_{q+1}^2 + \ldots + 0y_n^2,$$

$$f(u) = z^T D' z = z_1^2 + \ldots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \ldots - z_t^2 + 0z_{t+1}^2 + \ldots + 0z_n^2.$$

Platí $q = t$, protože $D = S^T D' S$ pro nějakou regulární S.

Zbývá ukázat, že $p = s$. Pro spor nechť $p > s$.

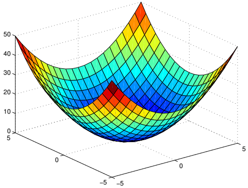
Pro prostory $P = span\{w_1, \dots, w_p\}$, $R = span\{w'_{s+1}, \dots, w'_n\}$ je

$$dim\, P \cap R = dim\, P + dim\, R - dim\,(P + R) \geq p + (n - s) - n \geq 1.$$

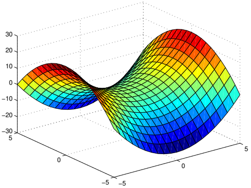
Tedy existuje nenulový vektor $u \in P \cap R$ a pro něj máme

$$u = \begin{cases} \sum_{i=1}^{p} y_i w_i, \\ \sum_{j=s+1}^{n} z_j w'_j, \end{cases} \qquad f(u) = \begin{cases} y_1^2 + \ldots + y_p^2 > 0, \\ -z_{s+1}^2 - \ldots - z_t^2 \leq 0. \end{cases} \qquad \square$$

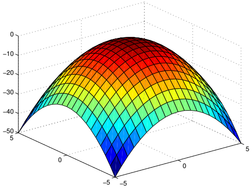
Kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$



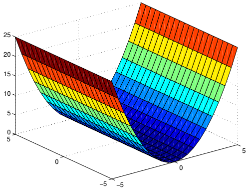
$x_1^2 + x_2^2$



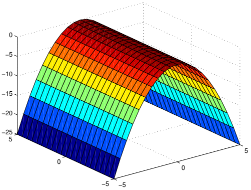
$x_1^2 - x_2^2$



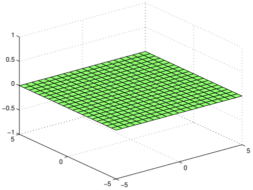
$-x_1^2 - x_2^2$



x_1^2



$-x_1^2$



0

Sylvestrův zákon setrvačnosti

Definice (Polární báze)

Polární báze je báze, vůči níž matice kvadratické formy je diagonální.

Poznámka

- Polární báze není jednoznačná.
- Existuje i pro prostory nad tělesem charakteristiky různé od 2.

Dvě interpretace diagonalizace

- **Geometrická**: najít vhodný souřadný systém (tj. bázi), ve kterém má kvadratická forma jednoduchý diagonální tvar.
- **Algebraická**: danou symetrickou matici A transformujeme na diagonální tvar pomocí úprav $S^T AS$, kde S je regulární.

Význam Sylvestrova zákona setrvačnosti

- Nejen existence diagonalizace, ale zejména její jednoznačnost.
- **Signatura**: trojice (p, q, z), kde p je počet jedniček, q počet minus jedniček a z počet nul ve výsledné diagonální matici.
- Důsledky ohledně positivní (semi-)definitnosti a vlastních čísel.

Sylvestrův zákon setrvačnosti – důsledky

Důsledek

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická a $S^T A S$ převedení na diagonální tvar. Pak počet jedniček / minus jedniček / nul na diagonále odpovídá počtu kladných / záporných / nulových vlastních čísel matice A.

Důkaz.

Stačí uvažovat kvadratickou formu $f(x) = x^T A x$.

Z důkazu věty o Sylvestrův zákonu ("existence") víme, že jednu diagonalizaci získáme ze spektrálního rozkladu a pro ni tvrzení platí.

Z jednoznačnosti musí počty souhlasit i pro jinou diagonalizaci. $\square$

Poznámka

- Diagonalizací matice A tedy nenajdeme vlastní čísla, ale určíme kolik jich je kladných a kolik záporných.
- Aplikací na matici $A - \alpha I_n$ zjistíme, kolik vlastních čísel matice A je větších / menších / rovno číslu α.

  Takto lze aproximovat vlastní čísla a odhad dál zpřesňovat.

Sylvestrův zákon setrvačnosti – důsledky

Důsledek

Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická a $S^T AS$ její diagonální tvar. Pak:

1. *A je positivně definitní právě tehdy, když $S^T AS$ má kladnou diagonálu,*
2. *A je positivně semidefinitní právě tehdy, když $S^T AS$ má nezápornou diagonálu.*

Důkaz.

Ze vztahu mezi positivní (semi-)definitností a vlastními čísly. □

Poznámka

- Sylvestrův zákon tedy dává návod, jak jednou metodou rozhodnout o positivní definitnosti resp. positivní semidefinitnosti resp. negativní (semi-)definitnosti v jednom.

Diagonalizace matice pomocí elementárních úprav

- Jak diagonalizovat matici A (resp. kvadratickou formu)?
- Jedna možnost: z důkazu věty přes spektrální rozklad.

Diagonalizace pomocí elementárních úprav

- Co se stane, když matici A transformujeme na EAE^T, kde E je matice elementární řádkové úpravy?
- Součinem EA se provede řádková úprava a vynásobením E^T zprava se provede i analogická sloupcová úprava.
- Základní myšlenka metody je tedy aplikovat na matici řádkové úpravy a odpovídající sloupcové úpravy.
- Tím budeme nulovat prvky pod i nad diagonálou, až matici převedeme na diagonální tvar.

Diagonalizace matice pomocí elementárních úprav

Příklad

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Závěr: matice je positivně semidefinitní.

Diagonalizace matice pomocí elementárních úprav

Příklad

Diagonalizujte matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Nestačí prohodit oba řádky, protože musíme prohodit i sloupce a dostaneme opět matici A.
- Můžeme ale k prvnímu řádku přičíst druhý řádek a analogicky pro sloupce, což vede na matici s nenulovým pivotem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Tento postup lze aplikovat obecně.
- Tudíž pomocí elementárních úprav dokážeme diagonalizovat každou matici kvadratické formy.

Nalezení polární báze

- Uvaž kvadratickou formu $f(x) = x^T Ax$, kde A je symetrická.
- Je-li $S^T AS$ je diagonální, pak je polární báze obsažena ve sloupcích matice S, protože $S = {}_{\text{kan}}[id]_B$.
- Jak ovšem matici S nalézt?

Metoda

- Upravujeme dvojmatici $(A \mid I_n)$ tak, že na matici A aplikujeme řádkové a sloupcové úpravy, ale na I_n pouze sloupcové úpravy.
- Polární bázi pak vyčteme ve sloupcích matice napravo:
$$(A \mid I_n) \sim (S^T AS \mid S)$$
- Analogie invertování matice $(A \mid I_n) \sim (I_n \mid A^{-1})$.

Nalezení polární báze – příklad

Příklad

$$
\begin{aligned}
(A \mid I_3) &= \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

Příslušná polární báze: $(1,0,0)^T$, $(-2,1,0)^T$, $(-1,1,1)^T$.

Součet čtverců lineárních forem

- Pokud $f(x) = x^T Ax$ dokážeme vyjádřit jako součet čtverců, potom $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ a matice A je positivně semidefinitní.
- Zajímavé je, že platí i opačný směr!

Postup

- Najdeme matici S, pro kterou je $S^T AS = D$ diagonální.
- Pak $A = S^{-T} DS^{-1}$ a substitucí $y \coloneqq S^{-1}x$ dostáváme

$$x^T Ax = x^T S^{-T} DS^{-1}x = y^T Dy = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} (S_{i*}^{-1}x)^2.$$

Součet čtverců lineárních forem – příklad

Příklad

$$f(x) = x^T A x, \quad \text{kde } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

Spočítáme

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ii}(S_{i*}^{-1}x)^2 = (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2.$$

Dokázali jsme tedy vyjádřit

$$\begin{aligned} x^T A x &= x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 6x_2x_3 + 2x_3^2 = \\ &= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2. \end{aligned}$$

Následující téma

Kuželosečky a kvadriky

Kvadriky

- Původní cíl: zkoumat funkci $f(x) = x^T Ax$.
- Podobný cíl: Co popisuje rovnice $x^T Ax + b^T x + c = 0$?
  (Zde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$)
- Pomocí signatury matice A aj. můžeme klasifikovat jednotlivé geometrické tvary kvadrik.
  Těmito tvary jsou elipsoidy, paraboloidy, hyperboloidy atp.

Kuželosečky

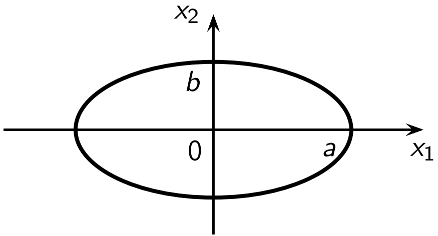
- Speciální případ kvadrik v prostoru $\mathbb{R}^2$.
- Mezi ně patří elipsy, paraboly či hyperboly.

Elipsoidy

Příklad (Elipsa a elipsoid)

Rovnice $\frac{1}{a^2}x_1^2 + \frac{1}{b^2}x_2^2 = 1$

- popisuje v rovině $\mathbb{R}^2$ elipsu se středem v počátku, poloosy jsou ve směru souřadných os x_1, x_2 a mají délky a resp. b.



- Podobně pro vyšší dimenze: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}x_i^2 = 1$.

  To je vlastně rovnice $x^T Ax = 1$, kde $A = \mathrm{diag}(a_1^{-2}, \dots, a_n^{-2})$.

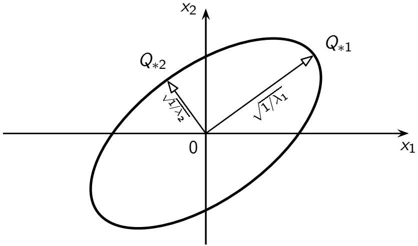
Elipsoidy

Obecný tvar $x^T Ax = 1$, kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je positivně definitní

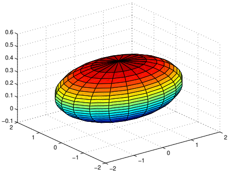
- Buď $A = Q\Lambda Q^T$ spektrální rozklad. Substituuj $y := Q^T x$:

$$1 = x^T Ax = x^T Q\Lambda Q^T x = y^T \Lambda y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(\lambda_i^{-1/2}\right)^2} y_i^2.$$

- To je elipsoid se středem v počátku, poloosy jsou ve směru souřadnic a mají délky $\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_n^{-1/2}$.
- Vrátíme zpět transformací $x = Qy$, tvar se zachová.
- Poloosy elipsoidu jsou ve směrech vlastních vektorů A. (kan se zobrazí na sloupce matice Q)

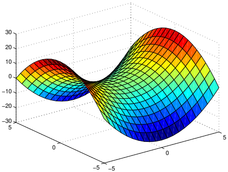


Kvadriky v $\mathbb{R}^3$ (některé)



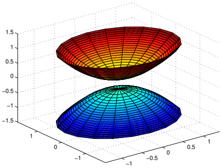
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

elipsoid



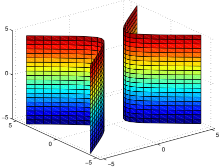
$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - x_3 = 0$$

hyperbolický paraboloid



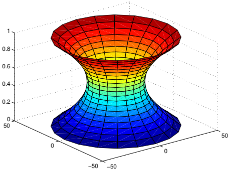
$$-\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

dvojdílný hyperboloid



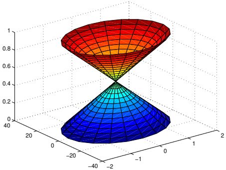
$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

hyperbol. válcová plocha



$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

jednodílný hyperboloid



$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0$$

kuželová plocha

Následující téma

Maticové rozklady - úvod

- LU rozklad čtvercové matice $A = LU$
- spektrální rozklad diagonalizovatelné matice $A = S\Lambda S^{-1}$
- spektrální rozklad symetrické matice $A = Q\Lambda Q^T$
- Choleského rozklad positivně definitní matice $A = LL^T$
- diagonalizace matice kvadratické formy $A = SDS^T$

Top 10 algoritmy 20. století

[J. Dongarra a F. Sullivan, The Top Ten Algorithms of the Century, 2000.]

1. Metoda Monte Carlo
   (1946, J. von Neumann, S. Ulam, and N. Metropolis)
2. Simplexová metoda pro lineární programování
   (1946, G. Dantzig)
3. Iterační metody Krylovových podprostorů
   (1950, M. Hestenes, E. Stiefel, C. Lanczos)
4. Dekompozice matic (1951, A. Householder)
5. Překladač Fortranu (1957, J. Backus)
6. QR algoritmus pro výpočet vlastních čísel (1961, J. Francis)
7. Quicksort (1962, A. Hoare)
8. Rychlá Fourierova transformace (1965, J. Cooley, J. Tukey)
9. Integer relation detection algorithm
   (1977, H. Ferguson, R. Forcade)
10. Fast multipole algorithm (1987, L. Greengard, V. Rokhlin)

Následující téma

QR rozklad

Věta (QR rozklad)

Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existuje ortogonální $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a horní trojúhelníková $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s nezápornou diagonálou tak, že

$$A = QR.$$

Poznámka

- Alternativa k LU rozkladu, ale lepší numerické vlastnosti.

QR rozklad pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace

- Ortogonalizace sloupců matice A vede na $Q = A\tilde{R}$

Následující téma

SVD rozklad (singular value decomposition)

Věta (SVD rozklad)

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$*,* $q \coloneqq \min\{m, n\}$*. Pak existuje diagonální matice* $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *s prvky* $\sigma_{11} \geq \ldots \geq \sigma_{qq} \geq 0$ *a ortogonální matice* $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$*,* $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *takové, že*

$$A = U \Sigma V^T.$$

- Singulární čísla $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ jsou (kladné) diagonální prvky Σ.
- Zjevně $r = rank(A)$.
- Singulární čísla jsou jednoznačná, ale matice U, V ne.
- Proč V^T, a ne V?

Redukovaný SVD rozklad (ekvivalentní vyjádření)

$$A = U \Sigma V^T = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 S V_1^T.$$

kde $S \coloneqq \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ je regulární.

SVD rozklad a spektrální rozklad

Věta (Vztah singulárních a vlastních čísel)

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $r = rank(A)$, a nechť $A^T A$ má vlastní čísla $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Pak singulární čísla matice A jsou

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Důkaz.

Nechť $A = U \Sigma V^T$ je SVD rozklad A. Pak

$$A^T A = V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^T \Sigma V^T = V \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0) V^T,$$

což je spektrální rozklad positivně semidefinitní matice $A^T A$. $\square$

Příklad

Singulární čísla ortogonální matice.

Návod na konstrukci SVD

- Matice Σ, V ze spektrálního rozkladu matice $A^T A$.
- Matice Σ, U ze spektrálního rozkladu $A A^T$ použít nelze!

Konstrukce SVD rozkladu

Algoritmus (SVD rozklad)

Vstup: matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

1: Sestroj $V\Lambda V^T$ spektrální rozklad matice A^TA;
2: $r := rank(A)$;
3: $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, r$;
4: $S := \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, $\Sigma := \left(\begin{smallmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$;
5: buď V_1 matice tvořená prvními r sloupci V;
6: $U_1 := AV_1S^{-1}$;
7: doplň U_1 na ortogonální matici $U = (U_1 \mid U_2)$;

Výstup: SVD rozklad $A = U\Sigma V^T = U_1 S V_1^T$.

Poznámka

- Odvození kroku 6 z rovnice $A = U_1 S V_1^T$

SVD rozklad – příklad

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Spektrální rozklad matice $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \equiv V \Lambda V^T.$$

Určení $S = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Určení $U_1 = AV_1 S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

Výsledný SVD rozklad:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \equiv U \Sigma V^T.$$

SVD rozklad symetrické matice

Buď $A = Q\Lambda Q^T$ spektrální rozklad symetrické $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Je-li navíc matice A positivně definitní, pak
  - spektrální rozklad je zároveň jejím SVD rozkladem
    $$A = Q\Lambda Q^T = U\Sigma V^T,$$
    protože lze volit $U = Q$, $\Sigma = \Lambda$ a $V = Q$.
  - pak jen setřídit vlastní čísla a sloupce matice U
- Obecně:
  singulární čísla jsou absolutní hodnoty z vlastních čísel.
  - SVD rozklad může být tvaru $A = U\Sigma V^T$,
  - zde $U = Q'$, $\Sigma = |\Lambda|$, $V = Q$
  - matice Q' vznikne z Q přenásobením -1 těch sloupců, které odpovídají záporným vlastním číslům.

Následující téma

SVD a ortogonalizace

- SVD rozklad lze použít k ortogonalizaci (nejen) prostoru $\mathcal{S}(A)$.
- Nemusíme předpokládat lineární nezávislost sloupců matice A.

Věta

Nechť $A = U_1 S V_1^T$ je redukovaný SVD rozklad matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

1. *Sloupce U_1 tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathcal{S}(A)$.*
2. *Sloupce V_1 tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathcal{R}(A)$.*
3. *Sloupce V_2 tvoří ortonormální bázi prostoru $Ker(A)$.*

Důkaz.

1. Z rovnice $A = U_1 S V_1^T$ odvoď $AV_1 = U_1 S$.
   Nyní $\mathcal{S}(A) \Supset \mathcal{S}(AV_1) = \mathcal{S}(U_1 S) = \mathcal{S}(U_1)$ díky regularitě S.
   Protože $rank(A) = rank(U_1)$, máme rovnost $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(U_1)$.
2. $A^T = V_1 S U_1^T$ je redukovaný SVD rozklad matice A^T.
3. Sloupce V_1 tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathcal{R}(A) = Ker(A)^\perp$.
   Proto sloupce V_2, které doplňují sloupce V_1 na ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$, představují ortonormální bázi $Ker(A)$. $\square$

SVD a projekce do podprostoru

- Nemusíme předpokládat lineární nezávislost sloupců matice A.

Věta

Nechť $A = U_1 S V_1^T$ je redukovaný SVD rozklad matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak matice projekce do

1. *sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ je $U_1 U_1^T$,*
2. *řádkového prostoru $\mathcal{R}(A)$ je $V_1 V_1^T$.*

Důkaz.

1. Víme $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(U_1)$. Sloupce U_1 tvoří ortonormální systém, a proto matice projekce má tvar $U_1 U_1^T$.
2. Plyne z předchozího díky $\mathcal{R}(A) = \mathcal{S}(A^T)$. □

SVD a geometrie lineárního zobrazení

Uvažujme lineární zobrazení $x \mapsto Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulární.

- Mějme SVD rozklad $A = U\Sigma V^T$
- Zobrazení lze rozložit na složení tří základních zobrazení:
  - ortogonální zobrazení s maticí V^T,
  - škálování podle Σ
  - ortogonální zobrazení s maticí U.

Zobrazujme jednotkovou kouli:

- zobrazení s maticí V^T zobrazí kouli na sebe sama
- Σ ji zdeformuje na elipsoid
- U ji otočí/převrátí
- Obrazem je elipsoid se středem v počátku, poloosy jsou ve směrech sloupců U a délky mají velikost $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.

SVD a číslo podmíněnosti

Číslo podmíněnosti matice A je hodnota $\kappa = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \geq 1$

Číslo podmíněnosti **geometricky**:

- udává, jak moc zobrazení deformuje geometrické útvary
- pro $\kappa = 1$ má elipsoid tvar koule
- čím větší bude κ, tím protáhlejší bude elipsoid

Číslo podmíněnosti **v numerice**:

- Empirické pravidlo: je-li $\kappa \approx 10^k$, pak při výpočtech ztrácíme přesnost o k desetinných míst.
- Ortogonální matice mají $\kappa = 1$
- Hilbertovy matice mají číslo podmíněnosti κ velmi vysoké:

n	číslo podmíněnosti matice H_n
3	≈ 500
5	$\approx 10^5$
10	$\approx 10^{13}$
15	$\approx 10^{17}$

SVD a numerický rank

Hodnost matice A **teoreticky**:

- rovna počtu (kladných) singulárních čísel

Hodnost matice A **prakticky**:

- hodně malé kladné číslo se považuje za praktickou nulu
- Buď $\varepsilon > 0$, pak **numerický rank** matice A je
$$\max\{s;\ \sigma_s > \varepsilon\},$$
tedy počet singulárních čísel větších než ε.
- Například Matlab / Octave definuje
$$\varepsilon := \max\{m, n\} \cdot \sigma_1 \cdot eps,$$
kde $eps \approx 2 \cdot 10^{-16}$ je přesnost počítačové aritmetiky.

SVD a low-rank aproximace

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $A = U\Sigma V^T$ její SVD rozklad.

- ponecháme k největších singulárních čísel a ostatní vynulujeme:

$$\sigma_{k+1} := 0, \dots, \sigma_r := 0$$

- dostaneme matici

$$A' = U \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k, 0, \dots, 0) V^T$$

  hodnosti k, která "nejlépe" aproximuje A.

- V určité normě je ze všech matic hodnosti k právě A' nejblíže matici A.

SVD a low-rank aproximace – příklad

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- redukovaný SVD rozklad:

$$A = U_1 S V_1^T$$
$$= \begin{pmatrix} -0{,}70711 & -0{,}70711 \\ -0{,}70711 & 0{,}70711 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3{,}6056 & 0 \\ 0 & 2{,}2361 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}78446 & 0{,}00000 \\ -0{,}58835 & -0{,}31623 \\ 0{,}19612 & -0{,}94868 \end{pmatrix}^T$$

- vynulováním singulárního čísla $\sigma_2 = 2.2361$ dostaneme:

$$A' = \begin{pmatrix} -0{,}70711 & -0{,}70711 \\ -0{,}70711 & 0{,}70711 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3{,}6056 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}78446 & 0{,}00000 \\ -0{,}58835 & -0{,}31623 \\ 0{,}19612 & -0{,}94868 \end{pmatrix}^T$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 1{,}5 & -0{,}5 \\ 2 & 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

- má hodnost 1 a nejlépe aproximuje původní matici A.

SVD a komprese dat

- Low-rank aproximace k jednoduché metodě na ztrátovou kompresi dat.
- Matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ reprezentuje data.
- Pro redukovaný SVD rozklad $A = U_1 S V_1^T$ třeba zapamatovat $mr + r + nr = (m + n + 1)r$ hodnot, kde $rank(A) = r$.
- Při low-rank aproximaci $A \approx U \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0) V^T$ si stačí pamatovat jen $(m + n + 1)k$ hodnot.
- Tedy kompresní poměr je $k : r$.
- Čím menší k, tím menší objem dat, ale i horší aproximace.

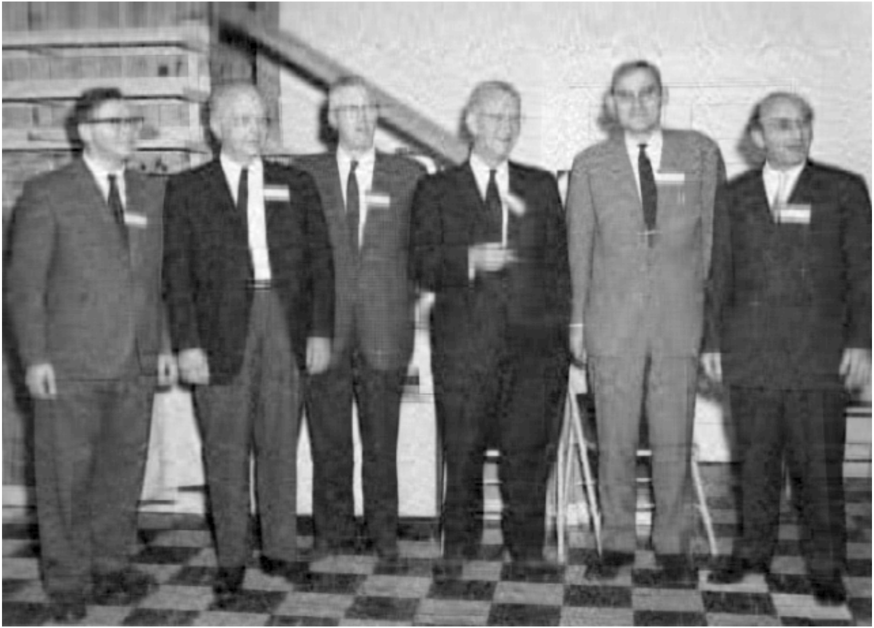
Příklad

- komprese obrázku
- matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ reprezentuje obrázek, ve kterém pixel na pozici (i, j) má barvu s číslem a_{ij}

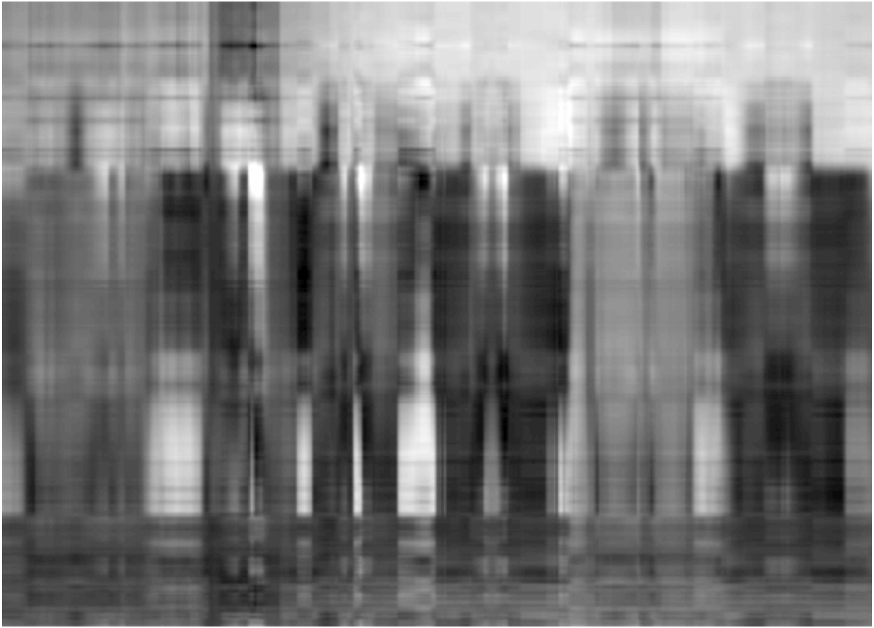
SVD a komprese obrázku: $k = 480$ (originál)

SVD a komprese obrázku: $k = 150$

SVD a komprese obrázku: $k = 50$



SVD a komprese obrázku: $k = 5$



SVD a komprese obrázku

- Foto z konference o numerické algebře v Gatlinburgu, 1964.
- 480×640 pixelů.
- SVD rozklad za cca 0.04 sec (19.5.2025).
- Zleva: James H. Wilkinson, Wallace Givens, George Forsythe, Alston Householder, Peter Henrici, and Fritz Bauer.

```
load gatlin,
[X,S,Y] = svd(X);
figure(2), clf,
k = 150;
Xk = X(:,1:k)*S(1:k,1:k)*Y(:,1:k)';
image(Xk),
colormap(map),
axis equal, axis off,
```

SVD a míra regularity

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Pak σ_n udává vzdálenost (v jisté normě) k nejbližší singulární matici.
- Ortogonální matice mají $\sigma_n = 1$.
- Hilbertovy matice mají malou míru regularity, tj. jsou téměř singulární:

n	$\sigma_n(H_n)$
3	$\approx 0{,}0027$
5	$\approx 10^{-6}$
10	$\approx 10^{-13}$
15	$\approx 10^{-18}$

SVD a pseudoinverzní matice

Motivace

- Je-li A regulární a má SVD rozklad $A = U\Sigma V^T$, pak
$$A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$$
- Pro singulární matici: převrátíme v Σ nenulové hodnoty

Definice (Mooreova–Penroseova pseudoinverze)

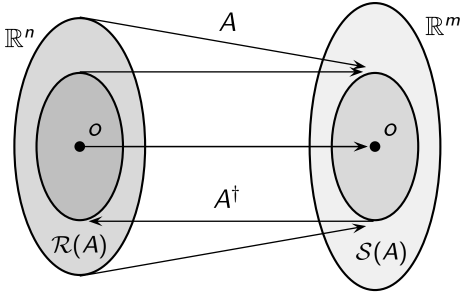
Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ s redukovaným SVD rozkladem $A = U_1 S V_1^T$.
Je-li $A \neq 0$, pak její *pseudoinverze* je
$$A^\dagger = V_1 S^{-1} U_1^T \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

Vlastnosti

- Platí $(A^\dagger)^\dagger = A$, $(A^T)^\dagger = (A^\dagger)^T$, $A = AA^\dagger A, \dots$
- Pozor: nemusí $AA^\dagger \neq A^\dagger A$ a $(AB)^\dagger \neq B^\dagger A^\dagger$.

SVD a pseudoinverzní matice – geometrie

- Uvažujme lineární zobrazení $f(x) = Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.



- Pokud definiční obor $f(x)$ omezíme pouze na prostor $\mathcal{R}(A)$, tak dostaneme isomorfismus mezi $\mathcal{R}(A)$ a $f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(A)$.
- Inverzní zobrazení k tomuto isomorfismu má tvar $y \mapsto A^\dagger y$.

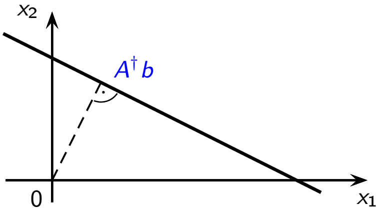
SVD a pseudoinverzní matice – nejmenší čtverce

Věta (Pseudoinverzní matice a řešení soustav rovnic)

Buď $\mathcal{X}$ množina řešení soustavy $Ax = b$. Je-li $\mathcal{X} \neq \emptyset$, pak

$$\mathcal{X} = A^{\dagger} b + Ker(A).$$

Ze všech vektorů z $\mathcal{X}$ má $A^{\dagger} b$ nejmenší eukleidovskou normu.



Věta (Pseudoinverzní matice a metoda nejmenších čtverců)

Množina řešení $Ax = b$ metodou nejmenších čtverců má tvar

$$\mathcal{X} = A^{\dagger} b + Ker(A).$$

Ze všech vektorů z $\mathcal{X}$ má $A^{\dagger} b$ nejmenší eukleidovskou normu.

SVD a maticová norma

Norma matice

- norma na vektorovém prostoru matic
- plus navíc chceme: $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$

Definice (Spektrální norma)

Spektrální norma matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je definovaná

$$\|A\|_2 = \sigma_1(A) \quad \text{(největší singulární číslo).}$$

Poznámky

- Ekvivalentně:

  $$\|A\|_2 = \max_{x : \|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$$

  Tedy jak moc natáhne kouli na elipsoid při zobrazení $x \mapsto Ax$
- defaultní maticová norma v Matlabu (zavolej `norm(A)`)

Závěrem