Domácí úkoly z Lineární algebry II

(25. května 2021)

Úkol 1. Nechť $z \in \mathbb{C}$ je kořenem reálného polynomu $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}\ \forall k$. Dokažte, že $\overline{z}$ je také kořenem polynomu. Dále rozhodněte, zda tvrzení platí i pro komplexní polynomy. **6**

Úkol 2. Na prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažujme skalární součin $\langle x, y\rangle = [x]_B^T [y]_B$, kde báze B má tvar $B = \{(1,2)^T, (1,1)^T\}$.

- Najděte explicitní vyjádření pro $\langle x, y\rangle$. **4**
- Najděte nenulový vektor kolmý na $x = (2,1)^T$. **2**

Úkol 3. Buď $a \in \mathbb{R}^n$. Určete maximální hodnotu lineární funkce $f(x) = a^T x$ na jednotkovém kruhu $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}$ pro p-normy postupně s $p \in \{1, 2, \infty\}$. **6**

Úkol 4. Slunce zrovna vycházelo nad hory, když šíp vystřelený starým indiánem kmene Šošonů protnul sluneční kotouč a stín šípu se promítnul na starou bizoní kůži. Určete (pomocí projekce), kolikrát byl stín menší než vlastní šíp, pokud víme, že slunce se nacházelo ve směru vektoru $(3,2,1)^T$, šíp byl vystřelený z bodu $(1,2,3)^T$ po přímce se směrnicí $(5,5,5)^T$ a bizoní kůže se sušila kolmo na sluneční paprsky. **6**

Úkol 5. Vývoj epidemie LAVID-21 (linear algebraic virus disease) probíhal v týdenních přírůstcích dle tabulky

týden	1	2	3	4	5	6	7
případy	245	447	752	1167	1673	2214	2704

(a) Víme, že vývoj epidemie se řídí vztahem $f(x) = e^{ax^2+bx+c}$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou neznámé parametry. Odhadněte parametry metodou nejmenších čtverců.

(b) Zjistěte, jaký bude očekávaný maximální přírůstek.

(c) Zjistěte, za jak dlouho bude přírůstek pod hodnotou 100.

8

Úkol 6. Spočítejte následující determinant matice řádu n s parametry:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

6

Úkol 7. Určete objem elipsoidu vzniknuvšího obrazem jednotkové koule při lineárním zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definovaném

$$f(1,3,1) = (2,3,1),\ f(1,0,3) = (1,1,2),\ f(1,1,1) = (0,2,3).$$

6

Úkol 8. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice řádu n

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Hint: nechoďte na to přes charakteristický polynom. **6**

Úkol 9. S využitím diagonalizace odvoďte explicitní předpis pro $\left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{smallmatrix}\right)^k$. **6**

Úkol 10. Uvažujme webovou síť se stránkami A, B, C, D, E, F a linky:

A odkazuje na B, C
B odkazuje na E
C odkazuje na A, B, E
D odkazuje na E, F
E odkazuje na F
F odkazuje na C, D

Navrhněte vhodný page rank a ohodnoťte stránky podle něj. K numerickému výpočtu můžete použít software dle vlastního uvážení. **6**

Úkol 11. Difuze léčebné látky mezi dvěma buňkami probíhá podle pravidla: 50% látky z první buňky přejde do druhé, ale jen 25% látky z druhé přejde do první. V jakém poměru se množství látky ustálí? **6**

Úkol 12. Buď P Pascalova matice řádu n, tj. $P_{1,j} = 1$, $P_{i,1} = 1$, $P_{i,j} = P_{i,j-1} + P_{i-1,j}$. Dokažte, že tato matice je positivně definitní. **6**

Úkol 13. Ukažte, že rovnice $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$ popisuje elipsu v $\mathbb{R}^2$ a pomocí vlastních čísel a vektorů zjistěte její charakteristiky (délku a směr poloos). **6**