

Domácí úkoly z Lineární algebry II

(16. května 2019)

Úkol 1. Necht' $z \in \mathbb{C}$ je kořenem reálného polynomu $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R} \forall k$. Dokažte, že \bar{z} je také kořenem polynomu. Dále rozhodněte, zda tvrzení platí i pro komplexní polynomy. 6

Úkol 2. Na prostoru \mathbb{R}^2 uvažujme skalární součin $\langle x, y \rangle = [x]_B^T [y]_B$, kde báze B má tvar $B = \{(1, 2)^T, (1, 1)^T\}$.

• Najděte explicitní vyjádření pro $\langle x, y \rangle$. 4

• Najděte nenulový vektor kolmý na $x = (2, 1)^T$. 2

Úkol 3. Buď $a \in \mathbb{R}^n$. Určete maximální hodnotu lineární funkce $f(x) = a^T x$ na jednotkovém kruhu $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}$ pro p -normy postupně s $p \in \{1, 2, \infty\}$. 6

Úkol 4. Slunce zrovna vycházelo nad hory, když šíp vystřelený indiánem protnul sluneční kotouč a stín šípu se promítnul na starou bizoní kůži. Určete, kolikrát byl stín menší než vlastní šíp, pokud víme, že slunce se nacházelo ve směru vektoru $(3, 2, 1)^T$, šíp byl vystřelený z bodu $(1, 2, 3)^T$ po přímce se směrnici $(5, 5, 5)^T$ a bizoní kůže se sušila kolmo na sluneční paprsky. 6

Úkol 5. Statisticky změřená závislost počtu automobilových nehod na věku řidiče:

věk	20	25	30	35	40	45	50
nehod	101	115	92	64	60	50	49

(A) Metodou nejmenších čtverců aproximujte lineární vztah počtu nehod v závislosti na věku. Odhadněte počet nehod pro věk 60 a 70. Diskutujete výsledky. 4

(B) Zkuste najít kvadratický vztah a odhad pro věk 60 a 70. Vyhovuje závislosti lépe než lineární? A proč? 4

Pro počítání s maticemi je dovoleno použít vhodný software.

Úkol 6. Spočítejte následující determinant matice řádu n s parametry:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}. \quad 6$$

Úkol 7. Určete objem elipsoidu vznikuvšího obrazem jednotkové koule při lineárním zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definovaném

$$f(1, 3, 1) = (2, 3, 1), \quad f(1, 0, 3) = (1, 1, 2), \quad f(1, 1, 1) = (0, 2, 3). \quad 6$$

Úkol 8. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice řádu n

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Hint: nechodte na to přes charakteristický polynom.

6

Úkol 9. Oslavte Velikonoce!

0

Úkol 10. Uvažujme elektronické zařízení s přepínači, které jsou ve stavu “zapnuto” či “vypnuto”. Během každé minuty se 30% vypnutých přepínačů zapne a 90% zapnutých vypne. Určete procentuální rozdělení zapnutých přepínačů po delší době a rozhodněte, zda závisí na počátečním stavu zařízení.

6

Úkol 11. Uvažujme webovou síť se stránkami A, B, C, D, E, F a linky:

A odkazuje na B, C
 B odkazuje na E
 C odkazuje na A, B, E
 D odkazuje na E, F
 E odkazuje na F
 F odkazuje na C, D

Navrhněte vhodný page rank a ohodnoťte stránky podle něj. K numerickému výpočtu můžete použít software dle vlastního uvážení.

6

Úkol 12. Buď P Pascalova matice řádu n , tj. $P_{1,j} = 1$, $P_{i,1} = 1$, $P_{i,j} = P_{i,j-1} + P_{i-1,j}$. Dokažte, že tato matice je pozitivně definitní.

6

Úkol 13. Ukažte, že rovnice $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$ popisuje elipsu v \mathbb{R}^2 a zjistěte její charakteristiky (postupem z přednášky).

6