Domácí úkoly

z

Lineární algebry 2
(LS 2020/2021)

17. března 2022

zpracovali:

Martin Černý, Pavel Dvořák, Elif Garajová,
Milan Hladík, Veronika Slívová

[uvedené úlohy byly převzaty z různých zdrojů]

Obsah

1. Skalární součin, norma

Dcv. 1.1 Na prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažujme skalární součin $\langle x, y\rangle = [x]_B^T[y]_B$, kde báze B má tvar $B = \{(1,1)^T, (2,3)^T\}$.

(a) Najděte explicitní vyjádření pro $\langle x, y\rangle$.

(b) Najděte nenulový vektor kolmý na $x = (1,2)^T$.

Dcv. 1.2 Určete, pro které vektory se Cauchy–Schwarzova nerovnost nabyde jako rovnost a pro které jako ostrá nerovnost? (stačí pro reálnou verzi)

Dcv. 1.3 Buď $a \in \mathbb{R}^n$. Určete maximální hodnotu lineární funkce $f(x) = a^T x$ na jednotkovém kruhu $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}$ pro p-normy postupně s $p \in \{1, 2, \infty\}$.

2. Ortonormální systém a Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Dcv. 2.1 Buď $x_1 = (1,1,0)^T$ a $x_2 = (1,1,1)^T$:

(a) ortogonalizujte vektory x_1, x_2,

(b) ortogonalizujte vektory v opačném pořadí,

(c) najděte projekci vektoru $x = (0,1,1)^T$ do podprostoru $U = \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$. Jaká je vzdálenost x od U?

Dcv. 2.2 Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a uvažujme zobrazení $f \colon x \to Ax$, Najděte dvě *různé* (nemající společný vektor ani v násobku) ortogonální báze $\mathcal{R}(A)$ pro

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dcv. 2.3 Pro skalární součin $\langle x, y\rangle \coloneqq 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$ zortogonalizujte vektory $(1,0,1,1)^T$, $(1,1,1,1)^T$.

3. Ortogonální doplněk a projekce

Dcv. 3.1 Najděte ortogonální doplněk k prostorům

(a) $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$,

(b) $U = \operatorname{span}\{(1,0,1,1)^T, (1,1,1,0)^T\}$.

Dcv. 3.2 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a uvažujte dvě zobrazení $f\colon x \to Ax$, $g\colon y \to A^T y$. Ukažte, že pro libovolný podprostor $U \Subset \mathbb{R}^n$ platí

$$f(U) \subseteq U \implies g(U^\perp) \subseteq U^\perp.$$

Dcv. 3.3 Najděte matici projekce do

(a) $U = \operatorname{span}\{(2,1,1)^T\}$.

(b) do roviny souřadných os x_1, x_2 v prostoru $\mathbb{R}^n$.

Dcv. 3.4 Buď P matice projekce do $U \subset \mathbb{R}^n$ a Q matice projekce do $V \Subset U^\perp$. Ukažte, že $PQ = 0$.

4. Ortogonální matice

Dcv. 4.1 Ukažte, že matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální právě tehdy, když $\|Ax\| = \|x\|$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ (při eukleidovské normě).

Dcv. 4.2 Jsou-li A, B Householderovy matice, rozhodněte, zda i

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

je Householderova matice.

5. Determinanty – výpočet

Dcv. 5.1 Spočítejte determinanty:

(a) $\det(-4)$

(b) $\det(-2I_n)$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \end{vmatrix}$

Dcv. 5.2 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokažte, že $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$.

6. Determinanty – použití

Dcv. 6.1 Vyřešte Cramerovým pravidlem následující soustavu dvou rovnic v $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} x + y &= 4, \\ 2x + 4y &= 4. \end{aligned}$$

Dcv. 6.2 Pomocí adjungované matice určete matici inverzní k matici

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

7. Vlastní čísla – základy

Dcv. 7.1 Určete charakteristický polynom, spočítejte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dcv. 7.2 Najděte $a \in \mathbb{R}$ tak, aby $\lambda = 3$ bylo jedno z vlastních čísel matice

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 4 & 9 & a \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dcv. 7.3 Najděte nejmenší číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že matice $A + \beta I_n$ je regulární pro všechna $\beta > \alpha$.

Dcv. 7.4 Matice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ má vlastní čísla $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, a $\lambda_3 = 5$. Určete stopu a determinant matice $(-A^2 + 5I_3)^{-1}$.

8. Vlastní čísla – diagonalizovatelnost

Dcv. 8.1 Převeďte následující matice do tvaru SDS^{-1}, kde D je diagonální a S je regulární.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -4 & -7 & -7 \\ 6 & 12 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

V následujících příkladech relace $\sim$ značí podobnost matic.

Dcv. 8.2 Rozhodněte o platnosti následujících implikací:

(a) $A \sim B \implies A^2 \sim B^2$,

(b) $A^2 \sim B^2 \implies A \sim B$.

Dcv. 8.3 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizovatelná. Ukažte, že $A \sim A^T$.

Dcv. 8.4 Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ podobné. Ukažte, že maticová soustava $AX - XB = 0$ má řešení $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

9. Vlastní čísla – Jordanova normální forma a symetrické matice

Dcv. 9.1 Určete 55. mocninu následující matice.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dcv. 9.2 Ukažte, že rozklad $\mathrm{B} = Q\Lambda Q^T$, kde Λ je diagonální a Q ortogonální, existuje pouze pro symetrické matice.

Dcv. 9.3 Najděte matici řádu 3, která má jediný vlastní vektor $v = (1, 2, 3)^T$.

Dcv. 9.4 Matice C je antisymetrická pokud $C^T = -C$. Dokažte

(a) Vlastní čísla antisymetrické matice jsou ryze imaginární.

(b) Pokud je matice D antisymetrická, pak $I + D$ je regulární (kde I je jednotková matice).

10. Vlastní čísla – Markovovy řetězce a metody výpočtu

Dcv. 10.1 Počasí v Matfyzákově se řídí následujícími pravidly: Každý den je buď slunečno, nebo deštivo. Pravděpodobnost, že slunečný den bude následován dalším slunečným dnem, je 80%. Pravděpodobnost, že deštivý den bude následován dalším deštivým dnem je 40%.

S využitím Markovových řetězců a souvisejících metod lineární algebry vyřešte násedující otázky:

(a) Jaká je pravděpodobnost, že pozítří bude slunečno, pokud dnes bylo deštivo?

(b) Jaké je limitní rozložení pravděpodonosti za delší časový horizont?

Dcv. 10.2 Biolog pozoroval populaci brouků v čase. Zjistil, že každý brouk žije 3 roky. První rok přežije s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Ti, kteří přežijí první rok, přežijí druhý rok s pravděpodobností $\frac{1}{3}$. Třetí rok dá každý brouk vzniknout 6 potomkům a umře.

(a) Charakterizujte (včetně konstrukce matice přechodu) populaci brouků v $1., 2., 3.$ a 6. roce za předpokladu, že výchozí populace obsahovala 3000 brouků (všichni brouci jsou stejně staří a právě se narodili).

(b) Jak se populace vyvíjí v čase jedoucím do nekonečna? Závisí tento vývoj na velikosti výchozí populace?

Dcv. 10.3 Určete Gerschgorinovy disky pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

a rozhodněte, zda má matice A aspoň jedno reálné záporné vlastní číslo.

11. Positivně (semi-)definitní matice

Dcv. 11.1 U následujících matic určete minimálně 2 způsoby, zda jsou positivně (semi-)definitní

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Víme, že jedna z nich positivně definitní není. Změňte jeden její prvek tak, aby positivně definitní bylo, případně ukažte, že to nelze.

Dcv. 11.2 Určete minimálně 2 způsoby, zda je následující matice řádu n positivní definitní

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \dots & 0 & \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dcv. 11.3 Určete všechny matice $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takové, že D i $-D$ jsou positivně semidefinitní.

Dcv. 11.4 Buď E positivně semidefinitní a $e_{ii} = 0$ pro jisté i. Ukažte, že i-tý řádek a i-tý sloupec matice E jsou nulové.

12. Positivně definitní matice – Choleského rozklad

Dcv. 12.1 Spočtěte Choleského rozklad matice A a použijte ho k řešení soustavy $Ax = b$ pro vektor $b = (8, -10, 30)^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 26 \end{pmatrix}$$

Dcv. 12.2 Pomocí Choleského rozkladu invertujte matici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 13 & -8 \\ -4 & -8 & 20 \end{pmatrix}.$$

Dcv. 12.3 Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem a $w_1, \ldots, w_n \in V$. Gramova matice $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je definována jako $G_{ij} = \langle w_i, w_j \rangle$. Ukažte:

(a) Pokud jsou vektory $w_1, \ldots, w_n$ lineárně nezávislé, pak G je positivně definitní.

(b) $\operatorname{rank}(G) = \dim(\operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\})$.

13. Bilineární formy

Dcv. 13.1 Zdůvodněte, proč jsou následující formy bilineární a nalezněte jejich maticovou reprezentaci:

(a) násobení reálných čísel,

(b) $a\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou $a(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$,

(c) $b\colon \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}$ danou $b(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} ix_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} jy_j\right)$

Dcv. 13.2 Uvažujte kvadratickou formu $c\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$c(x) = x_1 - 6x_1x_2 + 9x_2^2.$$

Určete její maticovou reprezentaci vůči kanonické bázi a vůči bázi

$$B = \left\{(1, 2)^T, (1, 1)^T\right\}.$$

Dcv. 13.3 Buď $\mathbb{R}^{n\times n}$ vektorový prostor reálných matic dimenze $n \times n$. Definujme formu $d\colon \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ předpisem $d(A, B) = \mathrm{trace}(A^TB)$, kde $\mathrm{trace}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$ je stopa matice. Ukažte, že d je bilineární forma. Je d symetrická?

Dcv. 13.4 Nechť f je bilineární forma a dále A její maticová reprezentace vůči nějaká bázi B. Dokažte, nebo vyvraťte, že vlastní čísla matice A jsou nezávislá na volbě báze B.

14. Kvadratické formy

Dcv. 14.1 Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ mějte kvadratickou formu

$$g(x, y, z) = 2x^2 - 2xy + 4xz + y^2 + 2z^2.$$

Najděte polární bázi formy g a určete její signaturu.

Dcv. 14.2 Rozhodněte, zda existuje báze $\mathbb{R}^3$ taková, že matice formy g (z předchozí úlohy) vůči této bázi je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bázi nemusíte případně vyčíslovat, ale odpověď náležitě zdůvodněte.

Dcv. 14.3 Najděte libovolnou pozitivně definitní kvadratickou formu, která má stejnou polární bázi jako forma g.