

Domácí úkoly z Lineární algebry II

(18. května 2017)

Úkol 1. Zaveďte v prostoru $\mathbb{R}^2$ skalární součin tak, aby $u \perp v$ pro $u = (1, 2)^T$ a $v = (2, 3)^T$.
(Nápověda: Vzpomeňte na příklad na cvičení z bázi B .) 6

Úkol 2. Pro které vektory se Cauchy–Schwarzova nerovnost nabyde jako rovnost a pro které jako ostrá nerovnost? (pro obecný vektorový prostor V nad $\mathbb{R}$) 6

Úkol 3. Slunce zrovna vycházelo nad obzor, když šíp vystřelený indiánem protnul sluneční kotouč a stín šípu se promítnul na starou bizoní kůži. Určete, kolikrát byl stín menší než vlastní šíp, pokud víme, že slunce se nacházelo ve směru vektoru $(1, 2, 3)^T$, šíp byl vystřelený z bodu $(3, 2, 1)^T$ ve směru $(5, 5, 5)^T$ a bizoní kůže se sušila kolmo na sluneční paprsky. 6

Úkol 4. Statisticky změřená závislost počtu automobilových nehod na věku řidiče:

věk	20	25	30	35	40	45	50
nehod	101	115	92	64	60	50	49

(A) Metodou nejmenších čtverců aproximujte lineární vztah počtu nehod v závislosti na věku. Odhadněte počet nehod pro věk 60 a 70. 4

(B) Zkuste najít kvadratický vztah a odhad pro věk 60 a 70. Vyhovuje závislosti lépe než lineární? A proč? 4

Pro počítání s maticemi je dovoleno použít vhodný software.

Úkol 5. Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ukažte, že matice A je ortogonální právě tehdy, když $\|Ax\| = \|x\|$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ (při eukleidovské normě). 6

Úkol 6. Určete objem elipsoidu, který vznikne obrazem jednotkové koule při zobrazení $x \mapsto Ax$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad 6$$

Úkol 7. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice řádu n

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad 6$$

Úkol 8. Uvažujme elektronické zařízení s přepínači, které jsou ve stavu “zapnuto” či “vypnuto”. Během každé minuty se 30% vypnutých přepínačů zapne a 90% zapnutých vypne. Určete procentuální rozdělení zapnutých přepínačů po delší době. 6

Úkol 9. Spočítejte vlastní čísla, vlastní vektory, diagonalizační rozklad, A^∞ , a $\sqrt{A}$ pro matici

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Poznámka: $A^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k$, a $\sqrt{A}$ je matice, která po umocnění dá A . **8**

Úkol 10. Ve vhodném SW prostředí aplikujte Mocninou metodu výpočtu dominantního vlastního čísla a vlastního vektoru matice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -7 & 6 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Za počáteční vektory zvolte jednak $x_0 = (1, 1, 1)^T$ a také $y_0 = (1, 2, 1)^T$.

Diskutujte výsledky! **6**

Úkol 11. Uvažujme webovou síť se stránkami A, B, C, D, E, F a linky:

A odkazuje na B, C
 B odkazuje na E
 C odkazuje na A, B, E
 D odkazuje na E, F
 E odkazuje na F
 F odkazuje na C, D

Navrhněte vhodný page rank a ohodnoťte stránky podle něj. K numerickému výpočtu můžete použít software dle vlastního uvážení. **6**

Úkol 12. Buď P Pascalova matice řádu n , tj. $P_{1,j} = 1$, $P_{i,1} = 1$, $P_{i,j} = P_{i,j-1} + P_{i-1,j}$. Dokažte, že tato matice je pozitivně definitní. **6**

Úkol 13. Ukažte, že rovnice $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$ popisuje elipsu v $\mathbb{R}^2$ a zjistěte její charakteristiky (postupem z přednášky). **6**