Příklady pro cvičení Z.41
Lineární algebra 2

(úterý od 9:00, LS 2020/2021)

1. června 2021

1. Cvičení – komplexní čísla, skalární součin a norma

Cv. 1.1 Komplexní čísla.

(a) Připomeňme si definici komplexních čísel, absolutní hodnotu komplexního čísla a komplexní rovinu.

(b) Spočítejte

$$(3-4i)+(1+2i), \quad (3-4i)\cdot(1+2i), \quad (3-4i)^2, \quad \frac{3-4i}{1+2i}, \quad |3-4i|.$$

(c) Komplexně sdružené číslo ke komplexnímu číslu $u = a + bi$ je definované $\overline{u} = a - bi$. Rozhodněte, zda platí

$$\overline{\overline{u}} = u, \quad \overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}, \quad \overline{uv} = \overline{u}\,\overline{v}.$$

(d) Co dostaneme součinem $z\overline{z}$?

Cv. 1.2 Připomeňte si standardní skalární součin nad $\mathbb{R}$ a nad $\mathbb{C}$, vztah skalárního součinu a úhlu mezi vektory, a eukleidovskou normu vektoru:

skalární součin nad $\mathbb{R}$ je $\langle x, y\rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
skalární součin nad $\mathbb{C}$ je $\langle x, y\rangle = x^T \overline{y} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$
norma nad $\mathbb{R}$ je $\|x\| \coloneqq \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
norma nad $\mathbb{C}$ je $\|x\| \coloneqq \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i \overline{x}_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x|_i^2}$
úhel: $x^T y = \|x\|\|y\| \cos\varphi$

Kdy jsou vektory x, y kolmé?

Cv. 1.3 Spočítejte:

(a) $\langle x, y\rangle$,

(b) jsou x, y na sebe kolmé?

(c) $\|x\|$, $\|y\|$,

(d) vzdálenost x od y,

pro

(i) $x = (2, 1, 4, -1)^T$, $y = (4, -1, 0, 2)^T$,

(ii) $x = (1, 2, 1, -2i)^T$, $y = (i, 2i, i-1, 2)^T$.

Cv. 1.4 Určete úhel mezi vektory $x = (0, 0, 1)^T$ a $y = (1, 0, -1)^T$.

Cv. 1.5 Najděte všechny vektory jednotkové délky kolmé na $(3, -2)^T$.

(Bonus: totéž nad $\mathbb{C}$.)

Cv. 1.6 Najděte co nejvíce lineárně nezávislých vektorů kolmých na vektor $x = (1, 2, 3)^T$.

Cv. 1.7 Buď
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$
Najděte nenulový vektor v (nejlépe všechny), který je kolmý na

(a) všechny řádky matice A,

(b) všechny vektory z $\mathcal{R}(A)$,

Cv. 1.8 Jaké jsou vlastnosti kolmosti jako relace? (reflexivita, symetrie, transitivita, ...)

Cv. 1.9 Je skalární součin lineární zobrazení?

Cv. 1.10 Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární. Ukažte, že pro $i \neq j$ je i-tý řádek matice A kolmý na j-tý sloupec matice A^{-1}.

2. Cvičení – obecný skalární součin

Cv. 2.1 Rozhodněte, zda následující je skalární součin v $\mathbb{R}^2$

(a) $\langle x, y\rangle = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$,

(b) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$,

(c) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

Cv. 2.2 Definujte reálný skalární součin (pokud to jde) pro prostory:

(a) $\mathbb{C}^n$ nad tělesem $\mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{Z}_2^n$ nad tělesem $\mathbb{Z}_2$.

Cv. 2.3 Nad $\mathbb{R}$ dokažte obě implikace Pythagorovy věty, tj. $x \perp y$ právě tehdy když $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Dále najděte protipříklad nad $\mathbb{C}$, kdy Pythagorova věta neplatí obráceně, tj. x, y nejsou kolmé a přesto $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Cv. 2.4 Pro skalární součin

$$\langle x, y\rangle = 5x_1y_1 + x_2y_2 + 11x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$$

a vektory $x = (2, 1, 1)^T$, $y = (1, 0, -1)^T$ spočítejte:

(a) $\langle x, y\rangle$,

(b) jsou x, y na sebe kolmé?

(c) vzdálenost x od y,

Cv. 2.5 Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ a B nějaká jeho báze. Ukažte, že

$$\langle x, y\rangle := [x]_B^T[y]_B$$

definuje skalární součin.

3. Cvičení – Cauchyho–Schwarzova nerovnost, norma, Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Cauchyho–Schwarzova nerovnost

Cv. 3.1 Dokažte, že pro každé $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ platí: $5a_1+a_2+3a_3+a_4 \leq 6\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}$.

Cv. 3.2 Dokažte vztah mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem, tj. pro každé $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Norma

Cv. 3.3 Rozhodněte, zda $\|x\| := |x_1 - x_2| + |x_2|$ je normou na $\mathbb{R}^2$.

Cv. 3.4 Porovnejte hodnoty p-normy pro $p \in \{1, 2, \infty\}$, to jest, setřiďte od největšího hodnoty $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_\infty$.

Cv. 3.5 Dokažte: $\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$.

Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Cv. 3.6 Co se stane, když Gramova–Schmidtova ortogonalizace

(a) dostane na vstup lineárně závislé vektory?

(b) dostane na vstup ortonormální vektory?

(c) dostane na vstup ortogonální vektory?

Cv. 3.7 Buď $x_1 = (1, 1, 0)^T$, $x_2 = (1, 1, 1)^T$:

(a) ortogonalizujte vektory x_1, x_2,

(b) ortogonalizujte vektory v opačném pořadí.

4. Cvičení – ortogonální doplněk a projekce

Ortogonální doplněk

Cv. 4.1 Buď $M, N \subseteq V$. Ukažte:

(a) $(M^{\perp})^{\perp} = \mathrm{span}(M)$,

(b) $M \subseteq N \;\Rightarrow\; N^{\perp} \subseteq M^{\perp}$, ale ne naopak,

(c) $(M \cup N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$.

Ortogonální doplněk v $\mathbb{R}^n$

Cv. 4.2 Najděte podprostor $U \Subset \mathbb{R}^5$ takový, že $\dim U = \dim U^{\perp}$.

Cv. 4.3 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Najděte $\mathcal{R}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$ a nakreslete je do obrázku.

Cv. 4.4 Najděte bázi ortogonálního doplňku k prostorům:

(a) $U = \mathrm{span}\{(1,0,1,1)^T, (1,1,1,0)^T\}$.

(b) $V = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$.

Ortogonální projekce

Cv. 4.5 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte ortonormální bázi $\mathcal{R}(A)$, určete projekci $x = (2,2,1,5)^T$ do $\mathcal{R}(A)$ a vzdálenost x od $\mathcal{R}(A)$.

Ortogonální projekce (pokr.)

Cv. 4.6 Určete vzdálenost bodu $X : (6,6,4,4)^T$ od roviny obsahující body $A : (1,1,1,1)^T$, $B : (9,1,1,-1)^T$, $C : (5,-1,3,0)^T$.

5. Cvičení – matice projekce, metoda nejmenších čtverců, ortogonální matice

Matice projekce

Cv. 5.1 Najděte matici projekce

(a) do $U = \text{span}\{(2, 1, 1)^T\}$,

(b) do roviny souřadných os x_1, x_2 v prostoru $\mathbb{R}^n$.

(c) do $U = \text{span}\{(0, 1, 1)^T, (1, 0, -1)^T, (0, 0, 1)^T\}$. (Nejprve se zamyslete!)

Metoda nejmenších čtverců

Cv. 5.2 Metodou nejmenších čtverců spočítejte přibližné řešení soustav

(a) $Ax = b$, kde $A = (1, 2, 1, 2)^T$ a $b = (5, 5, 5, 5)^T$,

(b) $Ax = b$, kde $A = (1, \dots, 1)^T$ se skládá ze sloupce jedniček a $b \in \mathbb{R}^n$.

Ortogonální matice

Cv. 5.3 Nechť $P, Q \in \mathbb{R}^n$ jsou ortogonální. Je $P + Q$ vždy ortogonální?

Cv. 5.4 Dokažte, že Givensova matice (matice otočení o úhel α)

$$G = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

je ortogonální.

Cv. 5.5 Buď $H(u) = I_n - \frac{2}{u^T u} u u^T$, $u \neq o$, Householderova matice.

(a) Sestrojte $H(u)$ pro $u = (1, 1, 0)^T$.

(b) Dokažte, že $H(u)$ je ortogonální pro obecné $u \neq o$.

(c) Rozhodněte, zda I_n je Householderovou maticí.

Cv. 5.6 Nechť $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou ortogonální. Je bloková matice $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ ortogonální?

Cv. 5.7 Najděte všechny diagonální ortogonální matice řádu n. Kolik jich je?

Cv. 5.8 Najděte všechny diagonální unitární matice řádu n. Kolik jich je?

Cv. 5.9 Najděte všechny horní trojúhelníkové ortogonální matice řádu n. Kolik jich je?

6. Cvičení – determinanty

Cv. 6.1 Spočítejte determinanty z definice nebo Gaussovou eliminací:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$,

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$,

(c) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

Cv. 6.2 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Dokažte $\det \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix} \right) = \det(A)\det(B)$.

(b) Lze nějak jednoduše vyjádřit $\det \left(\begin{smallmatrix} A & C \\ 0 & B \end{smallmatrix} \right)$?

Cv. 6.3 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Vyjádřete jako výraz pomocí $\det(A)$ následující:

(a) $\det(\alpha A)$,

(b) $\det(A^{-1})$,

(c) $\det(A_p)$, kde A_p vznikne z A zpermutováním řádků podle permutace $p \in S_n$.

Cv. 6.4 Zjednodušte výpočet $\det(SAS^{-1})$ pro $A, S \in \mathbb{T}^{n\times n}$.

Cv. 6.5 Víme $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a $\det(A) = 2$. Spočítejte $\det(2A^{-2}A^T)$.

Cv. 6.6 Laplaceovým rozvojem spočítejte

(a) determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

(b) tentýž determinant, pokud ale uvažujeme prvky tělesa $\mathbb{Z}_5$.

Cv. 6.7 Dokážeme něco říct o determinantu ortogonální matice?

7. Cvičení – determinanty a adjungovaná matice

Cv. 7.1 Pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Cv. 7.2 Určete objem čtyřstěnu určeného body

$$A : [1,1,0],\ B : [4,2,2],\ C : [3,4,4] \text{ a } D : [3,2,2].$$

Cv. 7.3 Spočítejte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Cv. 7.4 Určete, co vyjadřuje hodnota determinantu

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Cv. 7.5 Spočítejte adjungovanou matici k maticím

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a ověřte vztah $A \operatorname{adj}(A) = \det(A) I_n$.

Cv. 7.6 Vyjádřete $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1}$.

Cv. 7.7 Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární. Doplňte rovnost: $\operatorname{adj}(AB) = \dots$.
Jak to bude pro A singulární?

Cv. 7.8 Určete $\det(\operatorname{adj}(A))$.

Cv. 7.9 (Bonus) Rozhodněte, zda platí $\det(AB) = \det(BA)$.

8. Cvičení – vlastní čísla, charakteristický polynom

Cv. 8.1 Spočítejte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 8.2 Spočítejte vlastní čísla a aspoň 1 vlastní vektor matice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 8.3 A má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$. Odvoďte, jaká vlastní čísla a vektory mají matice:

(a) A^2,

(b) $A + \alpha I_n$,

(c) A^T.

Cv. 8.4 Najděte nejmenší číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $A + \beta I_n$ je regulární pro všechna $\beta > \alpha$.

Cv. 8.5 Známe-li vlastní čísla a vektory matic $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, jak je spočítat pro $M = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$?

Cv. 8.6 Najděte matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem.

9. Cvičení – vlastní čísla, charakteristický polynom, podobnost, diagonalizovatelnost

Vlastní čísla, charakteristický polynom

Cv. 9.1 Najděte matici $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ takovou, aby její vlastní čísla byla:

(a) i a $-i$,

(b) $2+i$ a $2-i$,

(c) i a $2i$.

Cv. 9.2 Matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $3, -4, 5$. Dopočítejte zbylé.

Cv. 9.3 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Ověřte Cayleyho–Hamiltonovu větu,

(b) Vyjádřete A^{-1} jako lineární kombinaci I_2 a A.

Podobnost, diagonalizovatelnost

Cv. 9.4 Vyšetřete vlastnosti *podobnosti* jakožto relace.

Cv. 9.5 Najděte všechny matice podobné matici I_n.

Cv. 9.6 Rozhodněte o platnosti ($\sim$ značí podobnost): $A \sim B \Rightarrow A^2 \sim B^2$.
Co naopak: $A \sim B \Leftarrow A^2 \sim B^2$?

Cv. 9.7 Najděte dva příklady nediagonalizovatelných matic řádu 2: singulární matici a regulární matici.

Cv. 9.8 Diskutujte jednoznačnost diagonalizace.

Cv. 9.9 Jsou diagonalizovatelné matice uzavřené na:

(a) násobky?

(b) součty?

Cv. 9.10 Dokažte přímo Cayleyho–Hamiltonovu větu pro diagonalizovatelné matice.

10. Cvičení – Jordanova normální forma, symetrické matice

Jordanova normální forma

Cv. 10.1 V kolika Jordanových buňkách matice $A \in \mathbb{R}^{16\times 16}$ je vlastní číslo 8, pokud víme $\operatorname{rank}(A - 8I_{16}) = 9$?

Cv. 10.2 Najděte Jordanovu normální formu matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 10.3 Kolik je tříd ekvivalence podobnosti pro matice řádu 4, které mají pouze vlastní číslo 7?

Cv. 10.4 Ukažte, že hodnost matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je větší nebo rovna počtu nenulových vlastních čísel. Najděte příklad, kdy je větší.

Symetrické matice

Cv. 10.5 Ukažte, že spektrální rozklad tvaru $A = Q\Lambda Q^T$, kde Λ je diagonální a Q ortogonální, existuje pouze pro symetrické matice.

Cv. 10.6 Dokažte, že pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má matice $A^T A$ všechna vlastní čísla nezáporná. Kdy budou kladná?

Cv. 10.7 Najděte všechny symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, které splňují $A^n = 0$.

Cv. 10.8 Najděte tři ortogonální vlastní vektory matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Cvičení – vlastní čísla nezáporných matic, metody a další

Nezáporné matice

Cv. 11.1 Buď $A > 0$ a označme $r := \rho(A)$. Ukažte, že $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{r}A\right)^k$ existuje a zjistěte její hodnost.

Metody

Cv. 11.2 Aniž byste je počítali, rozhodněte, zda matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má aspoň dvě reálná vlastní čísla.

Cv. 11.3 Aniž byste ji upravovali, rozhodněte, zda matice je regulární

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Cv. 11.4 Aplikujte větu o deflaci největšího vlastního čísla na matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Prozradíme, že dvě z vlastních čísel jsou 2 a -2.

Jordanova normální forma (pokr.)

Cv. 11.5 O kolik či kolikrát se maximálně zmenší hodnost matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ když ji umocníme A^2?

Cv. 11.6 Najděte Jordanovu normální formu matice $J_n(\lambda)^T$.

Platí, že každá matice je podobná svojí transpozici?

Další

Cv. 11.7 Buď $c, d \in \mathbb{R}^n$. Jaká vlastní čísla a vektory má matice cd^T?

Cv. 11.8 Jaká vlastní čísla má ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

12. Cvičení – positivně (semi-)definitní matice

Cv. 12.1 Ukažte, že matice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ je positivně semidefinitní, a to všemi třemi způsoby (na základě tří ekvivalentních definic).

Cv. 12.2 Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou positivně definitní. Ukažte, že $A + B$ je také positivně definitní.

Jak to bude se součtem positivně semidefinitní a positivně definitní matice?

Jak to bude s jejich skalárními násobky?

Cv. 12.3 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Otestuje positivní definitnost těchto matic pomocí

(a) rekurentní vzorečku,

(b) Choleského rozkladu.

Cv. 12.4 Najděte regulární matici, která je positivně semidefinitní, ale ne positivně definitní.

Cv. 12.5 Najděte všechny matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takové, že A a $-A$ jsou positivně semidefinitní.

Cv. 12.6 Ukažte, že každá symetrická matice se dá zapsat jako rozdíl dvou positivně semidefinitních matic $A = P - R$. (Dá se jednoduše zobecnit na rozdíl dvou positivně definitních.)

13. Cvičení – positivně (semi-)definitní matice

Cv. 13.1 Buď
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$
Otestuje positivní definitnost matice:

(a) Gaussovou eliminací,

(b) Sylvestrovým kriteriem.

Cv. 13.2 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positivně definitní a $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární. Dokažte dvěma způsoby, že $S^T AS$ je positivně definitní.

Cv. 13.3 Vyjádřete následující výraz ve tvaru $x^T Ay$ (tzn. najděte odpovídající matici $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$)
$$b(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_3y_2.$$
Je matice A jednoznačná?

Cv. 13.4 Vyjádřete následující výraz ve tvaru $x^T Ax$ (tzn. najděte odpovídající matici $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$)
$$f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3.$$
Dokážete najít symetrickou matici A?

Cv. 13.5 Pomocí Choleského rozkladu vyřešte soustavu rovnic $Ax = b$, kde
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$
(Nápověda: Soustavu $LL^T x = b$ přepíšeme na $Ly = b$, $L^T x = y$.)

Cv. 13.6 Nad symetrickými maticemi z $\mathbb{R}^{n\times n}$ definujme relaci $\preceq$ předpisem $A \preceq B$ pokud $B - A$ je positivně semidefinitní. Ukažte, že $\preceq$ je relace částečného uspořádání.

Cv. 13.7 Dokažte, že symetrická matice v blokovém tvaru $\left(\begin{smallmatrix} A & B^T \\ B & C \end{smallmatrix}\right)$ je positivně definitní právě tehdy, když obě matice A a $C - BA^{-1}B$ jsou positivně definitní. (Jedná se vlastně o zobecnění rekurentního vzorečku.)

Cv. 13.8 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positivně semidefinitní. Ukažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí:
$$x^T Ax = 0 \;\Rightarrow\; Ax = o.$$

14. Cvičení – bilineární a kvadratické formy

Cv. 14.1 Je bilineární formou zobrazení $b\colon \mathbb{R}^{m\times p} \times \mathbb{R}^{p\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ definované $b(A, B) = AB$?

Cv. 14.2 Najděte matici kvadratické formy

$$f(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

(a) vzhledem ke kanonické bázi,

(b) vzhledem k bázi $B = \{(1, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 0, 0)^T\}$.
Zde použijte dva různé postupy: z definice a pomocí matice přechodu.

Cv. 14.3 Buď V reálný vektorový prostor dimenze n. Ukažte, že

(a) bilineární formy na V tvoří vektorový prostor a určete jeho dimenzi,

(b) kvadratické formy na V tvoří vektorový prostor a určete jeho dimenzi.

Cv. 14.4 Najděte matici kvadratické formy $f(x)$ nad $\mathbb{Z}_2$ vzhledem ke kanonické bázi

(a) $f(x) = x_1^2 + x_2^2$,

(b) $f(x) = x_1^2 + x_1x_2$.

Sylvestrův zákon setrvačnosti

Cv. 14.5 Diagonalizujte kvadratickou formu s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(Hint: provádějte elementární řádkové úpravy a ty samé na sloupce, takže se průběžně zachovává symetrie matice a nakonec dostaneme diagonální matici.)

Co říká výsledek o matici A a jejích vlastních číslech?

Cv. 14.6 Diagonalizujte kvadratickou formu s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a určete polární bázi, tj. bázi, vůči níž je matice formy diagonální.

(Hint: současně s úpravou matice A aplikujeme pouze sloupcové úpravy na I.)

Cv. 14.7 Zvolte si kvadratickou formu f nad $\mathbb{R}^4$ se signaturou $(1, 1, -1, -1)$ a najděte podprostor $V \Subset \mathbb{R}^4$ dimenze 2 splňující $f(x) = 0$ pro všechna $x \in V$.

Cv. 14.8 Uvažme relaci kongruence, kdy $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou v relaci pokud existuje regulární S tak, že $B = S^T AS$.

(a) Jaké vlastnosti má relace kongruence?

(b) Kolik existuje tříd ekvivalence?