

Domácí úkoly z Lineární algebry II

(14. května 2013)

Úkol 1. Pro které vektory se Cauchy–Schwarzova nerovnost nabyde jako rovnost a pro které jako ostrá nerovnost? (stačí pro reálnou verzi) [3b]

Úkol 2. Rozložte vektor $u = (4, 3, 5)$ na součet $u = v + w$, kde $v \in V = \text{span}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ a $w \in V^\perp$. [2b]

Úkol 3. Statisticky změřená závislost počtu automobilových nehod na věku řidiče:

věk	20	25	30	35	40	45	50
nehod	101	115	92	64	60	50	49

(A) Metodou nejmenších čtverců aproximujte lineární vztah počtu nehod v závislosti na věku. Odhadněte počet nehod pro věk 60 a 70. [2b]

(B) Zkuste najít kvadratický vztah a odhad pro věk 60 a 70. Vyhovuje závislosti lépe než lineární? [1b]

Pro počítání s maticemi je dovoleno použít vhodný software.

Úkol 4. Rozhodněte zda platí: Součet ortogonálních matic není nikdy ortogonální matice. [2b]

Úkol 5. Spočítejte následující determinant matice řádu n s parametry:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

[2b]

Úkol 6. Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Zjednodušte výpočet determinantu pro matici

$$\begin{pmatrix} O & A \\ -B & I \end{pmatrix}.$$

Nápověda: vynásobte vhodnou maticí s determinantem rovným 1. [2b]

Úkol 7. Vyjádřete hodnotu $\text{adj}(A)$ vzhledem k charakteristikám matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (rozměr, hodnost atp.). [3b]

Úkol 8. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice řádu n

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

[2b]

Úkol 9. Spočítejte vlastní čísla, vlastní vektory, diagonalizační rozklad, A^∞ , a $\sqrt{A}$ pro matici

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Poznámka: $A^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k$, a $\sqrt{A}$ je matice, která po umocnění dá A . [3b]

Úkol 10. Ve vhodném SW prostředí aplikujte Mocninnou metodu výpočtu dominantního vlastního čísla a vlastního vektoru matice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -7 & 6 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Za počáteční vektory zvolte jednak $x_0 = (1, 1, 1)^T$ a také $y_0 = (1, 2, 1)^T$.

Diskutujte výsledky. [2b]

Úkol 11. Uvažujme webovou síť se stránkami A, B, C, D, E, F a linky:

A odkazuje na B, C
 B odkazuje na E
 C odkazuje na A, B, E
 D odkazuje na E, F
 E odkazuje na F
 F odkazuje na C, D

Ohodnoťte stránky podle vhodného page ranku. K numerickému výpočtu můžete použít software dle vlastního uvážení. [2b]

Úkol 12. Buď P Pascalova matice řádu n , tj. $P_{1,j} = 1$, $P_{i,1} = 1$, $P_{i,j} = P_{i,j-1} + P_{i-1,j}$. Dokažte, že tato matice je pozitivně definitní. [2b]

Úkol 13. Dvěma způsoby určete definitnost kvadratické formy $f(x) = x_1^2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 3x_3^2 - x_4^2$ na podprostoru generovaném vektory $u = (0, 0, 1, 0)$ a $v = (-3, 0, 1, 3)$. Postupy zdůvodněte! [2b]

Bonus. Vymyslete nějaký zajímavý originální příklad z lineární algebry. Dodejte ho nejlépe včetně řešení, ale i otevřené problémy jsou vítány. Lze dodat i více příkladů. [2-?b]