Příklady na procvičení
z
Lineární algebry 2

14. března 2023

zpracovali:

Martin Černý a Milan Hladík

[uvedené úlohy byly převzaty z různých zdrojů,
s využitím materiálů od kolegů, jmenovitě:
Pavel Dvořák, Jiří Fiala, Elif Garajová, Veronika Slívová]

Obsah

1. Skalární součin, norma

Standardní a nestandardní skalární součin

Cv. 1.1 Při použití standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^4$ spočítejte pro vektory $x = (1,1,1,1)^T$ a $y = (1,2,4,2)^T$:

(a) skalární součin $\langle x, y\rangle$,

(b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,

(c) vzdálenost x od y.

Cv. 1.2 Při použití standardního skalárního součinu v $\mathbb{C}^3$ spočítejte pro vektory $x = (1, 3i, 1+5i)^T$ a $y = (1-i, 1, 1)^T$:

(a) skalární součin $\langle x, y\rangle$,

(b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,

(c) vzdálenost x od y.

Cv. 1.3 Jak vypadá množina všech vektorů, které jsou kolmé na vektor $y = (1,5,2)^T$? Dokážete závěr zobecnit?

Cv. 1.4 Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$:

(a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,

(b) $\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(c) $\langle x, y\rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(d) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.

Norma indukovaná skalárním součinem

Cv. 1.5 Pythagorova věta.

(a) Nad $\mathbb{R}$ dokažte: $x \perp y$ platí právě tehdy, když $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(b) Najděte protipříklad nad $\mathbb{C}$, kdy předchozí ekvivalence neplatí, tj. x, y nejsou kolmé a přesto $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Cv. 1.6 Připomeňme, že stopa matice je definována jako součet prvků na diagonále:

$$\mathrm{trace}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(a) Ukažte, že $\langle A, B\rangle = \mathrm{trace}(A^TB)$ definuje skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(b) Pro tento skalární součin zformulujete Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.

(c) Dokažte $\mathrm{trace}(A)^2 \le n \cdot \mathrm{trace}(A^TA)$.

Cv. 1.7 Dokažte, že pro každé $a_1, \ldots, a_n > 0$ platí:

$$n^2 \le (a_1 + \ldots + a_n)(a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1}).$$

Norma obecně

Cv. 1.8 Ověřte, že $\|x\| = |x_1 - 2x_2| + |3x_1 - 4x_2| + |5x_1 - 6x_2|$ je normou na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Cv. 1.9 Buď $\|\cdot\|$ libovolná reálná norma na prostoru $\mathbb{R}^n$ a buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární matice. Dokažte, že $\|x\|_A := \|Ax\|$ je také norma.

Cv. 1.10 Dokažte ekvivalenci norem

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2}, \\ \|x\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \end{aligned}$$

na prostoru $\mathbb{R}^n$. Konkrétně ukažte, že platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty \le \|x\|_1 &\le n\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty \le \|x\|_2 &\le \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\ \|x\|_2 \le \|x\|_1 &\le \sqrt{n}\|x\|_2. \end{aligned}$$

Cv. 1.11 Jednotková koule v prostoru $\mathbb{R}^n$ při dané normě je definovaná jako množina vektorů, jejichž norma je nanejvýš jedna, tedy $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \le 1\}$. Nakreslete jednotkovou kouli pro následující normy v $\mathbb{R}^2$:

(a) maximová norma $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$,

(b) součtová norma $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$,

(c) norma $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_1 - x_2|\}$.

2. Ortonormální systém a Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Cv. 2.1 Určete koeficienty lineární kombinace vektoru $(3,2,1)^T$ vůči ortonormální bázi $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$.

Cv. 2.2 V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem nalezněte pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace ortonormální bázi $B = \{z_1, \ldots, z_r\}$ řádkového prostoru matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 2.3 Rozšiřte ortonormální bázi z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

Cv. 2.4 Buď $x_1 = (1,1,0)^T$, $x_2 = (1,1,1)^T$:

(a) ortogonalizujte vektory v pořadí x_1, x_2,

(b) ortogonalizujte vektory v pořadí x_2, x_1.

Cv. 2.5 Co se stane, když Gramova–Schmidtova ortogonalizace

(a) dostane na vstup lineárně závislé vektory?

(b) dostane na vstup ortogonální vektory?

(c) dostane na vstup ortonormální vektory?

(d) dostane na vstup $-x_i$ namísto x_i? Jak se změní výstup?

Cv. 2.6 V prostoru $\mathbb{C}^3$ ortogonalizujte $x_1 = (i,i,i)^T$, $x_2 = (0,i,i)^T$, $x_3 = (0,0,i)^T$.

Cv. 2.7 Najděte ortonormální bázi podprostoru $\mathbb{R}^3$ popsaného rovnicí $x - y + z = 0$.

Cv. 2.8 Pro skalární součin $\langle x, y\rangle := 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ zortogonalizujte vektory $x_1 = (1,0)^T$, $x_2 = (1,1)^T$.

3. Ortogonální doplněk a projekce

Ortogonální doplněk

Cv. 3.1 Pro vektorový prostor V určete $V^{\perp}$, $\{0\}^{\perp}$, $\{\}^{\perp}$.

Cv. 3.2 Buď $M, N \subseteq V$. Ukažte

(a) $M \subseteq N \ \Rightarrow\ N^{\perp} \subseteq M^{\perp}$, ale ne naopak,

(b) $(M \cup N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$.

Cv. 3.3 Najděte podprostor $U \Subset \mathbb{R}^5$ takový, že $\dim U = \dim U^{\perp}$.

Cv. 3.4 Spočítejte ortogonální doplněk vektoru $u = (1, 0, 0, -2)^T$ do podprostoru $V = \operatorname{span}\{v, w\} = \operatorname{span}\{(1, 2, 4, 0)^T, (0, 1, 2, 1)^T\}$.

Cv. 3.5 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Najděte $\mathcal{R}(A)$, $\operatorname{Ker}(A)$ a nakreslete je do obrázku.

Cv. 3.6 Najděte bázi ortogonálního doplňku k prostoru

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

Ortogonální projekce

Cv. 3.7 Uvažujme standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ a přímku $p = \operatorname{span}\{y\}$.

(a) Najděte bod x' na přímce p, který je nejbližší bodu $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Porovnejte velikost projekce x' a vektoru x.

(c) Sestavte matici kolmé projekce na přímku p.

(d) Najděte projekci vektoru $x = (3, -2, 5)^T$ na přímku se směrnicí $y = (2, 1, 1)^T$.

Cv. 3.8 Určete ortogonální projekci p vektoru $a = (2, 2, 1, 5)^T$ do podprostoru generovaného ortonormálními vektory

$$B = \left\{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T,\ (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T,\ (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T\right\}.$$

Dále určete souřadnice této projekce $[p]_B$ vzhledem k bázi B.

Cv. 3.9 Určete vzdálenost bodu $A = [5, 5, 3, 3]$ od roviny ρ procházející počátkem a body $B = [0, 1, -1, 0]$ a $C = [4, -2, 2, -1]$.

Cv. 3.10 Při standardním skalárním součinu určete vzdálenost $c \in \mathbb{R}^n$ od

(a) podprostoru $a^T x = 0$, kde $o \neq a \in \mathbb{R}^n$,

(b) podprostoru $a^T x = b$, kde $o \neq a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.

Cv. 3.11 Rozložte $u = (3, 2, 6)^T$ na součet $u = v + w$, kde $v \in V = \operatorname{span}\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 1)^T\}$ a $w \in V^{\perp}$.

Metoda nejmenších čtverců

Cv. 3.12 Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení x' soustavy $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé.

Určete také velikost chyby $\|Ax' - b\|$.

Dostanete stejná řešení jako řešení soustavy $A^T Ax = A^T b$?

Cv. 3.13 Metodou nejmenších čtverců spočítejte přibližné řešení soustavy $Ax = b$, kde $A = (1, \dots, 1)^T$ se skládá ze sloupce jedniček a $b \in \mathbb{R}^n$.

Cv. 3.14 Hookův zákon vyjadřuje lineární úměrnost pružné deformace materiálu na použité síle. Následující tabulka obsahuje hodnoty průtahu pružiny (v palcích) v závislosti na síle/hmotnosti (v librách). Odhadněte koeficient úměrnosti.

síla F	5	7	8	10	12
průtah ℓ	11,1	15,4	17,5	22	26,3

4. Ortogonální matice

Cv. 4.1 Rozhodněte, zda následující matice jsou ortogonální:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 4.2 Buď $H(u) = I_n - \frac{2}{u^T u} u u^T$, $u \neq o$, Householderova matice.

(a) Dokažte, že $H(u)$ je symetrická.

(b) Dokažte, že $H(u)$ je ortogonální.

(c) Rozhodněte, zda I_n je Householderovou maticí pro určité $u \neq o$.

Cv. 4.3 Nechť $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou ortogonální. Je bloková matice

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

ortogonální?

Cv. 4.4 Najděte všechny

(a) diagonální ortogonální matice řádu n,

(b) diagonální unitární matice řádu n.

Kolik jich je?

Cv. 4.5 Které z matic elementárních úprav jsou ortogonální?

Cv. 4.6 Buď $p \in S_n$ permutace a $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ permutační matice definovaná tak, že $P_{ij} = 1$ pokud $i = p(j)$ a nula jinak.

(a) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vykoná operace PA?

(b) Nahlédněte, že P vznikne z jednotkové matice zpermutováním jejích řádků podle p.

(c) Dokažte, že P je ortogonální matice.

(d) Nechť Q je permutační matice odpovídající permutaci q. Jaká matice odpovídá permutaci $p \circ q$?

(e) Jaká permutační matice odpovídá permutaci p^{-1}?

(f) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vykoná operace AP?

Cv. 4.7 Rozhodněte o platnosti výroků:

(a) Má-li regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ navzájem kolmé řádky, pak má i navzájem kolmé sloupce.

(b) Má-li matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ navzájem kolmé řádky velikosti 1, pak má i navzájem kolmé sloupce.

5. Determinanty – výpočet

Cv. 5.1 Spočítejte determinanty následujících reálných matic. Použijte výpočet z definice, pomocí Gaussovy eliminace a pomocí Laplaceova rozvoje podle nějakého řádku.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cv. 5.2 Spočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 5.3 Spočtěte determinant následujících matic:

(a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix},$$

(b) $$B = \begin{pmatrix} a_1 + x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + x \end{pmatrix}.$$

Cv. 5.4 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Rozhodněte, zda následující vztahy pro blokové matice platí či ne:

(a) $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$,

(b) $\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$.

Cv. 5.5 Rozhodněte, zda platí $\det(AB) = \det(BA)$.

Cv. 5.6 Zjednodušte výraz $\det(SAS^{-1})$ pro matice $A, S \in \mathbb{T}^{n\times n}$.

Cv. 5.7 Spočítejte determinanty matic nad příslušnými tělesy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_5, \qquad B = \begin{pmatrix} i-1 & 1 & 0 \\ 1 & i & i \\ 2 & 1 & i+i \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{C}.$$

6. Determinanty – použití

Aplikace determinantu

Cv. 6.1 Vyřešte následující soustavu rovnic pomocí Cramerova pravidla.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right).$$

Cv. 6.2 Vyřešte následující soustavu rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$ pomocí Cramerova pravidla.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 3 \\ 2 & 1 & a \end{array}\right).$$

Cv. 6.3 Pomocí determinantu určete obsah trojúhelníku s vrcholy

(a) $a = (1,1)^T$, $b = (2,5)^T$, $c = (3,2)^T$,

(b) $a = (1,3,1)^T$, $b = (3,3,3)^T$, $c = (3,1,2)^T$.

Cv. 6.4 Určete objem elipsoidu, který vznikne obrazem jednotkové koule při zobrazení $x \mapsto Ax$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Adjungovaná matice

Cv. 6.5 Spočítejte adjungovanou matici k matici A a ověřte vztah $A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A) I_n$

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Cv. 6.6 Vyjádřete $\mathrm{adj}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

Cv. 6.7 Spočítejte adjungovanou matici k následujícím maticím:

(a) I_n,

(b) $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$.

Cv. 6.8 Vyjádřete $\det(\mathrm{adj}(A))$ vzorečkem pomocí $\det(A)$.

7. Vlastní čísla – základy

Cv. 7.1 Vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reprezentuje směr, který se při lineárním zobrazení $f(x) = Ax$ zobrazí opět na ten samý směr (mění se tedy pouze velikost nebo orientace vektoru). Pro vlastní vektor v matice A tedy platí, že přímka $\operatorname{span}\{v\}$ se při zobrazení f zobrazí do sebe sama. Příslušné vlastní číslo matice pak představuje škálování v tomto invariantním směru.

Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(d) $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Cv. 7.2 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Jsou vlastní vektory jednoznačné?

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Cv. 7.3 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Cv. 7.4 Známe tři vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix},$$

a to $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$ a $\lambda_3 = 5$. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

Cv. 7.5 Matice A má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$. Určete, jak vypadají vlastní čísla a vlastní vektory:

(a) matice A^2,

(b) matice αA,

(c) matice $A + \alpha I_n$,

(d) matice A^T.

Cv. 7.6 Ukažte, že jeden vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemůže příslušet různým vlastním číslům.

Cv. 7.7 Najděte nejmenší číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $A + \beta I_n$ je regulární pro všechny $\beta > \alpha$.

Cv. 7.8 Známe-li vlastní čísla a vektory matic $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, jak je spočítat pro matici

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}?$$

Cv. 7.9 Buď $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matice projekce. Jaká má vlastní čísla a vlastní vektory?

Cv. 7.10 Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Ověřte Cayleyho-Hamiltonovu větu,

(b) Vyjádřete A^4 jako lineární kombinaci I_2 a A,

(c) Vyjádřete A^{-1} jako lineární kombinace I_2 a A.

8. Vlastní čísla – diagonalizovatelnost

Cv. 8.1 Vyšetřete vlastnost *podobnosti* jako relace.

Cv. 8.2 Rozhodněte o platnosti $A \sim B \;\Rightarrow\; A^2 \sim B^2$. Jak to bude s opačnou implikací?

Cv. 8.3 Určete, zda jsou následující matice diagonalizovatelné:

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Cv. 8.4 Rozložte následující matice na součin SDS^{-1}, kde matice S je regulární a matice D je diagonální:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T$,

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

Cv. 8.5 Najděte chybu v následující úvaze: Vyjděme z rovnice $Ax = \lambda x$. Je-li vlastní číslo $\lambda = 0$, pak $x \in \mathrm{Ker}(A)$. Je-li vlastní číslo $\lambda \neq 0$, pak $x \in \mathcal{S}(A)$. Protože $\dim \mathrm{Ker}(A) + \dim \mathcal{S}(A) = n$, má matice A plný počet vlastních vektorů a je tudíž diagonalizovatelná.

Cv. 8.6 Dokažte přímo Cayleyho-Hamiltonovu větu pro diagonalizovatelné matice.

9. Vlastní čísla – Jordanova normální forma a symetrické matice

Jordanova normální forma

Cv. 9.1 Najděte

(a) matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem (libovolným),

(b) matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem $v = (1, 1, 1)^T$.

Cv. 9.2 V kolika Jordanových buňkách matice $A \in \mathbb{R}^{16\times 16}$ je vlastní číslo 8, pokud víme, že $\operatorname{rank}(A - 8I_{16}) = 9$?

Cv. 9.3 Najděte Jordanovu normální formu matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 9.4 Určete, kolik je tříd ekvivalence podobnosti pro:

(a) matice řádu 4, které mají pouze vlastní číslo 7,

(b) matice řádu 3 s vlastními čísly 5 a 7.

Cv. 9.5 Najděte Jordanovu normální formu matice $J_n(\lambda)^T$.

Cv. 9.6 O kolik se maximálně zmenší hodnost matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ když ji umocníme A^2?

Symetrické matice

Cv. 9.7 Ukažte, že spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^T$, kde Λ je diagonální a Q ortogonální, existuje pouze pro symetrické matice.

Cv. 9.8 Najděte spektrální rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 9.9 Víme, že symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ má vlastní vektor $v = (1, 2)^T$. Dopočítejte druhý vlastní vektor.

Cv. 9.10 Dokažte, že pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má matice $A^T A$ všechna vlastní čísla nezáporná. Kdy budou kladná?

Cv. 9.11 (a) Dokažte z definice, že vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům symetrické matice jsou na sebe kolmé.

(b) S pomocí předchozího bodu dokažte větu o spektrálním rozkladu přímo pro symetrické matice s různými vlastními čísly.

10. Vlastní čísla – metody výpočtu, odhady, Markovovy řetězce

Markovovy řetězce a nezáporné matice

Cv. 10.1 Ve městě Žebrácká Lhota fungují tři lokální politické strany, a to Moderní Čechy (MČ), Mír pro Lidi (ML) a Malé Hnutí (MH). Volby se řídí následujícím pravidlem: Z voličů strany MČ volí opět tuto stranu 75 % jejich voličů, ale k ML přejde 5 % a k MH dokonce 20 %. Z voličů ML přejde k MČ rovných 20 % a k MH také 20 %. Nakonec, z voličů MH zůstane jen 80 %, zbytek se rovnoměrně rozdělí mezi MČ a ML. Jaké bude rozdělení podpory stran v místním zastupitelstvu za delší časový horizont?

Cv. 10.2 Difuze léčebné látky mezi dvěma buňkami probíhá podle pravidla: 50 % látky z první buňky přejde do druhé, ale jen 25 % látky z druhé buňky přejde do první. V jakém poměru se množství látky ustálí?

Cv. 10.3 Ukažte, že vlastnosti kladné matice z Perronovy věty obecně neplatí pro nezápornou matici. Konkrétně, najděte postupně takové matice $A \geq 0$, aby platily vlastnosti

(a) $\rho(A) = 0$,

(b) $\rho(A)$ je vícenásobné vlastní číslo,

(c) existuje vlastní číslo $\lambda \neq \rho(A)$ takové, že $|\lambda| = \rho(A)$.

Odhady a techniky z výpočetních metod

Cv. 10.4 Určete Gerschgorinovy disky pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a pomocí nich rozhodněte, zda má matice A aspoň dvě reálná vlastní čísla.

Cv. 10.5 Pomocí Gerschgorinových disků rozhodněte, zda je následující matice regulární:

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Cv. 10.6 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 4.6 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda $(I_4 - A^{-1})^k \to 0$ pro $k \to \infty$.

Cv. 10.7 Nejprve spočítejte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

a potom aplikujte větu o deflaci vlastního čísla na to největší vlastní číslo.

11. Positivně (semi-)definitní matice

Positivně definitní matice

Cv. 11.1 Otestujte positivní definitnost matic

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pomocí:

(a) rekuretního vzorce,

(b) Sylvestrova pravidla,

(c) Gaussovy eliminace.

Cv. 11.2 Otestujte positivní semidefinitnost resp. positivní definitnost následujících matic pomocí vlastních čísel:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Cv. 11.3 Buď A blokově diagonální symetrická matice. Ukažte, že A je positivně definitní právě tehdy, když všechny bloky jsou positivně definitní.

Jak to bude s positivní semidefinitností?

Cv. 11.4 Najděte příklad matice ilustrující, že nefunguje přímočaré zobecnění na testování positivní semidefinitnosti pomocí rekurentního vzorečku, Sylvestrova kritéria pro positivní definitnost a Choleského rozkladu.

Positivně semidefinitní matice

Cv. 11.5 Ověřte positivní semidefinitnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

a to všemi třemi způsoby (na základě tří ekvivalentních definic).

Cv. 11.6 Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou positivně definitní.

(a) Ukažte, že $A + B$ jsou také positivně definitní.

(b) Jak to bude se součtem positivně semidefinitních matic?

(c) Jak to bude se součtem positivně semidefinitní a positivně definitní matice?

(d) Jak to bude s násobkem positivně definitních matic?

Cv. 11.7 Najděte regulární matici, která je positivně semidefinitní, ale ne positivně definitní.

Cv. 11.8 Ukažte, že libovolná mocnina positivně semidefinitní matice je positivně semidefinitní matice.

Cv. 11.9 Nad symetrickými maticemi z $\mathbb{R}^{n\times n}$ definujme relaci $\preccurlyeq$ předpisem $A \preccurlyeq B$ pokud $B - A$ je positivně semidefinitní. Ukažte, že $\preccurlyeq$ je relace částečného uspořádání.

Cv. 11.10 Buď A positivně semidefinitní. Ukažte, že pokud $x^T Ax = 0$ platí pro nějaké $x \neq o$, potom $Ax = o$.

12. Positivně definitní matice – Choleského rozklad

Cv. 12.1 Otestujte positivní definitnost matice A pomocí Choleského rozkladu.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Cv. 12.2 Nalezněte Choleského rozklad následujících matic, nebo zdůvodněte, že nejsou positivně definitní.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 21 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.3 Pomocí Choleského rozkladu invertujte matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.4 Pomocí Choleského rozkladu vyřešte soustavu $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

13. Bilineární a kvadratické formy

Cv. 13.1 Jsou následující zobrazení bilineární formou? Pokud ano, jde o symetrickou formu?

(a) $a\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $a(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$,

(b) $b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $b(x,y) = x_1y_2 + x_2$,

(c) $c\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $c(x,y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1$,

(d) $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $d(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2$,

(e) $e\colon \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definované $e(A,B) = AB$.

Cv. 13.2 Najděte matici bilineárních forem vzhledem ke kanonické bázi.

(a) $b(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_3y_2$

(b) $b(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2$

Cv. 13.3 Pro následující kvadratickou formu

$$f(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_2^2$$

nalezněte symetrickou bilineární formu $b(x,y)$, která ji indukuje a uveďte $b(x,y)$ v maticové reprezentaci.

Cv. 13.4 Najděte matici kvadratické formy

$$f(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

vzhledem ke kanonické bázi a vzhledem k bázi $B = \{(1,1,1)^T,\ (1,1,0)^T,\ (1,0,0)^T\}$. Použijte dva různé postupy: z definice a pomocí matice přechodu.

Cv. 13.5 Pro zobrazení $b\colon \mathcal{P}^2 \times \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}$ definované $b(p,q) = p(0)q(2)$ ukažte:

(a) b je bilineární forma,

(b) najděte matici formy vzhledem k bázi $B = \{1,\ 1+x,\ (1-x)^2\}$,

(c) vyčíslete $b(1-x, x^2-2x+2)$ dvěma různými postupy,

(d) najděte matici formy vzhledem k bázi $B' = \{1,\ x,\ x^2\}$ s využitím té staré.

Cv. 13.6 Jednoznačnost kvadratické formy.

(a) Nechť $A, B \in \mathbb{T}^{n\times n}$ jsou symetrické a nechť $x^TAx = x^TBx$ platí pro všechna $x \in \mathbb{T}^n$. Rozhodněte, zda potom $A = B$.

(b) Rozhodněte, zda matice kvadratické formy vzhledem k dané bázi je jednoznačná.

Cv. 13.7 Buď V vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbb{T}$ a nechť charakteristika tělesa $\mathbb{T}$ není 2.

(a) Ukažte, že bilineární formy a symetrické bilineární formy na prostoru V tvoří vektorové prostory a určete jejich dimenze.

(b) Ukažte, že kvadratické formy na prostoru V tvoří vektorový prostor a určete jeho dimenzi.

14. Kvadratické formy a Sylvestrův zákon setrvačnosti

Cv. 14.1 Diagonalizujte kvadratické formy s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 14.2 Diagonalizujte kvadratické formy s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a určete polární bázi, tj. bázi, vůči níž je matice formy diagonální.

Cv. 14.3 Uvažte relaci kongruence, kdy $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou v relaci, pokud existuje regulární S taková, že $B = S^T AS$.

(a) Dokažte, že se jedná o relaci ekvivalence.

(b) Kolik má tříd ekvivalencí?

Cv. 14.4 Vyjádřete kvadratickou formu $f(x) = x^T Ax$ jako součet čtverců lineárních forem, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 14.5 Ukažte, že rovnice $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$ popisuje elipsu v $\mathbb{R}^2$ a zjistěte její charakteristiky (postupem z přednášky).