Příklady na procvičení

z

Lineární algebry 2

14. března 2023

zpracovali:

Martin Černý a Milan Hladík

[uvedené úlohy byly převzaty z různých zdrojů,
s využitím materiálů od kolegů, jmenovitě:
Pavel Dvořák, Jiří Fiala, Elif Garajová, Veronika Slívová]

Obsah

1. Skalární součin, norma

Standardní a nestandardní skalární součin

Cv. 1.1 Při použití standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^4$ spočítejte pro vektory $x = (1,1,1,1)^T$ a $y = (1,2,4,2)^T$:

(a) skalární součin $\langle x, y\rangle$,

(b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,

(c) vzdálenost x od y.

Řešení:

(a) Podle definice standardního skalárního součinu je

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = \\ = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 4 + 1\cdot 2 = 9.\end{aligned}$$

(b) Podle definice eukleidovské normy

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x^T x} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2,\\ \|y\| &= \sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{y^T y} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2 + 2^2} = 5.\end{aligned}$$

(c) Vzdálenost mezi vektory (body) x, y je definovaná jako norma jejich rozdílu, tedy

$$\|x - y\| = \|(0, -1, -3, -1)^T\| = \sqrt{0^2 + (-11)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}.$$

Cv. 1.2 Při použití standardního skalárního součinu v $\mathbb{C}^3$ spočítejte pro vektory $x = (1, 3i, 1+5i)^T$ a $y = (1-i, 1, 1)^T$:

(a) skalární součin $\langle x, y\rangle$,

(b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,

(c) vzdálenost x od y.

Řešení:

(a) Podle definice standardního skalárního součinu je

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle = x^T \overline{y} = \sum_{i=1}^{3} x_i \overline{y}_i = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3 = \\ = 1\cdot(1+i) + 3i\cdot 1 + (1+5i)\cdot 1 = 2 + 9i.\end{aligned}$$

(b) Podle definice eukleidovské normy

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\langle x, \overline{x}\rangle} = \sqrt{x^T\overline{x}} = \sqrt{1 + 3i(-3i) + (1+5i)(1-5i)} = 6,\\ \|y\| &= \sqrt{\langle y, \overline{y}\rangle} = \sqrt{y^T\overline{y}} = \sqrt{(1-i)(1+i) + 1 + 1} = 2.\end{aligned}$$

(c) Vzdálenost mezi vektory (body) x, y je definovaná jako norma jejich rozdílu, tedy

$$\|x - y\| = \|(i, -1 + 3i, 5i)^T\| = 6.$$

Cv. 1.3 Jak vypadá množina všech vektorů, které jsou kolmé na vektor $y = (1, 5, 2)^T$? Dokážete závěr zobecnit?

<u>Řešení:</u>
Vektor $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ je kolmý na vektor y, pokud $0 = \langle x, y\rangle = x_1 + 5x_2 + 2x_3$. Množina hledaných vektorů je tedy popsána rovnicí $x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0$ a geometricky tvoří rovinu v prostoru $\mathbb{R}^3$. Báze je tvořena například vektory $(5, -1, 0)^T$, $(2, 0, -1)^T$.

Pokud úvahu zobecníme, tak množina vektorů kolmých na daný vektor $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$ je charakterizována jednou rovnicí. Geometricky tato množina představuje nadrovinu v prostoru $\mathbb{R}^n$, tedy je podprostor dimenze $n - 1$.

Cv. 1.4 Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$:

(a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,
(b) $\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,
(c) $\langle x, y\rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,
(d) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.

<u>Řešení:</u>

(a) Ne, protože není splněna symetrie. Například pro $x = (1, 0)^T$, $y = (0, 1)^T$ je

$$\langle x, y\rangle = 2 \neq -2 = \langle y, x\rangle,$$

(b) Ne, protože není splněna první vlastnost z definice skalárního součinu. Například pro $x = (1, 0)^T$ je $\langle x, x\rangle = -1$, což není kladná hodnota.

(c) Ne, protože není splněna první vlastnost z definice skalárního součinu. Například pro $x = (1, 0)^T$ je $\langle x, x\rangle = 0$ což není kladná hodnota.

(d) Ano. Musíme ověřit vlastnosti skalárního součinu:

- První vlastnost z definice. Upravme

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= x_1x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 5x_2x_2\\ &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0.\end{aligned}$$

  Hodnota je nulová pouze tehdy, když jsou oba sčítance nulové, tedy když

$$x_1 + 2x_2 = 0 \ \text{ a zároveň } \ x_2 = 0.$$

  To nastane pouze pro $x = (0, 0)^T$, čímž je první vlastnost dokázána.

- Vlastnost se součtem $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle x + y, z\rangle &= (x_1 + y_1)z_1 + 2(x_1 + y_1)z_2 + 2(x_2 + y_2)z_1 + 5(x_2 + y_2)z_2,\\ \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle &= (x_1z_1 + 2x_1z_2 + 2x_2z_1 + 5x_2z_2)\\ &\quad + (y_1z_1 + 2y_1z_2 + 2y_2z_1 + 5y_2z_2).\end{aligned}$$

- Vlastnost s násobky $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle y, x\rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle \alpha x, y\rangle &= \alpha x_1y_1 + 2\alpha x_1y_2 + 2\alpha x_2y_1 + 5\alpha x_2y_2,\\ \alpha\langle x, y\rangle &= \alpha(x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2).\end{aligned}$$

- Symetrie: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2,\\ \langle y, x\rangle &= y_1x_1 + 2y_1x_2 + 2y_2x_1 + 5y_2x_2.\end{aligned}$$

Norma indukovaná skalárním součinem

Cv. 1.5 Pythagorova věta.

(a) Nad $\mathbb{R}$ dokažte: $x \perp y$ platí právě tehdy, když $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(b) Najděte protipříklad nad $\mathbb{C}$, kdy předchozí ekvivalence neplatí, tj. x, y nejsou kolmé a přesto $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Řešení:

(a) Upravíme výraz

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle =\\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

Tudíž rovnost $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$ nastane právě tehdy, když $2\langle x, y\rangle = 0$, neboli když $x \perp y$.

(b) Protipříklad nad $\mathbb{C}$: Uvažujme například vektory $x = (1, 0)^T$, $y = (i, 0)^T$. Nejsou na sebe kolmé, ale

$$\|x + y\|^2 = 2 = 1 + 1 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Cv. 1.6 Připomeňme, že stopa matice je definována jako součet prvků na diagonále:

$$\operatorname{trace}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(a) Ukažte, že $\langle A, B\rangle = \operatorname{trace}(A^TB)$ definuje skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(b) Pro tento skalární součin zformulujete Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.

(c) Dokažte $\operatorname{trace}(A)^2 \le n \cdot \operatorname{trace}(A^TA)$.

Řešení:

(a) Pišme

$$\operatorname{trace}(A^TB) = \sum_{i=1}^{n}(A^TB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(A^T)_{ij}B_{ji}. = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ji}b_{ji}.$$

Čili výraz $\operatorname{trace}(A^TB)$ představuje standardní skalární součin, pokud matici A asociujeme s dlouhým vektorem, složeným z jejích prvků

$$(a_{11}, \dots, a_{m1}, a_{22}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}).$$

(b) Cauchyho–Schwarzova nerovnost $|\langle A, B\rangle| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ dostane podobu

$$\operatorname{trace}(A^T B) \leq \sqrt{\operatorname{trace}(A^T A)}\sqrt{\operatorname{trace}(B^T B)}.$$

Ekvivalentně můžeme též psát

$$\operatorname{trace}(A^T B)^2 \leq \operatorname{trace}(A^T A)\operatorname{trace}(B^T B).$$

(c) Do Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti dosadíme $A \coloneqq I_n$, $B \coloneqq A$ a tím pádem dostaneme

$$\operatorname{trace}(A)^2 \leq \operatorname{trace}(I_n) \cdot \operatorname{trace}(A^T A) = n \cdot \operatorname{trace}(A^T A).$$

Cv. 1.7 Dokažte, že pro každé $a_1, \ldots, a_n > 0$ platí:

$$n^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n)(a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1}).$$

Řešení:
Aplikujeme Cauchyho–Schwarzovu nerovnost. Ta má tvar

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Konkrétně pro prostor $\mathbb{R}^n$ a standardní skalární součin je tvaru

$$|\textstyle\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Umocněním obou stran nerovnosti dostaneme

$$\left|\textstyle\sum_{i=1}^n x_i y_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

Nyní stačí vhodně dosadit za vektory x, y. Konkrétně zvolíme

$$x = \left(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}\right)^T, \quad y = \left(1/\sqrt{a_1}, \ldots, 1/\sqrt{a_n}\right)^T.$$

Tím dostane Cauchyho–Schwarzova nerovnost podobu

$$\left|\textstyle\sum_{i=1}^n 1\right|^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n)(a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1}),$$

což po úpravě dá požadovaný tvar.

Norma obecně

Cv. 1.8 Ověřte, že $\|x\| = |x_1 - 2x_2| + |3x_1 - 4x_2| + |5x_1 - 6x_2|$ je normou na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Řešení:
Musíme ověřit vlastnosti z definice normy:

- Hodnota $\|x\|$ je zřejmě vždy nezáporná. Nulová je pouze, když všechny sčítance jsou nulové, tedy když

$$x_1 - 2x_2 = 0, \quad 3x_1 - 4x_2 = 0, \quad 5x_1 - 6x_2 = 0.$$

Tato soustava má jediné řešení, a to $x_1 = x_2 = 0$. Proto $\|x\| = 0$ nastane jen tehdy, když $x = (0, 0)^T$.

- Vlastnost $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^2$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, neboť

$$\begin{aligned}\|\alpha x\| &= |\alpha x_1 - 2\alpha x_2| + |3\alpha x_1 - 4\alpha x_2| + |5\alpha x_1 - 6\alpha x_2| \\ &= |\alpha| \cdot |x_1 - 2x_2| + |\alpha| \cdot |3x_1 - 4x_2| + |\alpha| \cdot |5x_1 - 6x_2| \\ &= |\alpha| \cdot \|x\|.\end{aligned}$$

- Trojúhelníková nerovnost:

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= |x_1 + y_1 - 2(x_2 + y_2)| + |3(x_1 + y_1) - 4(x_2 + y_2)| + \\ &\quad + |5(x_1 + y_1) - 6(x_2 + y_2)| \\ &\le |x_1 - 2x_2| + |y_1 - 2y_2| + |3x_1 - 4x_2| + \\ &\quad + |3y_1 - 4y_2| + |5x_1 - 6x_2| + |5y_1 - 6y_2| = \|x\| + \|y\|.\end{aligned}$$

Cv. 1.9 Buď $\|\cdot\|$ libovolná reálná norma na prostoru $\mathbb{R}^n$ a buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární matice. Dokažte, že $\|x\|_A := \|Ax\|$ je také norma.

Řešení:
Ověříme vlastnosti z definice normy:

- Hodnota $\|x\|_A$ je zřejmě vždy nezáporná. Nulová je pouze, když $Ax = o$. Díky regularitě matice A to nastane pouze pro $x = o$,
- $\|\alpha x\|_A = \|A\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|Ax\| = |\alpha| \cdot \|x\|_A$,
- Trojúhelníková nerovnost:

$$\|x+y\|_A = \|A(x+y)\| = \|Ax + Ay\| \le \|Ax\| + \|Ay\| = \|x\|_A + \|y\|_A.$$

Cv. 1.10 Dokažte ekvivalenci norem

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2}, \\ \|x\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} |x_i|\end{aligned}$$

na prostoru $\mathbb{R}^n$. Konkrétně ukažte, že platí následující vztahy:

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty \le \|x\|_1 &\le n\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty \le \|x\|_2 &\le \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\ \|x\|_2 \le \|x\|_1 &\le \sqrt{n}\|x\|_2.\end{aligned}$$

Řešení:
Nerovnost $\|x\|_\infty \le \|x\|_1$ plyne díky

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \le \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1.$$

Nerovnost $\|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$ plyne díky

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \le \sum_{j=1}^n \max_{i=1,\dots,n} \{|x_i|\} = \sum_{j=1}^n \|x\|_\infty = n\|x\|_\infty.$$

Nerovnost $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ plyne díky

$$\|x\|_\infty^2 = \max_{i=1,\dots,n} x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|_2^2.$$

Nerovnost $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$ plyne díky

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq \sum_{j=1}^n \max_{i=1,\dots,n}\{x_j^2\} = \sum_{j=1}^n \|x\|_\infty^2 = n\|x\|_\infty^2.$$

Nerovnost $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ plyne díky

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|\right)^2 = \|x\|_1^2.$$

Zbývá nerovnost $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$. Cauchyho–Schwarzova nerovnost $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ aplikovaná na vektor x a vektor $y = (1, \dots, 1)^T$ dává

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq \sqrt{n}\|x\|_2.$$

To dokazuje požadovanou nerovnost v nezáporném ortantu. V dalších ortantech dostaneme nerovnost analogicky z Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti aplikované na vektor x a příslušný vektor $y \in \{\pm 1\}^n$.

Cv. 1.11 Jednotková koule v prostoru $\mathbb{R}^n$ při dané normě je definovaná jako množina vektorů, jejichž norma je nanejvýš jedna, tedy $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leq 1\}$. Nakreslete jednotkovou kouli pro následující normy v $\mathbb{R}^2$:

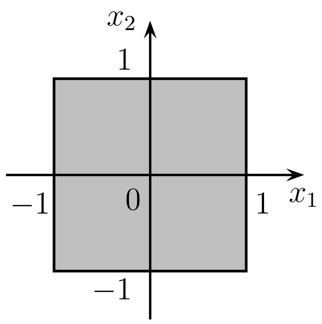
(a) maximová norma $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$,

(b) součtová norma $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$,

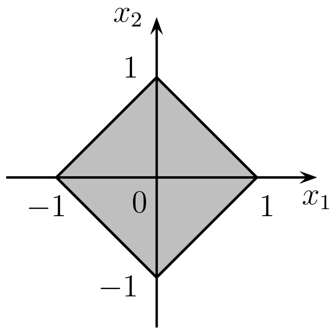
(c) norma $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_1 - x_2|\}$.

Řešení:

(a) V maximové normě je jednotková koule popsaná nerovnicí $\max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1$, což se dá ekvivalentně vyjádřit $|x_1| \leq 1$ a zároveň $|x_2| \leq 1$. To znamená, že $x_1 \in [-1, 1]$, $x_2 \in [-1, 1]$ a jednotková koule má tvar čtverce:



(b) V součtové normě je jednotková koule popsaná nerovnicí $|x_1|+|x_2| \leq 1$. Nyní budeme postupovat analýzou postupně pro jednotlivé kvadranty. V nezáporném kvadrantu má nerovnice tvar $x_1 + x_2 \leq 1$, čili část jednotkové koule v tomto kvadrantu tvoří trojúhelník s vrcholy $(0,0), (1,0), (0,1)$. V kvadrantu vpravo dole (nezáporná první složka, nekladná druhá složka) má nerovnice tvar $x_1 - x_2 \leq 1$ a část jednotkové koule v tomto kvadrantu tvoří trojúhelník s vrcholy $(0,0), (1,0), (0,-1)$. Analogicky postupujeme dále a nakonec dostaneme požadovaný obrázek:



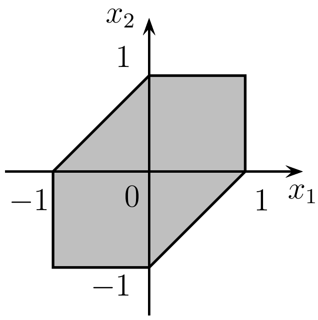
(c) V této normě je jednotková koule popsaná nerovnicí

$$\max\{|x_1|, |x_2|, |x_1 - x_2|\} \leq 1,$$

což se dá ekvivalentně vyjádřit jako tři podmínky, které musí platit zároveň:

$$|x_1| \leq 1, \quad |x_2| \leq 1 \quad \text{a} \quad |x_1 - x_2| \leq 1.$$

Víme již, že první dvě podmínky popisují čtverec. Třetí podmínka z tohoto čtverce kus odřízne. Abychom to nahlédli, vyjádříme podmínku jako $x_1 - x_2 \leq 1$ a zároveň $-(x_1 - x_2) \leq 1$. První nerovnost popisuje polorovinu, která ze čtverce odřízne trojúhelník s vrcholy $(1,0), (1,-1), (0,-1)$ a druhá nerovnost popisuje polorovinu, která ze čtverce odřízne trojúhelník s vrcholy $(-1,0), (-1,1), (0,1)$. Dohromady tak dostaneme jednotkovou kouli ve tvaru:



2. Ortonormální systém a Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Cv. 2.1 Určete koeficienty lineární kombinace vektoru $(3,2,1)^T$ vůči ortonormální bázi $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$.

Řešení:

Standardní způsob výpočtu koeficientů lineární kombinace (tedy souřadnic) vede na řešení soustavy lineárních rovnic

$$\alpha_1\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T + \alpha_2\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T + \alpha_3(0,0,1)^T = (3,2,1)^T,$$

čili na

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Protože se jedná o ortonormální bázi, můžeme využít toho, že lze koeficienty vyjádřit snadněji pomocí tzv. *Fourierových* koeficientů jako $x = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i$, kde $u_1, \ldots, u_n$ je ortonormální báze.

Aplikací vzorce dostáváme

- $\alpha_1 = \langle (3,2,1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T\rangle = \frac{5}{\sqrt{2}}$,
- $\alpha_2 = \langle (3,2,1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
- $\alpha_3 = \langle (3,2,1)^T, (0,0,1)^T\rangle = 1$.

Cv. 2.2 V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem nalezněte pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace ortonormální bázi $B = \{z_1, \ldots, z_r\}$ řádkového prostoru matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Aplikujeme Gramovu–Schmidtovu ortogonalizaci na řádky matice A, tedy na vektory $x_1 = (1,1,1,1)^T$, $x_2 = (4,1,4,1)^T$, $x_3 = (1,2,3,4)^T$.

Algoritmus Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace pracuje iterativně, kdy v každé iteraci nakolmí vektor na množinu již zortonormalizovaných vektorů. Konkrétně, v i-té iteraci nejprve odečte od vektoru x_i jeho kolmou projekci do prostoru $\operatorname{span}\{z_1, \ldots, z_{i-1}\}$ již dříve ortonormalizovaných vektorů a dostaneme vektor $y_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1}\langle x_i, z_j\rangle z_j$. Následně tento vektor normalizuje: $z_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}$.

Jednotlivé kroky Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace jsou:

- normalizujeme $y_1 = x_1$: $\|y_1\| = \sqrt{4} = 2$ a odtud $z_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.
- $\langle x_2, z_1\rangle = 5$ a proto $y_2 = (4,1,4,1)^T - 5(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})^T$.

- normalizujeme y_2: $\|y_2\| = 3$ a dostaneme $z_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$.
- $\langle x_3, z_1 \rangle = 5$, $\langle x_3, z_2 \rangle = -1$ a tedy

$$y_3 = (1,2,3,4)^T - 5(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T + 1(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T = (-1,-1,1,1)^T.$$

- normalizujeme y_3: $\|y_3\| = 2$ a máme $z_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

Řešením je ortonormální báze $B = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T, (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T\}$.

Poznámka. Čtenář může dále ověřit, že vektory z_1, z_2, z_3 jsou skutečně na sebe navzájem kolmé a mají jednotkovou velikost. To poslouží i jako dílčí (a obvykle postačující) zkouška správnosti výsledku. Kdybychom chtěli mít skutečnou jistotu, že výsledek je správně, museli bychom ještě ukázat, že vektory z_1, z_2, z_3 generují prostor $\mathcal{R}(A)$. To lze prokázat například ověřením rovnosti z věty o Fourierových koeficientech, tedy rovnosti $x_k = \sum_{i=1}^{3} \langle x_k, z_i \rangle z_3$ pro $k = 1,2,3$.

Cv. 2.3 Rozšiřte ortonormální bázi z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

<u>Řešení:</u>
Abychom rozšířili bázi řádkového prostoru matice A na bázi celého prostoru $\mathbb{R}^4$, můžeme například matici nejprve převést do odstupňovaného tvaru. Tím se dozvíme pozice nebázických sloupců, pro které přidáme odpovídající kanonické vektory. Odstupňovaný tvar matice A je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nebázický je pouze poslední sloupec, proto stačí přidat $x_4 = (0,0,0,1)^T$, čímž získáme rozšíření na bázi $\mathbb{R}^4$. Pokud aplikujeme Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci na původní řádky matice a vektor e_4 přidáme na konec, bude ortogonalizace pro první tři vektory probíhat stejně. Můžeme proto aplikovat Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci rovnou na vektory z_1, z_2, z_3, x_4, čímž získáme hledané rozšíření na ortonormální bázi.

Konkrétně stačí dopočítat pouze nakolmení a normování x_4:

- $\langle x_4, z_1 \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle x_4, z_2 \rangle = -\frac{1}{2}$, $\langle x_4, z_3 \rangle = \frac{1}{2}$, a tudíž

$$\begin{aligned} y_4 &= (0,0,0,1)^T - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T - \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T \\ &= (\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4})^T. \end{aligned}$$

- normalizujeme y_4: $\|y_4\| = \frac{1}{2}$ a získáme $z_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

Cv. 2.4 Buď $x_1 = (1,1,0)^T$, $x_2 = (1,1,1)^T$:

(a) ortogonalizujte vektory v pořadí x_1, x_2,

(b) ortogonalizujte vektory v pořadí x_2, x_1.

Řešení:

Cílem úlohy je uvědomit si, že u Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace záleží na tom, v jakém pořadí vektory ortogonalizujeme. V obou případech dostaneme správnou ortonormální bázi prostoru $\mathrm{span}\{x_1, x_2\}$, ale pokaždé se ta báze bude skládat z různých vektorů.

(a) Ortogonalizace v pořadí x_1, x_2 vede k dvojici vektorů

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \quad (0,0,1)^T,$$

(b) Ortogonalizace v pořadí x_2, x_1 vede na dvojici vektorů

$$\tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T, \quad \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T.$$

Cv. 2.5 Co se stane, když Gramova–Schmidtova ortogonalizace

(a) dostane na vstup lineárně závislé vektory?

(b) dostane na vstup ortogonální vektory?

(c) dostane na vstup ortonormální vektory?

(d) dostane na vstup $-x_i$ namísto x_i? Jak se změní výstup?

Řešení:

(a) Mějme na vstupu $x_1, \ldots, x_n$ a mějme j nejmenší takové, že $x_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i x_i$ je vektor lineárně závislý na $x_1, \ldots, x_{j-1}$. Jeho projekce do podprostoru $\mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_{j-1}\}$ je tedy vektor x_j sám. Gramova–Schmidtova ortogonalizace bude probíhat normálně až do okamžiku, kdy dojde k odečtení kolmé projekce vektoru x_j do podprostoru $\mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_{j-1}\}$. V tu chvíli se vektor vynuluje. Při jeho následném normování se program zastaví, protože budeme chtít dělit 0.

(b) Při odčítání kolmé projekce na již zortonormalizované vektory se vektor nemění, neboť všechny projekce budou nulové vektory. Jediné, k čemu dojde, bude normalizace vektorů, které jsme dostali na vstupu.

(c) V tomto případě ani odčítání projekcí (nulových vektorů), ani normování (dělení 1) nemění vstupní vektory. Proto na výstupu dostaneme stejné vektory jako na vstupu.

(d) Ortogonalizace poběží pro vstup $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$ stejně jako pro $x_1, \ldots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$ až do okamžiku, kdy přejdeme k ortogonalizaci i-tého vektoru. Označme jako p kolmou projekci i-tého vektoru do podprostoru $\mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_{i-1}\}$. Vektor p bude mít pro x_i a $-x_i$ opačné znaménko, tedy i po odečtení projekce dostáváme vektory $x_i - p$ a $-x_i - (-p) = -x_i + p = -(x_i - p)$ s opačnými znaménky. Normování nám tento vztah zachová.

Pro ostatní vektory už k žádné změně nedojde. Odčítáme totiž kolmou projekci do podprostoru, která nezávisí na zvolené bázi tohoto podprostoru.

Výstupy obou ortogonalizací budou stejné až na znaménko i-tého vektoru.

Cv. 2.6 V prostoru $\mathbb{C}^3$ ortogonalizujte $x_1 = (i,i,i)^T$, $x_2 = (0,i,i)^T$, $x_3 = (0,0,i)^T$.

Řešení:
Pokud bychom nebyli omezeni na provedení Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace, mohli bychom odečíst druhý vektor od prvního a třetí vektor od druhého. Dostali bychom vektory $(i,0,0)^T$, $(0,i,0)^T$, $(0,0,i)^T$. Ty zřejmě generují stejný prostor jako původní vektory a zároveň mají všechny normu rovnu 1.

Postupujme nyní pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace. Nejprve znormujme vektor $x_1 = (i,i,i)^T$. Norma vektoru je

$$\|x_1\| = \sqrt{\langle x_1, x_1\rangle} = \sqrt{x_1^T \overline{x_1}} = \sqrt{3(i\cdot(-i))} = \sqrt{-3i^2} = \sqrt{3}.$$

Proto $z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i,i,i)^T$. Dále

$$\begin{aligned} y_2 &= (0,i,i)^T - \langle x_2, z_1\rangle \tfrac{1}{\sqrt{3}}(i,i,i)^T = (0,i,i)^T - \tfrac{-2i^2}{\sqrt{3}}\tfrac{1}{\sqrt{3}}(0,i,i)^T \\ &= (0,i,i)^T - \tfrac{2}{3}(i,i,i)^T = \tfrac{1}{3}(-2i,i,i)^T. \end{aligned}$$

Normováním dostáváme

$$z_2 = \tfrac{1}{\|y_2\|}\tfrac{1}{3}(-2i,i,i)^T = \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\tfrac{1}{3}(-2i,i,i)^T = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(-2i,i,i)^T.$$

Nakonec

$$y_3 = (0,0,i)^T - \tfrac{1}{3}(i,i,i)^T - \tfrac{1}{6}(-2i,i,i)^T = \tfrac{1}{2}(0,-i,i)^T,$$

a tedy $z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-i,i)^T$.

Cv. 2.7 Najděte ortonormální bázi podprostoru $\mathbb{R}^3$ popsaného rovnicí $x - y + z = 0$.

Řešení:
Množina řešení soustavy má tvar $\{(a-b,a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$. Jedna z možných bází je proto $(0,1,1)^T, (1,1,0)^T$. Po znormalizování prvního vektoru dostaneme

$$z_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T.$$

Po odečtení projekce od vektoru $(1,1,0)^T$ dostáváme

$$\begin{aligned} y_2 &= (1,1,0)^T - \left\langle (1,1,0)^T, \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T \right\rangle \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0,1,1)^T \\ &= (1,1,0)^T - \tfrac{1}{2}(0,1,1)^T = (1,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})^T. \end{aligned}$$

Nyní stačí normalizovat vektor $y_2 = \left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^T$. Ten má normu $\sqrt{3/2}$. Tedy druhý vektor ortonormální báze je

$$z_2 = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \cdot \left(1,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right)^T = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)^T.$$

Poznamenejme, že řešení úlohy se může lišit v závislosti na volbě báze.

Cv. 2.8 Pro skalární součin $\langle x, y\rangle := 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ zortogonalizujte vektory $x_1 = (1,0)^T$, $x_2 = (1,1)^T$.

Řešení:
Důležité je uvědomit si, že postup Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace se nijak nemění. Lišit se budu pouze výpočet skalárního součinu $\langle x, y\rangle$ a normy $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

V prvním kroku normalizujeme vektor $(1,0)^T$. Platí, že

$$\|(1,0)^T\| = \sqrt{2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2} = \sqrt{2\cdot 1^2 + 2\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 0^2} = \sqrt{2},$$

proto $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0)^T$. Dále

$$\langle x_2, z_1\rangle = 2\cdot 1\cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} + 1\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} + 1\cdot 1\cdot 0 = \tfrac{3}{\sqrt{2}},$$

z čehož

$$y_2 = (1,1)^T - \tfrac{3}{\sqrt{2}}\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0)^T = (-\tfrac{1}{2}, 1)^T.$$

Protože

$$\|(-\tfrac{1}{2}, 1)^T\| = \sqrt{2\cdot (\tfrac{1}{2})^2 + 2\cdot(-\tfrac{1}{2})\cdot 1 + 1\cdot 1^2} = \tfrac{1}{\sqrt{2}},$$

má druhý vektor ortonormální báze hodnotu $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1}(-\frac{1}{2}, 1)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,2)^T$.

Můžeme opět provést (dílčí) zkoušku a ověřit, že výsledné vektory z_1, z_2 jsou na sebe kolmé v příslušném skalárním součinu, tedy $\langle z_1, z_2\rangle = 0$.

3. Ortogonální doplněk a projekce

Ortogonální doplněk

Cv. 3.1 Pro vektorový prostor V určete $V^\perp$, $\{0\}^\perp$, $\{\}^\perp$.

Řešení:
Ortogonální doplněk prostoru V má z definice tvar

$$V^\perp := \{x \in V \ ; \forall y \in V : \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Žádný nenulový vektor není kolmý sám na sebe, protože podle definice skalárního součinu je $\langle x, x\rangle > 0$ pro libovolné $x \neq o$. To znamená, že $V^\perp$ obsahuje pouze nulový vektor, čili $V^\perp = \{o\}$.

Každý vektor je kolmý na nulový vektor, čili $\langle x, o\rangle = 0$. Proto $\{0\}^\perp = V$.

V posledním případě máme $\{\}^\perp = V$, protože na vektory $x \in V$ neklademe žádnou podmínku. Neexistuje totiž vektor v $\{\}$, na který by musel být x kolmý.

Cv. 3.2 Buď $M, N \subseteq V$. Ukažte

(a) $M \subseteq N \ \Rightarrow \ N^\perp \subseteq M^\perp$, ale ne naopak,

(b) $(M \cup N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$.

Řešení:

(a) Ortogonální doplňky daných množin jsou

$$N^\perp = \{x \in V \ ; \forall y \in N : \langle x, y\rangle = 0\}$$

a

$$M^\perp = \{x \in V \ ; \forall y \in M : \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Vidíme, že pokud vektor $x \in N^\perp$, poté je kolmý na všechny vektory $y \in N$ a tudíž i na všechny vektory $y \in M \subseteq N$. Tím pádem musí ležet také v $M^\perp$.

Opačný vztah platit nemusí. Mějme například $M = \{0\}$ a $N = \{\}$. Potom platí $M^\perp = N^\perp = V$, ale přesto $M \not\subseteq N$.

(b) Dané množiny se dají vyjádřit jako

$$(M \cup N)^\perp = \{x \in V \ ; \forall y \in M \cup N : \langle x, y\rangle = 0\}$$

a

$$M^\perp \cap N^\perp = \{x \in V \ ; \forall y \in M : \langle x, y\rangle = 0\} \cap \{x \in V \ ; \forall y \in N : \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Množina $M^\perp \cap N^\perp$ je tedy množina vektorů, které jsou kolmá jak na vektory z množiny M, tak na vektory z N. To znamená, že je kolmá na všechny $y \in M \cup N$, což dává definici množiny $(M \cup N)^\perp$.

Cv. 3.3 Najděte podprostor $U \Subset \mathbb{R}^5$ takový, že $\dim U = \dim U^\perp$.

Řešení:
Kombinací $\dim U + \dim U^\perp = n$ se vztahem $\dim U = \dim U^\perp$ dostáváme, že $\dim U = \frac{n}{2}$, což nedává pro $n = 5$ přirozené číslo. Takový podprostor U tedy nemůže existovat.

Cv. 3.4 Spočítejte ortogonální doplněk vektoru $u = (1, 0, 0, -2)^T$ do podprostoru $V = \operatorname{span}\{v, w\} = \operatorname{span}\{(1, 2, 4, 0)^T, (0, 1, 2, 1)^T\}$.

Řešení:
Ortogonální doplněk vektoru u do podprostoru V je vektorový podprostor, který můžeme formálně vyjádřit jako

$$\{u\}^\perp = \{x \in V \ ; \ \langle u, x\rangle = 0\}.$$

Protože V má dimenzi 2 a u není nulový prostor, $\{u\}^\perp$ má dimenzi 1, lze tedy vyjádřit ve tvaru $\{u\}^\perp = \operatorname{span}\{y\}$, kde $y \in V$ a zároveň $y \perp u$. Protože u, y jsou nenulové ortogonální vektory, jsou zároveň lineárně nezávislé a tedy tvoří bázi prostoru V. Z toho vyplývá, že stačí vzít vektor u, doplnit ho na bází V a následně provést Gram-Schmidtovu ortogonalizaci v pořadí, kdy zachováme směr vektoru u. Konkrétně, například vezměme u, v a proveďme ortogonalizaci. Dostáváme

$$y = v - \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u = (1, 2, 4, 0)^T - \frac{1}{5}(1, 0, 0, -2)^T = \frac{1}{5}(4, 10, 20, 2)^T.$$

Všimněme si, že vektor y nemusíme pro naše potřeby normovat, protože už v tuto chvíli jednoznačně určuje $\{u\}^\perp$.

Poznámka. Aby úloha byla dobře definovaná, musí platit $u \in V$. To můžeme ověřit standardním způsobem, kdy vektor u vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů v, w. V tomto případě můžeme ověření učinit také a posteriori tak, že vyjádříme vektor w pomocí vektorů u, y. Protože vektory u, y jsou ortogonální, stačí ověřit platnost Fourierova rozvoje

$$w = \frac{\langle w, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u + \frac{\langle w, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y.$$

Cv. 3.5 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

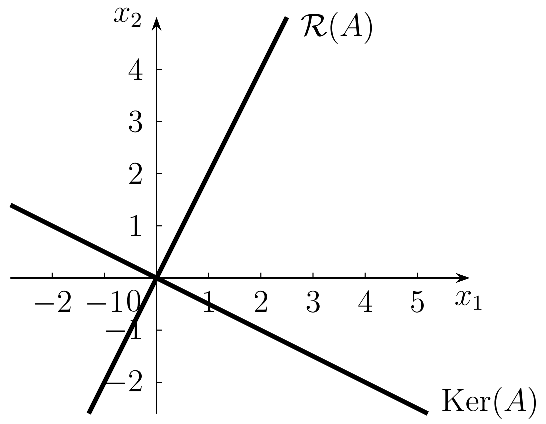
Najděte $\mathcal{R}(A)$, $\operatorname{Ker}(A)$ a nakreslete je do obrázku.

Řešení:
Řádkový prostor matice $\mathcal{R}(A)$ je generovaný řádky matice A. Okamžitě vidíme, že řádky matice jsou na sobě lineárně závislé, proto můžeme řádkový prostor vyjádřit například jako $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}\{(1, 2)^T\}$.

Jádro matice $\operatorname{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^2;\ Ax = 0\}$ odpovídá množině řešení soustavy $Ax = 0$. Odstupňovaný tvar matice A je například

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy množina řešení je přímka $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{span}\{(-2,1)^T\}$.



V obrázku jsou znázorněny oba prostory $\mathcal{R}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$ jako dvě na sebe kolmé přímky. Obrázek tedy ilustruje vlastnost, že tyto prostory jsou navzájem ortogonálními doplňky.

Cv. 3.6 Najděte bázi ortogonálního doplňku k prostoru

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\, x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

Řešení:

Přímočarý postup by byl nejprve určit bázi prostoru V a následně nalézt vektor, který je na ni kolmý. To bychom mohli učinit například tak, že bázi prostoru V doplníme na bázi $\mathbb{R}^3$ a následně provedeme její ortogonalizaci, kde poslední vektor poté tvoří bázi doplňku.

Jednodušší postup je uvědomit si, že všechny vektory z prostoru V splňují rovnici $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Tudíž prostor V je jádrem matice $A = (1\ 1\ 2)$, neboli $V = \mathrm{Ker}(A)$. Podle vzorce $V^\perp = \mathrm{Ker}(A)^\perp = \mathcal{R}(A)$ pak ihned dostáváme, že ortogonální doplněk k prostoru V je generován řádky matice A, tedy $V^\perp = \mathrm{span}\{(1,1,2)^T\}$.

Ortogonální projekce

Cv. 3.7 Uvažujme standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ a přímku $p = \mathrm{span}\{y\}$.

(a) Najděte bod x' na přímce p, který je nejbližší bodu $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Porovnejte velikost projekce x' a vektoru x.

(c) Sestavte matici kolmé projekce na přímku p.

(d) Najděte projekci vektoru $x = (3,-2,5)^T$ na přímku se směrnicí $y = (2,1,1)^T$.

Řešení:

(a) Z přednášky víme, že bod x' odpovídá kolmé projekci x na přímku p, která se dá vyjádřit podle věty o ortogonální projekci jako

$$x' = \left\langle x, \tfrac{y}{\|y\|} \right\rangle \tfrac{y}{\|y\|} = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y.$$

(b) Platí

$$\|x'\| = \left\| \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y \right\| = \left| \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \right| \|y\| = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|^2} \|y\| = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|}.$$

Zároveň můžeme Cauchy-Schwarzovu nerovnost $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ přepsat do tvaru

$$\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|} \leq \|x\|,$$

což dohromady dává $\|x'\| \leq \|x\|$. To znamená, že norma kolmé projekce je vždy shora omezena normou původního vektoru.

(c) Kolmá projekce na přímku $p = \operatorname{span}\{y\}$ má předpis $x \mapsto \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y$. Výraz ekvivalentně přepíšeme

$$\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y = \frac{x^T y}{y^T y} y = \frac{1}{y^T y}(x^T y) y.$$

Protože $(x^T y)y = y(y^T x) = yy^T x$, můžeme projekci psát ve tvaru

$$\frac{1}{y^T y} yy^T x.$$

Vidíme, že $A = \frac{1}{y^T y} yy^T$ je maticový předpis kolmé projekce na přímku $p = \operatorname{span}\{y\}$.

(d) V zásadě dosadíme do vzorečku pro projekci konkrétní hodnoty. Spočítáme

$$\langle x, y\rangle = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 9, \quad \langle y, y\rangle = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 6.$$

Projekce tedy odpovídá vektoru $\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y = \frac{3}{2} y = \frac{3}{2}(2, 1, 1)^T$.

Cv. 3.8 Určete ortogonální projekci p vektoru $a = (2, 2, 1, 5)^T$ do podprostoru generovaného ortonormálními vektory

$$B = \left\{ (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T,\ (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T,\ (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T \right\}.$$

Dále určete souřadnice této projekce $[p]_B$ vzhledem k bázi B.

Řešení:

Protože B je ortonormální bází daného podprostoru, můžeme postupovat přímo podle věty o projekci, která říká, že

$$p = \sum_{i=1}^{3} \langle a, z_i\rangle z_i,$$

kde

$$z_1 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T, \quad z_2 = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T, \quad z_3 = (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T.$$

Spočítáme Fourierovy koeficienty

$$\langle a, z_1\rangle = 5, \quad \langle a, z_2\rangle = -2, \quad \langle a, z_3\rangle = 1.$$

Hledaná projekce p se určí jako

$$p = \sum_{i=1}^{3} \langle a, z_i \rangle z_i = 5z_1 - 2z_2 + 1z_3 = (1, 3, 2, 4)^T.$$

Dále vidíme, že souřadnice vektoru a vzhledem k bázi $B = \{z_1, z_2, z_3\}$ odpovídají Fourierovým koeficientům, a tedy $[p]_B = (5, -2, 1)^T$.

Cv. 3.9 Určete vzdálenost bodu $A = [5, 5, 3, 3]$ od roviny ρ procházející počátkem a body $B = [0, 1, -1, 0]$ a $C = [4, -2, 2, -1]$.

Řešení:

Spočítáme projekci A' bodu A do roviny ρ a hledaná vzdálenost je potom vzdálenost A od A'.

Abychom postupovali podle standardního postupu, označme vektory

$$a = (5, 5, 3, 3)^T, \quad b = (0, 1, -1, 0)^T, \quad c = (4, -2, 2, -1)^T.$$

Pro vyjádření projekce potřebujeme ortonormální bázi roviny $\rho = \operatorname{span}\{b, c\}$. Budeme tedy postupovat Gramovou–Schmidtovou ortogonalizací aplikovanou na vektory b, c:

$$\begin{aligned}
z_1 &:= \tfrac{1}{\|b\|} b = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, -1, 0)^T, \\
y_2 &:= c - \langle c, z_1 \rangle z_1 = (4, -2, 2, -1)^T - (-2\sqrt{2})\tfrac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, -1, 0)^T = (4, 0, 0, -1)^T, \\
z_2 &:= \tfrac{1}{\|y_2\|} y_2 = \tfrac{\sqrt{17}}{17}(4, 0, 0, -1)^T
\end{aligned}$$

a dostaneme ortonormální bázi z_1, z_2. Projekce a' vektoru a do roviny ρ má potom tvar

$$\begin{aligned}
a' &= \langle a, z_1 \rangle z_1 + \langle a, z_1 \rangle z_1 \\
&= \sqrt{2}\tfrac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, -1, 0)^T + \sqrt{17}\tfrac{\sqrt{17}}{17}(4, 0, 0, -1)^T \\
&= (4, 1, -1, -1)^T.
\end{aligned}$$

Nakonec spočítáme požadovanou vzdálenost a od a' jako

$$\|a - a'\| = \|(5, 5, 3, 3)^T - (4, 1, -1, -1)^T\| = \|(1, 4, 4, 4)^T\| = 7.$$

Závěr: Vzdálenost bodu A od roviny obsahující o, B a C je 7.

Cv. 3.10 Při standardním skalárním součinu určete vzdálenost $c \in \mathbb{R}^n$ od

(a) podprostoru $a^T x = 0$, kde $o \neq a \in \mathbb{R}^n$,

(b) podprostoru $a^T x = b$, kde $o \neq a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.

Řešení:

(a) Vzdálenost c od nadroviny $a^T x = 0$ se rovná vzdálenosti c od jeho projekce c_n na tuto nadrovinu, tedy normě vektoru $c - c_n$. Výpočet ale výrazně usnadníme, pokud si uvědomíme, že vektor $c_p = c - c_n$ je vlastně projekce vektoru c na ortogonální doplněk k nadrovině, což je přímka $\mathrm{span}\{a\}$. Projekci na přímku $\mathrm{span}\{a\}$ umíme již vyjádřit jako

$$c_p = \frac{\langle c, a\rangle}{\langle a, a\rangle} a = \frac{c^T a}{\|a\|^2} a.$$

Velikost tohoto vektoru je rovna hledané vzdálenosti

$$\|c_p\| = \left\| \frac{c^T a}{\|a\|^2} a \right\| = \frac{|c^T a|}{\|a\|^2} \|a\| = \frac{|c^T a|}{\|a\|}.$$

(b) Úlohu převedeme na předchozí případ, a to tak, že vektor c a nadrovinu $a^T x = b$ přesuneme o stejný vektor d tak, aby daná nadrovina procházela počátkem.

Jak najít vektor d? Chceme v zásadě rovnici $a^T x = b$ přepsat do tvaru $a^T(x + d) = 0$. Porovnáním obou rovnic dostaneme $a^T d = -b$. Pro vektor d máme nekonečně mnoho možností jak jej zvolit, ale řešení s jednoduchým předpisem je $d = -\frac{b}{a^T a} a$.

Posunutím o vektor d se vzdálenosti mezi objekty nezmění a úlohu tak převedeme na předchozí případ hledání vzdálenosti vektoru $c - \frac{b}{a^T a} a$ od nadroviny $a^T x = 0$. Dosazením do vzorce dostáváme

$$\frac{|(c - \frac{b}{a^T a} a)^T a|}{\|a\|} = \frac{|c^T a - b|}{\|a\|}.$$

Cv. 3.11 Rozložte $u = (3, 2, 6)^T$ na součet $u = v + w$, kde $v \in V = \mathrm{span}\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 1)^T\}$ a $w \in V^\perp$.

<u>Řešení:</u>

Vektor v určíme jako kolmou projekci u do podprostoru V. Poté dopočítáme $w = u - v$. Matice projekce do V má tvar $P = A(A^T A)^{-1} A^T$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dosazením dostáváme

$$v = Pu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a

$$w = u - v = (3, 2, 6)^T - (3, 4, 4)^T = (0, -2, 2)^T.$$

Alternativně by bylo možné spočítat vektor u pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace, kde bychom ortogonalizovali vektory $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 1)^T$, a poté spočítali projekci s využitím ortonormální báze.

Ještě jiný postup je vypočítat nejprve vektor w, a teprve potom vektor v jako $v = u - w$. Výhoda tohoto postupu spočívá v tom, že vektor w je projekcí vektoru u do podprostoru $V^\perp$. Protože $V^\perp = \mathrm{span}\{(0, 1, -1)^T\}$, jedná se o jednoduchou projekci na přímku.

Metoda nejmenších čtverců

Cv. 3.12 Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení x' soustavy $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé.

Určete také velikost chyby $\|Ax' - b\|$.

Dostanete stejná řešení jako řešení soustavy $A^T Ax = A^T b$?

Řešení:

Přibližné řešení dané soustavy nalezneme jako souřadnice projekce vektoru b do sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ matice A. Protože sloupce a_1, a_2 a a_3 matice A jsou vzájemně kolmé, je projekce vektoru b do sloupcového prostoru A přímo dána předpisem

$$b_{\mathcal{S}(A)} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle b, a_i \rangle}{\|a_i\|^2} a_i = 3a_1 - 2a_2 + a_3 = (4, 8, 13, 9)^T.$$

Hledané koeficienty jsou tedy $x' = (3, -2, 1)^T$. Protože sloupce matice A jsou navzájem ortogonální (a tedy lineárně nezávislé), je nalezené x' určené jednoznačně.

Výsledná chyba je

$$\|Ax' - b\| = \|b_{\mathcal{S}(A)} - b\| = \sqrt{45}.$$

Na závěrečnou otázku je odpověď „ano“, což je známo z přednášky. Výsledné řešení je stejné jako řešení soustavy normálních rovnic $A^T Ax = A^T b$. Protože matice A má lineárně nezávislé sloupce, tak matice $A^T A$ je regulární a soustava normálních rovnic má jediné řešení $x' = (3, -2, 1)^T$.

Cv. 3.13 Metodou nejmenších čtverců spočítejte přibližné řešení soustavy $Ax = b$, kde $A = (1, \dots, 1)^T$ se skládá ze sloupce jedniček a $b \in \mathbb{R}^n$.

Řešení:

Vyjádřením soustavy normálních rovnic $A^T Ax = A^T b$ dostáváme

$$n \cdot x = \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

tedy přibližným řešením metodou nejmenších čtverců je aritmetický průměr $x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i$ prvků vektoru pravých stran b.

Cv. 3.14 Hookův zákon vyjadřuje lineární úměrnost pružné deformace materiálu na použité síle. Následující tabulka obsahuje hodnoty průtahu pružiny (v palcích) v závislosti na síle/hmotnosti (v librách). Odhadněte koeficient úměrnosti.

síla F	5	7	8	10	12
průtah ℓ	11,1	15,4	17,5	22	26,3

Řešení:
Pro zadané hodnoty síly F a průtahu ℓ hledáme koeficient c, pro který platí $cF = \ell$ (např. pro první sloupec tabulky $c \cdot 5 = 11{,}1$). Chceme tedy řešit soustavu $Ax = b$ tvaru

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 11{,}1 \\ 15{,}4 \\ 17{,}5 \\ 22 \\ 26{,}3 \end{pmatrix}.$$

Tato soustava nemá řešení, využijeme proto metodu nejmenších čtverců. Pro tuto soustavu dostáváme normální soustavu rovnic $A^T A x' = A^T b$ s maticí

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = 382$$

a vektorem pravých stran

$$A^T b = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11{,}1 \\ 15{,}4 \\ 17{,}5 \\ 22 \\ 26{,}3 \end{pmatrix} = 838{,}9.$$

Přibližné řešení x' dává směrnici přímky (= koeficient úměrnosti)

$$c = (A^T A)^{-1} A^T b \approx 2{,}1961.$$

4. Ortogonální matice

Cv. 4.1 Rozhodněte, zda následující matice jsou ortogonální:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je ortogonální právě tehdy, když $Q^TQ = I_n$. Stačí tedy ověřit tuto vlastnost pro zadané matice. Pro první matici spočítáme

$$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

takže matice není ortogonální. Sloupce matice sice tvoří ortogonální bázi prostoru $\mathbb{R}^2$, ale nikoliv ortonormální bázi. Poznamenejme, že matice $\frac{1}{\sqrt{2}}A$ by již ortogonální byla.

Pro druhou matici spočítáme

$$B^TB = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde jsme využili goniometrickou identitu $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Matice B je tudíž ortogonální.

Konečně pro třetí matici máme $C^TC = I_3$, takže je také ortogonální.

Cv. 4.2 Buď $H(u) = I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T$, $u \neq o$, Householderova matice.

(a) Dokažte, že $H(u)$ je symetrická.

(b) Dokažte, že $H(u)$ je ortogonální.

(c) Rozhodněte, zda I_n je Householderovou maticí pro určité $u \neq o$.

Řešení:

(a) Ověříme

$$H(u)^T = \left(I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T\right)^T = I_n^T - \frac{2}{u^Tu}(uu^T)^T = I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T = H(u),$$

tudíž je $H(u)$ symetrická.

(b) Ověříme ortogonalitu Householderovy matice z definice:

$$\begin{aligned} H(u)^TH(u) = H(u)H(u) &= \left(I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T\right)\left(I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T\right) \\ &= I_n - 2\frac{2}{u^Tu}uu^T + \frac{4}{(u^Tu)^2}uu^Tuu^T \\ &= I_n - \frac{4}{u^Tu}uu^T + \frac{4}{(u^Tu)^2}u(u^Tu)u^T \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= I_n - \frac{4}{u^T u} u u^T + \frac{4(u^T u)}{(u^T u)^2} u u^T \\
&= I_n - \frac{4}{u^T u} u u^T + \frac{4}{u^T u} u u^T = I_n.
\end{aligned}
$$

V úpravách jsme použili vztah $u(u^T u)u^T = (u^T u)uu^T$, který plyne z toho, že $(u^T u)$ je skalár, a tudíž lze z celého výrazu vytknout na začátek.

(c) Rovnost $H(u) = I_n$ nemůže nikdy nastat, protože by to znamenalo, že $\frac{2}{u^T u} uu^T = 0$. A tato rovnost nenastane (pro $u \neq 0$ rovnost neplatí a pro $u = 0$ bychom ve zlomku dělili nulou).

Cv. 4.3 Nechť $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou ortogonální. Je bloková matice

$$
A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}
$$

ortogonální?

Řešení:

Ano a lze to nahlédnout několika způsoby.

První způsob je přímo z definice tím, že ověříme rovnost $A^T A = I_{m+n}$:

$$
A^T A = \begin{pmatrix} P^T & 0 \\ 0 & Q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^T P & 0 \\ 0 & Q^T Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{m+n}.
$$

Druhý možný způsob využívá charakterizace, že matice A je ortogonální právě tehdy, když její sloupečky tvoří ortonormální systém. To znamená, že sloupce A musí být navzájem kolmé a mít jednotkovou velikost:

- Pokud zvolíme dva sloupce z prvního bloku matice A, tak budou na sebe kolmé, protože matice P je ortogonální. Pokud zvolíme dva sloupce z druhého bloku matice A, tak budou na sebe kolmé, protože matice Q je ortogonální. Zbývá případ, kdy zvolíme jeden sloupec z prvního bloku a druhý z druhého bloku. I pak budou vektory na sebe kolmé díky nulovým složkám pod maticí P a nad maticí Q.
- Konečně sloupce matice A mají jednotkovou velikost, protože ji mají sloupce P i Q a přidáním nulových složech se velikost nezmění.

Cv. 4.4 Najděte všechny

(a) diagonální ortogonální matice řádu n,

(b) diagonální unitární matice řádu n.

Kolik jich je?

Řešení:

(a) Diagonální matice (s libovolnými prvky na diagonále) má vždy ve sloupcích ortogonální systém. Takže aby matice byla ortogonální, musí mít sloupce jednotkovou velikost. Tudíž pro každý prvek na diagonále musí platit $|a_{ii}| = 1$, což znamená, že $a_{ii} = 1$ nebo $a_{ii} = -1$. Matice tedy má tvar

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pm 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Takovýchto matice je 2^n.

(b) Analogicky jako v předchozím případě pro hledané matice platí $|a_{ii}| = 1$. Jelikož jsou tentokrát prvky matice komplexní čísla, je prvek a_{ii} jakékoli číslo na komplexní jednotkové kružnici, například 1, -1, i, $-i$, nebo $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$. Těchto čísel je nekonečně mnoho, takže i matic daného typu je nekonečně mnoho.

Cv. 4.5 Které z matic elementárních úprav jsou ortogonální?

Řešení:

Jsou to pouze dvě:

1. Matice prohození dvou řádků E_{ij}.
2. Matice $E_i(\pm 1)$ vynásobení řádku i číslem ± 1.

Snadno ověříme, že obě tyto matice jsou ortogonální. A naopak, žádná jiná už ortogonální není.

Cv. 4.6 Buď $p \in S_n$ permutace a $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ permutační matice definovaná tak, že $P_{ij} = 1$ pokud $i = p(j)$ a nula jinak.

(a) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vykoná operace PA?

(b) Nahlédněte, že P vznikne z jednotkové matice zpermutováním jejích řádků podle p.

(c) Dokažte, že P je ortogonální matice.

(d) Nechť Q je permutační matice odpovídající permutaci q. Jaká matice odpovídá permutaci $p \circ q$?

(e) Jaká permutační matice odpovídá permutaci p^{-1}?

(f) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vykoná operace AP?

Řešení:

(a) Součin PA zpermutuje řádky matice A podle permutace p.

Důkaz. Řádek $p(i)$ matice PA má tvar

$$(PA)_{p(i),*} = P_{p(i),*}A = e_i^T A = A_{i,*}.$$

Tudíž v řádku $p(i)$ matice PA je i-tý řádek původní matice A.

(b) Z předchozího bodu můžeme na matici $P = PI_n$ pohlížet jako na jednotkovou matici, jejíž řádky zpermutujeme podle p.

(c) P je ortogonální, protože její řádky tvoří ortonormální systém vektorů, jsou to vlastně zpermutované jednotkové vektory.

(d) Permutaci $p \circ q$ odpovídá matice PQ.

Důkaz (z významu). Pišme $PQ = P(QI_n)$, tudíž matice PQ vznikne z jednotkové matice tak, že nejprve zpermutujeme řádky podle permutace q a pak podle permutace p, což je totéž, jako když je zpermutujeme podle $p \circ q$.

Důkaz (z definice). Kdy nastane situace $(PQ)_{ij} = 1$? Protože $(PQ)_{ij} = P_{i,*}Q_{*,j}$, tak situace nastane právě tehdy, když i-tý řádek matice P i j-tý sloupec matice Q jsou stejné jednotkové vektory, např e_k. Protože $P_{i,*} = e_k^T$, je $i = p(k)$. Protože $Q_{*,j} = e_k$, je $k = q(j)$. Tudíž $i = p(k) = p(q(j)) = (p \circ q)(j)$.

(e) Protože $P^T = P^{-1}$, tak máme $P^T P = I_n$. Tudíž permutaci p^{-1} odpovídá permutační matice P^T.

(f) Součin AP zpermutuje sloupce matice A podle permutace p^{-1}.

Důkaz. Tvrzení můžeme snadno nahlédnout z předchozích bodů tak, že vyjádříme $AP = (P^T A^T)^T$, čili matice $P^T A^T$ zpermutuje řádky matice A^T podle permutace p^{-1}.

Cv. 4.7 Rozhodněte o platnosti výroků:

(a) Má-li regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ navzájem kolmé řádky, pak má i navzájem kolmé sloupce.

(b) Má-li matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ navzájem kolmé řádky velikosti 1, pak má i navzájem kolmé sloupce.

<u>Řešení</u>:

(a) Neplatí, uvažujme například matici $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Její řádky jsou na sebe navzájem kolmé, ale sloupce na sebe navzájem kolmé nejsou.

(b) Platí, protože matice je nutně je ortogonální.

5. Determinanty – výpočet

Cv. 5.1 Spočítejte determinanty následujících reálných matic. Použijte výpočet z definice, pomocí Gaussovy eliminace a pomocí Laplaceova rozvoje podle nějakého řádku.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

(A) Výpočet z definice. Výpočet determinantu matice řádu $n \times n$ z definice vyžaduje enumeraci všech permutací a příslušných $n!$ členů, proto je rozumné determinant počítat z definice jenom pro malé řády. V našem případě musíme určit $3! = 6$ členů. Postupovat můžeme podle Sarrusova pravidla, které nabízí mnemotechnickou pomůcku na vyjádření determinantu. Konkrétně,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ &\quad - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} \\ &= 4 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 \\ &= -9. \end{aligned}$$

Determinant matice je tedy $\det(A) = -9$.

Stejným způsobem spočítáme hodnotu determinantu druhé matice a dostaneme, že $\det(B) = 60$.

(B) Gaussova eliminace. Výpočet determinantu pomocí Gaussovy eliminace funguje tak, že matici převedeme na odstupňovaný tvar pomocí elementárních řádkových úprav. Řádkové úpravy mění determinant, proto musíme zaznamenávat příslušnou změnu. Konkrétně záměna dvou řádků změní znaménko determinantu a vynásobení řádku číslem c změní determinant c-krát. Přičtení násobku řádku k jinému řádku determinant nemění. Jakmile máme matici upravenou na REF tvar, tak stačí jen vynásobit prvky na diagonále, protože determinant trojúhelníkové matice je roven součinu diagonálních prvků.

Postup předvedeme na matici B:

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= -1 \det \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} && \text{(Výměna 1. a 2. řádku, det se násobí } -1\text{)} \\ &= -2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} && \text{(Vydělíme 1. řádek 2, det se zmenší 2-krát)} \end{aligned}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(Přičteme 3-krát 1. řádek k 2., det se nemění)}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{(Přičteme 2-krát 1. řádek k 3., det se nemění)}$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{(Výměna 2. a 3. řádku, det se násobí } -1\text{)}$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix} \qquad \text{(Odečteme 5-krát 2. řádek od 3., det. se nemění)}$$

$$= 2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-30) = 60. \qquad \text{(Vynásobíme prvky na diagonále)}$$

Hledaný determinant matice B je tedy $\det(B) = 60$.

(C) Laplaceův rozvoj. Na matici A aplikujeme Laplaceův rozvoj podle druhého řádku. Proč jsme zvolili druhý řádek? Jak uvidíme ve výpočtu dole, tak každý nulový prvek v řádku nám zjednodušuje výpočet. Proto je z hlediska časové náročnosti výpočtu nejlepší zvolit řádek (nebo sloupec) s co nejvíce nulami.

Konkrétně Laplaceův rozvoj pracuje následovně; výpočet determinantů podmatic velikosti 2×2 již provádíme z definice:

$$\begin{aligned} \det(A) = \det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 0 + (-1)^{2+2} \cdot (-1) \cdot 2 + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot 7 \\ &= -9. \end{aligned}$$

Determinant matice je $\det(A) = -9$. Tím, že druhý řádek matice A začíná nulou, jsme v Laplaceově rozvoji ušetřili výpočet determinantu jedné podmatice řádu 2×2.

Cv. 5.2 Spočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Můžeme postupovat Gaussovou eliminací nebo Laplaceovým rozvojem. Pokud zvolíme druhý způsob, je výhodné provést rozvoj podle posledního sloupce a dostaneme

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+4}\cdot 4\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^{2+4}\cdot 5\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+4}\cdot 4\cdot 1 + (-1)^{2+4}\cdot 5\cdot 2 = 6.
\end{aligned}$$

Cv. 5.3 Spočtěte determinant následujících matic:

(a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix},$$

(b) $$B = \begin{pmatrix} a_1 + x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + x \end{pmatrix}.$$

Řešení:

(a) První řádek přičteme ke všem ostatním. Získáme horní trojúhelníkovou matici, jejíž diagonála je postupně tvořena čísly 1 až n. Determinant matice je tudíž roven $n!$.

(b) Poslední řádek odečteme od všech předchozích (hodnoty a_i zůstanou pouze v posledním řádku). Dostaneme matici

$$B' = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & -x \\ 0 & x & 0 & \dots & -x \\ 0 & 0 & x & \dots & -x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + x \end{pmatrix}.$$

Poté využijeme rovnosti $\det(B) = \det(B^T)$, matici transponujeme, přičteme všechny řádky k poslednímu a znovu matici transponujeme. Jinými slovy jsme k poslednímu sloupci B přičetli všechny předchozí sloupce (při výpočtu determinantu můžeme provádět i elementární sloupcové úpravy právě díky rovnosti $\det(B) = \det(B^T)$). Dostaneme

$$B'' = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x + \sum_{i=1}^n a_i \end{pmatrix}.$$

Matice je v dolním trojúhelníkovém tvaru a její determinant je tudíž součin diagonálních prvků. Tím dostáváme $\det(B) = (a_1 + \ldots + a_n + x)x^{n-1}$.

Cv. 5.4 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Rozhodněte, zda následující vztahy pro blokové matice platí či ne:

(a) $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$,

(b) $\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$.

<u>Řešení:</u>

(a) Rovnost platí. Nahlédnout to můžeme pomocí Gaussovy eliminace. Pokud je aplikujeme na celou matici $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$, dostaneme stejný výsledek, jako kdybychom ji aplikovali na obě matice A, B odděleně, a pak výsledné matice blokově složili.

Determinant trojúhelníkové matice spočítáme součinem prvků na diagonále. Takže dostaneme stejný výsledek, pokud vynásobíme diagonálu celé velké matice, nebo jestli vynásobíme diagonálu dvou menších matic a tyto dvě čísla pak vynásobíme mezi sebou.

Poznámka. Zde je namístě si uvědomit, že obecně rovnost

$$\mathrm{RREF}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{RREF}(A) & 0 \\ 0 & \mathrm{RREF}(B) \end{pmatrix}$$

neplatí. V tom případě, kdy tato rovnost neplatí, je ale matice A singulární a identita $\det\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) = \det(A)\det(B)$ zůstává v platnosti.

(b) Můžeme uvažovat stejně jako v předchozím případě. Na matici C totiž vůbec nezáleží a nijak neovlivní postup a výsledek elementárních úprav, aplikovaných na bloky, kde se nachází matice A a B.

Cv. 5.5 Rozhodněte, zda platí $\det(AB) = \det(BA)$.

<u>Řešení:</u>

Pokud jsou obě matice čtvercové, tak rovnost platí. Podle vlastností determinantu odvodíme $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$.

Nicméně, výraz má smysl i pro obdélníkové matice, a to pokud matice A má rozměr $m \times n$ a matice B má rozměr $n \times m$. Potom součin AB je čtvercová matice řádu $m \times m$ a BA je čtvercová matice řádu $m \times m$. V tomto obecném případě už rovnost platit nemusí. Jako protipříklad poslouží například matice $A = (1, 1, 1, 1)$, $B = A^T$. Potom $\det(AB) = 4 \neq 0 = \det(BA)$.

Cv. 5.6 Zjednodušte výraz $\det(SAS^{-1})$ pro matice $A, S \in \mathbb{T}^{n\times n}$.

Řešení:
Podle vlastností determinantu upravíme

$$\det(SAS^{-1}) = \det(S)\det(A)\det(S^{-1}) = \det(A).$$

Cv. 5.7 Spočítejte determinanty matic nad příslušnými tělesy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_5, \qquad B = \begin{pmatrix} i-1 & 1 & 0 \\ 1 & i & i \\ 2 & 1 & i+i \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{C}.$$

Řešení:

Máme dvě možnosti jak spočítat determinant nad tělesem $\mathbb{Z}_p$. První je spočítat determinant jedním ze standardních způsobů (z definice, Gaussovou eliminací, či Laplaceovým rozvojem), ale používat operace z tělesa $\mathbb{Z}_p$. Druhá možnost je vypočítat determinant jako pro reálnou matici a výsledek pak vyjádřit modulo p. Proč tento způsob funguje? Determinant je podle definice jen součet součinů prvků matice, takže je jedno, jestli modulo počítáme průběžně nebo až na konci. Každopádně, determinant je roven 16, pokud počítáme v $\mathbb{R}$, a 1, pokud počítáme v $\mathbb{Z}_5$.

Determinant komplexní matice spočítáme standardně, jenom používáme komplexní aritmetiku. Například podle definice Sarrusovým pravidlem dostaneme

$$\begin{aligned} \det(B) = \det &\begin{pmatrix} i-1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & i \\ -1 & 1 & i+1 \end{pmatrix} \\ &= (i-1)\cdot 1\cdot(i+1) + 2\cdot i\cdot(-1) + 1\cdot 0\cdot 1 \\ &\quad - (i-1)\cdot i\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot(i+1) - 1\cdot 1\cdot(-1) \\ &= -2 - 2i + 0 + 1 + 0 + (i+1) \\ &= -i. \end{aligned}$$

6. Determinanty – použití

Aplikace determinantu

Cv. 6.1 Vyřešte následující soustavu rovnic pomocí Cramerova pravidla.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right).$$

Řešení:

Nejprve spočteme determinant matice A, například pomocí Gaussovy eliminace:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\cdot(-1)\cdot 3\cdot(-7) = -7.
\end{aligned}$$

Nyní spočteme determinanty matic, kde postupně nahrazujeme první, druhý a třetí sloupec pravou stranou rovnice, tedy vektorem b.

1) Spočítáme determinant matice A, jejíž první sloupec nahradíme vektorem b. Determinant spočítáme Laplaceovým rozvojem podle druhého sloupce:

$$\begin{aligned}
\det(A_1) &= \det\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & -2 \\ 10 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{3+2}\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot 2 + (-1)^{2+2}\cdot 1\cdot(-9) + (-1)^{3+2}\cdot(-1)\cdot 4 \\
&= -7.
\end{aligned}$$

První složka x_1 výsledného řešení $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ je pak rovna

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-7}{-7} = 1.$$

2) Nyní v matici A nahradíme druhý sloupec na vektor b a spočítáme její determinant

$$\begin{aligned}
\det(A_2) &= \det\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -1 & -6 & -2 \\ 3 & 10 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 10 & 3 \end{pmatrix} \\
&= -\det\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -8 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\det\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 7.
\end{aligned}$$

Dostáváme $x_2 = \frac{7}{-7} = -1$.

3) Dopočítáme třetí složku výsledného vektoru (nahrazujeme třetí sloupec):

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 6 & -24 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} = -14.$$

Dostáváme $x_3 = \frac{-14}{-7} = 2$.

Závěr: Řešením soustavy je vektor $x = (1, -1, 2)^T$.

Cv. 6.2 Vyřešte následující soustavu rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$ pomocí Cramerova pravidla.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 3 \\ 2 & 1 & a \end{array}\right).$$

<u>Řešení</u>:

Nejprve určíme determinant matice A:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = a \cdot 1 - 2 \cdot 1 = a - 2.$$

Nyní musíme rozlišit dva případy:

1. Pro $a \neq 2$ je matice regulární a můžeme postupovat podle Cramerova pravidla. Spočítáme determinant matice A, jejíž první sloupec nahradíme vektorem b:

$$\det(A_1) = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} = 3 - a.$$

Dále spočítáme determinant matice A, jejíž druhý sloupec nahradíme vektorem b:

$$\det(A_2) = \det\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & a \end{pmatrix} = a^2 - 6.$$

Řešení soustavy má tedy tvar pro $a \neq 2$:

$$x = (x_1, x_2)^T = \left(\frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \frac{\det(A_2)}{\det(A)}\right)^T = \left(\frac{3-a}{a-2}, \frac{a^2-6}{a-2}\right)^T.$$

2. Pro $a = 2$ je matice A singulární, a soustavu musíme vyřešit zvlášť. Dosazením $a \coloneqq 2$ získá soustava konkrétní tvar

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Je zřejmé, že v tomto případě je soustava neřešitelná.

Cv. 6.3 Pomocí determinantu určete obsah trojúhelníku s vrcholy

(a) $a = (1,1)^T$, $b = (2,5)^T$, $c = (3,2)^T$,

(b) $a = (1,3,1)^T$, $b = (3,3,3)^T$, $c = (3,1,2)^T$.

Řešení:

(a) Trojúhelník posuneme o vektor $-(1,1)^T$, tedy tak, aby vrchol a přešel do počátku. Dostaneme trojúhelník s vrcholy $a' = (0,0)^T$, $b' = (1,4)^T$, $c' = (2,1)^T$. Uvažujme matici

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

jejíž řádky jsou tvořeny vektory b', c'. Z geometrické interpretace determinantu víme, že hodnota $|\det(M)|$ udává obsah rovnoběžníku, určeného vektory b', c'. Zadaný trojúhelník má poloviční obsah, proto je hledaná hodnota

$$\frac{1}{2}|\det(M)| = \frac{1}{2}|-7| = \frac{7}{2}.$$

(b) Postupujeme analogicky, jako v předchozím případě. Posuneme trojúhelník o vektor $-(1,3,1)^T$, čímž se vrchol a posune do počátku. Dostaneme trojúhelník s vrcholy $a' = (0,0,0)^T$, $b' = (2,0,2)^T$, $c' = (2,-2,1)^T$. Nyní sestavíme matici

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

jejíž řádky jsou tvořeny vektory b', c'. Protože matice není čtvercová, obsah rovnoběžníku, určeného vektory b', c', určíme nyní podle obecnějšího vzorce $\sqrt{\det(MM^T)}$. Zadaný trojúhelník má opět poloviční obsah, čili

$$\frac{1}{2}\sqrt{\det(MM^T)} = \frac{1}{2}\sqrt{\det\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3.$$

Cv. 6.4 Určete objem elipsoidu, který vznikne obrazem jednotkové koule při zobrazení $x \mapsto Ax$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Z geometrické interpretace determinantu víme, že lineární zobrazení $x \mapsto Ax$ mění objemy s faktorem $|\det(A)|$. Jednotková koule má objem $\frac{4}{3}\pi$ a determinant je roven $\det(A) = 9$, čili elipsoid má objem $\frac{4}{3}\pi|\det(A)| = \frac{4}{3}\pi 9 = 12\pi$.

Adjungovaná matice

Cv. 6.5 Spočítejte adjungovanou matici k matici A a ověřte vztah $A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)I_n$

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) Adjungovanou matici spočítáme podle definice. Adjungovaná matice $\operatorname{adj}(A)$ má stejný rozměr jako matice A a její prvky jsou určené vzorečkem $\operatorname{adj}(A)_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A^{ji})$, kde A^{ji} představuje matici A po odstranění j-tého řádku a i-tého sloupce. Dostaneme

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vztah $A\operatorname{adj}(A) = \det(A)I_n$ ověříme snadno dosazením

$$A\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \det(A)I_2.$$

(b) Postupujeme opět podle definice. Pro ilustraci ukážeme detailně výpočet prvního řádku adjungované matice:

$$\begin{aligned}
\operatorname{adj}(A)_{11} &= (-1)^{1+1}\det(A^{11}) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2, \\
\operatorname{adj}(A)_{12} &= (-1)^{1+2}\det(A^{21}) = -\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2, \\
\operatorname{adj}(A)_{12} &= (-1)^{1+3}\det(A^{31}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4.
\end{aligned}$$

Zbylé prvky dopočítáme analogicky. Nakonec dostaneme

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vztah $A\operatorname{adj}(A) = \det(A)I_n$ opět ověříme snadno dosazením

$$A\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \det(A)I_3.$$

Cv. 6.6 Vyjádřete $\operatorname{adj}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

Řešení:

Podle definice určíme jednotlivé prvky adjungované matice:

$$\operatorname{adj}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Cv. 6.7 Spočítejte adjungovanou matici k následujícím maticím:

(a) I_n,

(b) $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) Zde můžeme využít vzorečku, že pro regulární matici A platí $\mathrm{adj}(A) = \det(A)A^{-1}$. V našem případě $\mathrm{adj}(I_n) = \det(I_n)I_n^{-1} = I_n$.

(b) Zde musíme postupovat z definice, protože obecná diagonální matice nemusí být regulární. Mimodiagonální prvky adjungované matice budou nulové, protože odstraněním j-tého řádku a i-tého sloupce z matice pro $i \neq j$ dostaneme singulární matici (má nulový řádek). Pro i-tý prvek na diagonále máme

$$\mathrm{adj}(D)_{ii} = (-1)^{i+i} \det(D^{ii}) = d_1 \dots d_{i-1} d_{i+1} \dots d_n.$$

Tudíž

$$\mathrm{adj}(D) = \begin{pmatrix} d_2 \dots d_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_1 d_3 \dots d_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_1 \dots d_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Cv. 6.8 Vyjádřete $\det(\mathrm{adj}(A))$ vzorečkem pomocí $\det(A)$.

Řešení:

Rozlišíme dva případy:

1. Nechť A je regulární: Potom podle známých vzorců vyjádříme

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{adj}(A)) &= \det(\det(A)A^{-1}) = \det(A)^n \det(A^{-1}) \\ &= \det(A)^n \det(A)^{-1} = \det(A)^{n-1}. \end{aligned}$$

2. Nechť A je singulární. Potom $\det(A) = 0$ a tudíž $A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)I_n = 0$. Rozlišíme dva podpřípady: Pokud je $A = 0$, potom $\mathrm{adj}(A) = 0$ a dostaneme $\det(\mathrm{adj}(A)) = 0$. Pokud $A \neq 0$, potom $\mathrm{adj}(A)$ je singulární, neboť regulární matice se nemůže s nenulovou maticí vynásobit na nulovou (což pokrývá definici regulární matice, která říká, že s nenulovým vektorem se nemůže vynásobit na nulový vektor). Tudíž opět dostáváme $\det(\mathrm{adj}(A)) = 0$.

Závěr: Zahrnuvše oba případy, můžeme tvrdit, že $\det(\mathrm{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$.

7. Vlastní čísla – základy

Cv. 7.1 Vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reprezentuje směr, který se při lineárním zobrazení $f(x) = Ax$ zobrazí opět na ten samý směr (mění se tedy pouze velikost nebo orientace vektoru). Pro vlastní vektor v matice A tedy platí, že přímka $\operatorname{span}\{v\}$ se při zobrazení f zobrazí do sebe sama. Příslušné vlastní číslo matice pak představuje škálování v tomto invariantním směru.

Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

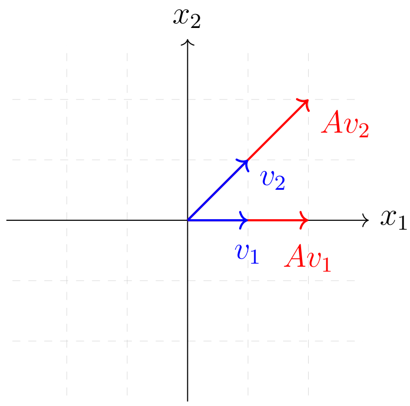
(d) $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) Lineární zobrazení $f(x) = Ax$ odpovídá dvojnásobnému zvětšení vektoru x, tedy

$$f\left((x_1, x_2)^T\right) = 2(x_1, x_2)^T.$$

Libovolný nenulový vektor $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ je proto vlastním vektorem matice A – zobrazení f ho dvakrát prodlouží, ale nezmění jeho směr. Vlastním číslem matice A je $\lambda = 2$ odpovídající škálování vektoru x při zobrazení f.

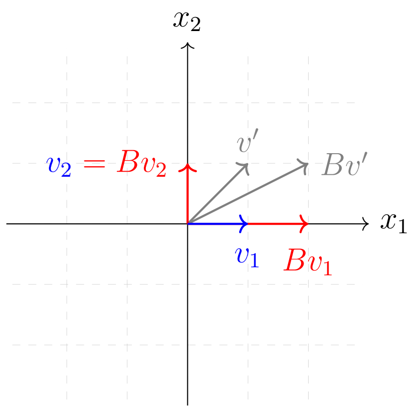


(b) Lineární zobrazení $f(x) = Bx$ odpovídá dvojnásobnému zvětšení vektoru x v první souřadnici, tedy

$$f\left((x_1, x_2)^T\right) = (2x_1, x_2)^T.$$

Vektory na ose x_1 se dvojnásobně prodlouží a nezmění svůj směr – každý vektor ve tvaru $(\alpha, 0)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je tedy vlastním vektorem matice B s příslušným vlastním číslem $\lambda_1 = 2$.

Vektory na ose x_2 se při zobrazení f nezmění, proto také každý vektor $(0,\alpha)$ pro $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ je vlastním vektorem B a odpovídá vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$. Vektory mimo osy při zobrazení f mění směr.



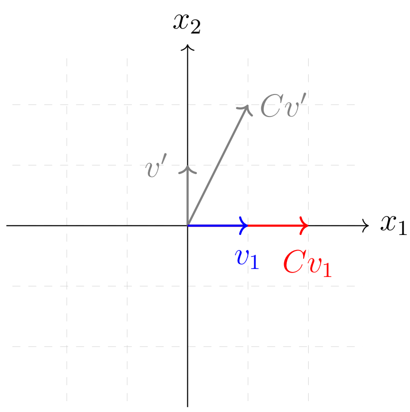
(c) Lineární zobrazení $f(x) = Cx$ odpovídá zkosení a zároveň zvětšení, pro zobrazení platí

$$f\left((x_1,x_2)^T\right) = (2x_1 + x_2, 2x_2)^T.$$

Vlastní vektory matice C jsou všechny nenulové vektory $(\alpha, 0)$ ležící na ose x_1, protože tyto vektory při zobrazení f směr nemění. Tyto vektory zobrazení dvojnásobně prodlužuje, protože platí

$$f\left((\alpha,0)^T\right) = (2\alpha,0)^T = 2(\alpha,0)^T,$$

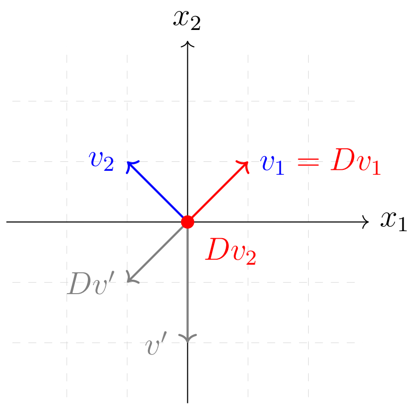
příslušné vlastní číslo je tedy $\lambda = 2$.



(d) Lineární zobrazení $f(x) = Dx$ odpovídá kolmé (ortogonální) projekci na osu 1. a 3. kvadrantu (tedy přímku $x_1 = x_2$), platí

$$f\left((x_1,x_2)^T\right) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_1 + x_2)^T.$$

Nenulové vektory ležící na této ose se při projekci f zobrazí samy na sebe, jsou tedy vlastními vektory matice D. Nemění se ani velikost a orientace těchto vektorů, odpovídající vlastní číslo je proto $\lambda_1 = 1$.



Dalšími vlastními vektory jsou všechny nenulové vektory kolmé na osu 1. a 3. kvadrantu, tj. vektory ve tvaru $(-\alpha, \alpha)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tyto vektory se při projekci f zobrazí do počátku $(0, 0)$, odpovídající vlastní číslo je $\lambda_2 = 0$ (vektory se škálují na 0-násobek původní délky). Můžeme snadno ověřit, že podmínka z definice vlastního čísla a vlastního vektoru je splněna i pro tento případ:

$$Dx = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot x.$$

Cv. 7.2 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Jsou vlastní vektory jednoznačné?

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) Charakteristický polynom matice A vzhledem k proměnné λ je polynom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Jelikož jsou vlastní čísla matice A právě kořeny polynomu $p_A(\lambda)$, můžeme charakteristický polynom využít pro jejich výpočet.
Pro zadanou matici A dostaneme charakteristický polynom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 6 \\ 6 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\ = (2-\lambda)(-3-\lambda) - 6 \cdot 6.$$

Dále můžeme tento polynom upravit a najít jeho kořeny:

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)(-3-\lambda) - 6 \cdot 6 = \lambda^2 + \lambda - 42 = (\lambda - 6)(\lambda + 7).$$

Kořeny polynomu, a tedy vlastními čísly matice A, jsou hodnoty $\lambda_1 = 6$ a $\lambda_2 = -7$.

Vlastní vektor příslušný k danému vlastnímu číslu λ najdeme jako bázi jádra matice $A - \lambda I_n$. Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 6$ tedy hledáme bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 2-6 & 6 \\ 6 & -3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix},$$

kterou tvoří např. vektor $x_1 = (3,2)^T$. Podobně pro $\lambda_2 = -7$ hledáme bázi $\mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I_2)$, tj. bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 2-(-7) & 6 \\ 6 & -3-(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tu tvoří např. vektor $x_2 = (2,-3)^T$.

Matice A má tedy vlastní číslo $\lambda_1 = 6$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_1 = (3,2)^T$ a vlastní číslo $\lambda_2 = -7$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_2 = (2,-3)^T$. Vlastní vektory nejsou určeny jednoznačně – každý nenulový násobek vlastního vektoru je také vlastním vektorem.

(b) Charakteristický polynom matice B je

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(2-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2. \end{aligned}$$

Tento polynom má pouze komplexní kořeny, a to

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = 1 \pm i.$$

Vlastní vektor pro $\lambda_1 = 1 + i$ tvoří bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 0-(1+i) & 1 \\ -2 & 2-(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Bázi jádra najdeme (stejně jako pro reálné matice) pomocí Gaussovy eliminace. Přičtením $(-1+i)$-násobku 1. řádku k 2. řádku dostaneme:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2+(-1-i)(-1+i) & 1-i+1(-1+i) \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2+2 & 1-i-1+i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Všechna řešení soustavy $(B - \lambda_1 I_2)x = 0$ jsou ve tvaru $z(1, 1+i)$ pro $z \in \mathbb{C}$. Hledaným vlastním vektorem je tedy např. vektor $x_1 = (1, 1+i)^T$.

Vlastní vektor x_2 pro druhé vlastní číslo $\lambda_2 = 1 - i$ tvoří bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 0-(1-i) & 1 \\ -2 & 2-(1-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i & 1 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix},$$

a je to např. vektor $x_2 = (1, 1-i)^T$.

Matice B má tudíž vlastní číslo $\lambda_1 = 1 + i$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_1 = (1, 1+i)^T$ a vlastní číslo $\lambda_2 = 1 - i$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_2 = (1, 1-i)^T$.

(c) Postupujeme obdobně jako u matic 2×2. Charakteristický polynom matice C vyjádříme pomocí determinantu:

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \\ = (2-\lambda)(-3-\lambda)(-2-\lambda) + (-1)\cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 \cdot 0 - \\ - 2 \cdot (-3-\lambda) \cdot (-1) - 3 \cdot 0 \cdot (2-\lambda) - (-1) \cdot 5 \cdot (-2-\lambda) \\ = -(\lambda+1)^3. \end{aligned}$$

Matice C má tedy vlastní číslo $\lambda = -1$. Dále najdeme bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 2-(-1) & -1 & 2 \\ 5 & -3-(-1) & 3 \\ -1 & 0 & -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

kterou tvoří např. $\{(1,1,-1)^T\}$. Matice C má (trojnásobné) vlastní číslo $\lambda = -1$, kterému přísluší jeden vlastní vektor $x = (1,1,-1)^T$.

Cv. 7.3 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Charakteristický polynom matice A opět dostaneme jako determinant

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_5) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Pro vyjádření determinantu této matice je výhodné použít Laplaceův rozvoj, např. podle 2. řádku (obsahuje jediný nenulový prvek), následně podle 4. řádku a nakonec podle 3. sloupce. Tím dostaneme charakteristický polynom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(2-\lambda)(1-\lambda)^3(1+\lambda). \end{aligned}$$

Vlastní čísla matice A jsou tedy 2, 1 (trojnásobné) a -1.

Cv. 7.4 Známe tři vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix},$$

a to $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$ a $\lambda_3 = 5$. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

Řešení:
K řešení úlohy můžeme využít znalost vztahů mezi součinem vlastních čísel a determinantem matice, respektive mezi součtem vlastních čísel a stopou matice:

$$\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n, \qquad \operatorname{trace}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n.$$

Výpočet determinantu je pracnější, ale i využití tohoto vztahu vede k řešení. Determinant matice A můžeme spočítat např. Gaussovou eliminací, dostaneme $\det(A) = -420$. Pro zbylé vlastní číslo potom platí

$$\det(A) = -420 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 3 \cdot (-4) \cdot 5 \cdot \lambda_4,$$

tedy $\lambda_4 = -420/(-60) = 7$.

Výhodnější je ale použít vztah mezi součtem vlastních čísel a stopou matice. Stopa matice je součet prvků na diagonále, tedy

$$\operatorname{trace}(A) = \sum_{i=1}^{4} a_{ii} = 10 + 5 + 15 - 19 = 11.$$

Protože je stopa matice zároveň rovná součtu vlastních čísel, platí pro zbylé vlastní číslo

$$\lambda_4 = 11 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 11 - 3 + 4 - 5 = 7.$$

Cv. 7.5 Matice A má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$. Určete, jak vypadají vlastní čísla a vlastní vektory:

(a) matice A^2,
(b) matice αA,
(c) matice $A + \alpha I_n$,
(d) matice A^T.

Řešení:

(a) Nechť λ_i je vlastní číslo matice A a x_i je jemu příslušný vlastní vektor. Pak podle definice vlastního čísla a vlastního vektoru platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Jak se bude chovat x_i při přenásobení A^2? Dostáváme

$$A^2 x_i = (AA)x_i = A\ (Ax_i) = A\ (\lambda_i x_i) = \lambda_i (A\ x_i) = \lambda_i(\lambda_i x_i) = \lambda_i^2 x_i.$$

Vlastní číslo λ_i se umocní na druhou a vlastní vektor x_i zůstane stejný. Matice A^2 má tedy vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$ a jim odpovídající vlastní čísla $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$.

(b) Opět dle předpokladu platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Podobně jako v předchozím příkladu se podíváme, jak dopadne výsledek $\alpha A x_i$. Dostáváme

$$(\alpha A)x_i = \alpha(A\ x_i) = \alpha(\lambda_i x_i) = (\alpha\lambda_i)x_i,$$

Matice αA má vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$ a jim odpovídající vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_n$.

(c) Opět dle předpokladu platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Podobně jako v předchozím příkladu se podíváme, jak dopadne výsledek $(A + \alpha I_n)x_i$. Dostáváme

$$(A + \alpha I_n)x_i = Ax_i + (\alpha I_n)x_i = \lambda_i x_i + \alpha x_i = (\lambda_i + \alpha)x_i.$$

Matice $(A + \alpha I_n)$ má vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$ a jim odpovídající vlastní čísla $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_n + \alpha$.

(d) Postup z předchozích podúloh zde nelze přímo aplikovat, musíme využít něčeho jiného. Můžeme využít fakt, že vlastní čísla matice A jsou právě kořeny jejího charakteristického polynomu $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Z vlastností determinantu víme, že transpozice matice hodnotu determinantu nemění, tudíž platí

$$\det(A - \lambda I_n) = \det((A - \lambda I_n)^T) = \det(A^T - \lambda I_n).$$

Protože je ale zároveň $\det(A^T - \lambda I_n) = p_{A^T}(\lambda)$ charakteristický polynom matice A^T, má matice A^T stejná vlastní čísla jako matice A.

Vlastní vektory matice a její transpozice mohou být obecně různé, např. matice $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní vektory ve tvaru $(\alpha, 0)^T$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$, zatímco matice $A^T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní vektory ve tvaru $(0, \alpha)^T$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$.

Cv. 7.6 Ukažte, že jeden vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemůže příslušet různým vlastním číslům.

Řešení:
Buď x vlastní vektor matice A. Pro spor předpokládejme, že x přísluší vlastním číslům λ_1, λ_2, přičemž $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Podle definice vlastního čísla a vlastního vektoru platí $Ax = \lambda_1 x$ a zároveň $Ax = \lambda_2 x$. Potom ale dostáváme $\lambda_1 x = \lambda_2 x$, neboli

$$\lambda_1 x - \lambda_2 x = (\lambda_1 - \lambda_2)x = 0.$$

To znamená, že platí $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ nebo $x = 0$. Vlastní vektor x je z definice nenulový, musí proto platit $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, a tedy $\lambda_1 = \lambda_2$, což je spor s předpokladem $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Cv. 7.7 Najděte nejmenší číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $A + \beta I_n$ je regulární pro všechny $\beta > \alpha$.

Řešení:
Využijeme charakterizace, že matice je regulární právě tehdy, když jsou všechna její vlastní čísla nenulová. Nechť $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ jsou ta vlastní čísla matice A, která jsou reálná (ta ryze komplexní můžeme ignorovat). Ze cvičení 7.5(c) víme, že se vlastní čísla matice $(A + \beta I_n)$ rovnají $\lambda_1 + \beta \geq \cdots \geq \lambda_n + \beta$. Protože chceme regularitu pro všechny $\beta > \alpha$, musí dokonce platit nezápornost vlastních čísel, $\lambda_1 + \beta \geq \cdots \geq \lambda_n + \beta \geq 0$. V opačném případě, kdy máme jedno vlastní číslo záporné snadno najdeme $\beta' > \beta$ takové, že jemu odpovídající vlastní číslo $(A + \beta' I_n)$ bude nulové, a matice bude singulární.

Hodnotu α tedy zvolíme tak, že $\lambda_1 + \alpha \geq \cdots \geq \lambda_n + \alpha = 0$, z čehož odvodíme, že $\alpha = -\lambda_n$.

Cv. 7.8 Známe-li vlastní čísla a vektory matic $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, jak je spočítat pro matici

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}?$$

Řešení:

Označme vlastní čísla A jako $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \ldots, x_m$. Obdobně pro matici B, mějme vlastní čísla $\mu_1, \ldots, \mu_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $y_1, \ldots, y_n$. Pro jednoduchost zde předpokládáme, že existuje plný počet vlastních vektorů. Označme $Mz = \nu z$ jako vlastní číslo ν a vlastní vektor z matice M. Můžeme blokově rozepsat

$$Mz = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Az_1 \\ Bz_2 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Z toho vyplývá, že $Az_1 = \nu z_1$ a $Bz_2 = \nu z_2$. Vidíme, že podvektory z_1, z_2 mají stejné vlastnosti, jako vlastní vektory A a B s tím rozdílem, že nepožadujeme nenulovost obou z nich zároveň (pouze nenulovost celého z). V závislosti na nulovosti složek z_1, z_2 rozlišíme několik případů:

(a) Pokud $z_1 = o$, musí $z_2 \neq o$ (z je vlastní vektor). Dostáváme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ Bz_2 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} o \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že každý vektor $(o, y_i)^T$ je vlastním vektorem M s odpovídajícím vlastním číslem μ_i.

(b) Pokud $z_2 = o$, musí $z_1 \neq o$. Vidíme, že situace je obdobná jako v předchozím případě a proto platí, že vektor $(x_i, o)^T$ je vlastní vektor M odpovídající vlastnímu číslo λ_i.

(c) Případ, kdy $z_1 = o$ a $z_2 = o$ nemůže nastat, protože požadujeme nenulovost vlastního vektoru z.

(d) Pokud $z_1 \neq o$, $z_2 \neq o$, poté z_1 a z_2 odpovídají vlastním vektorům A a B. Pro ty musí platit, že jim odpovídá stejné vlastní číslo ν. Tedy pokud existuje $\lambda_i = \mu_j$, potom $z = (x_i, y_j)^T$ je vlastním vektorem M a $\lambda_i = \mu_j$ je jeho odpovídající vlastní číslo. Všimněme si nicméně, že v takovém případě je vektor $z = (x_i, 0)^T + (0, y_j)^T$ lineární kombinací již nalezených vlastních vektorů.

Vlastní čísla matice M tedy jsou

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n$$

a příslušné vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ o \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_m \\ o \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} o \\ y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} o \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Povšimněme si, že vlastní vektory tvaru $(x_i, 0)^T$ a $(0, y_j)^T$ jsou nenulové a lineárně nezávislé (protože $x_1, \ldots, x_m$ byly lineárně nezávislé a $y_1, \ldots, y_n$ také).

Cv. 7.9 Buď $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matice projekce. Jaká má vlastní čísla a vlastní vektory?

Řešení:
Pro určení vlastních čísel matice projekce můžeme využít její vlastnost, že opakovaná projekce má stejný efekt, jako projekce samotná, neboli $P^2 = P$. Nechť λ je vlastní číslo P a x odpovídající vlastní vektor. Dostáváme,

$$P^2x = P(Px) = P(\lambda x) = \lambda(Px) = \lambda^2 x$$

a zároveň

$$P^2x = Px = \lambda x.$$

Z toho plyne, že $\lambda^2 = \lambda$, neboli $\lambda(\lambda - 1) = 0$. Vlastní čísla matice P jsou proto pouze 1 a 0.

Vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu 1 splňují $Px = x$. Z vlastností projekce tento vztah splňují všechny vektory $x \in V$, kde $V = \mathcal{S}(P)$ je podprostor, do kterého matice P projektuje. Jako lineárně nezávislou podmnožinu vlastních vektorů zvolíme libovolnou bázi prostoru V. Označíme-li $m = \dim(V) = \operatorname{rank}(P)$, tak jsme našli m vlastních vektorů pro vlastní číslo 1.

Vlastnímu číslu 0 odpovídají vektory splňující $Px = o$. To jsou ale vektory $x \in \operatorname{Ker}(P)$, jako lineárně nezávislou podmnožinu vlastních vektorů tedy zvolíme libovolnou bázi $\operatorname{Ker}(P)$. Z vlastnosti kolmé projekce si můžeme také uvědomit, že $\operatorname{Ker}(P) = V^\perp$. Našli jsme tedy $n - m$ vlastních vektorů pro vlastní číslo 0.

Celkem tak máme $m+(n-m) = n$ vlastních vektorů, takže už žádné jiné vlastní vektory, a tím pádem ani vlastní čísla, neexistují. Vlastní číslo 1 je m-násobné a vlastní číslo 0 je $(n - m)$-násobné.

Cv. 7.10 Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Ověřte Cayleyho-Hamiltonovu větu,
(b) Vyjádřete A^4 jako lineární kombinaci I_2 a A,
(c) Vyjádřete A^{-1} jako lineární kombinace I_2 a A.

Řešení:

(a) Věta říká, že pro charakteristický polynom matice $p_A(\lambda)$ platí, že $p_A(A) = 0$. Určíme

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$$

Dosadíme A,

$$p_A(A) = A^2 - 5A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Pro vyjádření A^4 musíme λ^4 vydělit polynomem $p_A(\lambda)$ se zbytkem, čímž získáme tvar $\lambda^4 = r(\lambda)p_A(\lambda) + s(\lambda)$. Po dosazení $\lambda = A$ dostaneme $A^4 = s(A)$, protože $p_A(A) = 0$. Spočítáme

$$\begin{aligned} \lambda^4 &= r(\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda - 2) + s(\lambda) \\ &= (\lambda^2 + 5\lambda + 27)(\lambda^2 - 5\lambda - 2) + 145\lambda + 54, \end{aligned}$$

kde zbytek $s(\lambda) = 145\lambda + 54$. Dosazením máme požadované vyjádření

$$A^4 = s(A) = 145A \ + 54I_2.$$

Vztah můžeme ověřit zkouškou – levá i pravá strana výrazu dá stejnou matici

$$A^4 = \begin{pmatrix} 199 & 290 \\ 435 & 634 \end{pmatrix}.$$

(c) Podle Cayleyho-Hamiltonovy věty platí

$$0 = p_A(A) = A^2 - 5A - 2I_2.$$

Rovnici vynásobíme maticí A^{-1} a získáme

$$0 = A - 5I_n - 2A^{-1}.$$

Z této rovnice už snadno vyjádříme A^{-1} jako

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5 \cdot I_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Vlastní čísla – diagonalizovatelnost

Cv. 8.1 Vyšetřete vlastnost *podobnosti* jako relace.

Řešení:
Podle definice jsou dvě matice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ podobné $A \sim B$, pokud existuje regulární $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ taková, že $A = SBS^{-1}$.

Reflexivita. Nejprve vyšetříme, zda je podobnost reflexivní. To by znamenalo, že existuje S taková, že $A = SAS^{-1}$. Okamžitě vidíme, že za S můžeme dosadit $S = I_n$, tedy podobnost je reflexivní relace.

Symetrie. Symetrie říká, že pokud $A = SBS^{-1}$, potom existuje regulární matice T taková, že $B = TAT^{-1}$. Přenásobením první rovnosti maticí S^{-1} zleva a maticí S zprava dostáváme výraz $S^{-1}AS = B$, tedy můžeme volit $T = S^{-1}$. Podobnost je symetrická relace.

Tranzitivita. Tranzitivita říká, že pokud $A \sim B$ a $B \sim C$, potom $A \sim C$. Jinými slovy, pokud existují regulární matice S, T takové, že $A = SBS^{-1}$ a $B = TCT^{-1}$, poté existuje regulární matice U taková, že $A = UCU^{-1}$. Dosazením druhé rovnice do první dostáváme

$$A = SBS^{-1} = S(TCT^{-1})S^{-1} = (ST)C(T^{-1}S^{-1}) = (ST)C(ST)^{-1}.$$

Vidíme, že za matici U můžeme volit $U = ST$. Tato matice bude regulární, protože součin dvou regulárních matic je opět regulární matice.

Relace podobnosti matic je tedy reflexivní, symetrická a tranzitivní, je to tudíž relace ekvivalence.

Cv. 8.2 Rozhodněte o platnosti $A \sim B \;\Rightarrow\; A^2 \sim B^2$. Jak to bude s opačnou implikací?

Řešení:
Pokud $A \sim B$, potom existuje regulární matice S taková, že $A = SBS^{-1}$. Chceme rozhodnout, zda poté existuje regulární matice T taková, že $A^2 = TB^2T^{-1}$. Pomocí prvního vztahu můžeme matici A^2 vyjádřit jako

$$A^2 = (SBS^{-1})(SBS^{-1}) = SB(S^{-1}S)BS^{-1} = SBBS^{-1} = SB^2S^{-1}.$$

Vidíme tedy, že můžeme volit matici $T = S$, a tudíž implikace platí.

Opačná implikace obecně platit nebude. Ke konstrukci protipříkladu můžeme využít například vztahu, že podobné matice mají stejná vlastní čísla. Zvolme $A = I_n$ a $B = -I_n$. Diagonální matice mají vlastní čísla na diagonále, proto vlastní číslo matice A je 1 s algebraickou násobností n a vlastní číslo matice B je -1 s algebraickou násobností n. Matice A a B tedy nejsou podobné. Nicméně, $A^2 = I_n$ a $B^2 = (-I_n)(-I_n) = I_n$. Platí dokonce $A^2 = B^2$ a z reflexivity podobnosti tedy vyplývá, že $A^2 \sim B^2$.

Cv. 8.3 Určete, zda jsou následující matice diagonalizovatelné:

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix},$

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Řešení:

K určení diagonalizovatelnosti matice musíme rozhodnout, zda matice má n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Spočítáme tedy vlastní čísla matice a určíme, kolik jim přísluší vlastních vektorů. Jinými slovy, rozhodneme, zda algebraická a geometrická násobnost každého vlastního čísla je stejná. Vlastní vektory počítat nemusíme, to k rozhodnutí ohledně diagonalizovatelnosti není potřeba (je to potřeba k sestrojení spektrálního rozkladu, což zde nepožadujeme).

(a) Spočtěme tedy vlastní čísla matice A jakožto kořeny jejího charakteristického polynomu. Charakteristický polynom matice A je

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8 = \\ &= (4 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda). \end{aligned}$$

Vlastní čísla jsou tedy $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 1$. Protože jsou navzájem různá, je matice nutně diagonalizovatelná.

(b) Postupujeme stejně jako u matice A, jen zde vyjdou komplexní vlastní čísla. Charakteristický polynom matice B se rovná $p_B(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Kořeny polynomu $p_B(\lambda)$ jsou $1 + i$ a $1 - i$. Opět jsou vlastní čísla navzájem různá, matice je tedy diagonalizovatelná.

(c) Charakteristický polynom matice C je $p_C(\lambda) = (5 - \lambda)^2$. Matice C má tedy vlastní číslo 5 s algebraickou násobností 2. Geometrická násobnost vlastního čísla je rovna číslu

$$\operatorname{rank}(C - \lambda I_2) = \operatorname{rank}(C - 5 \cdot I_2) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Proto k vlastnímu číslu 0 existuje pouze jediný vlastní vektor, a matice C tudíž není diagonalizovatelná.

(d) Matice D je horní trojúhelníková, její vlastní čísla jsou tedy prvky na diagonále. Konkrétně, je to jednonásobné vlastní číslo $\lambda_1 = 2$ a dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_2 = 7$. K prvnímu vlastnímu číslu existuje pouze jeden vlastní vektor, ale jak to bude s druhým vlastním číslem? Hodnost matice

$$D - \lambda_1 I_3 = D - 7 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je jedna, což znamená, že k λ_2 náleží dva vlastní vektory. Dohromady tak máme plný počet vlastních vektorů, a proto je matice D diagonalizovatelná.

Cv. 8.4 Rozložte následující matice na součin SDS^{-1}, kde matice S je regulární a matice D je diagonální:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T$,

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

<u>Řešení</u>:
Spočítáme vlastní čísla a vlastní vektory dané matice. Pokud je vlastních vektorů plný počet, tj. je jich n lineárně nezávislých, sestrojíme samotný rozklad SDS^{-1} tak, že diagonálu D budou tvořit vlastní čísla matice a sloupce matice S budou tvořit vlastní vektory matice.

(a) Charakteristický polynom matice je $p(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda)$, vlastní čísla jsou tedy $2, 1, 4$. Těm odpovídají vlastní vektory $(1,2,2)^T$, $(0,1,0)^T$, $(0,1,1)^T$, které jsou lineárně nezávislé. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Pro výpočet můžeme využít vztahu matice A a A^T. Pokud $A = SDS^{-1}$, potom

$$A^T = (SDS^{-1})^T = (S^{-1})^T D^T S^T = (S^{-1})^T D S^T.$$

Po dosazení z předchozí podúlohy dostáváme rozklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Charakteristický polynom matice je $(4-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$, vlastní čísla jsou tedy $4, 2, 1$. Těm odpovídají vl. vektory $(0,1,1)^T$, $(1,2,1)^T$, $(2,1,0)^T$, které jsou lineárně nezávislé. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 8.5 Najděte chybu v následující úvaze: Vyjděme z rovnice $Ax = \lambda x$. Je-li vlastní číslo $\lambda = 0$, pak $x \in \mathrm{Ker}(A)$. Je-li vlastní číslo $\lambda \neq 0$, pak $x \in \mathcal{S}(A)$. Protože $\dim \mathrm{Ker}(A) + \dim \mathcal{S}(A) = n$, má matice A plný počet vlastních vektorů a je tudíž diagonalizovatelná.

Řešení:
Skutečně platí, že každý vlastní vektor náleží do $\mathrm{Ker}(A)$ nebo $\mathcal{S}(A)$. Platí ale opačný směr? Libovolný vektor z $\mathrm{Ker}(A)$ je vlastním vektorem, který přísluší nulovému vlastnímu číslu. Ale ne každý vektor ze sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ musí být vlastním vektorem matice A. Například matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

má jediný vlastní vektor $x = (1,0)^T$. Proto první sloupec matice je vlastním vektorem, ale druhý sloupec není.

Cv. 8.6 Dokažte přímo Cayleyho-Hamiltonovu větu pro diagonalizovatelné matice.

Řešení:
Cayleho-Hamiltonova věta říká, že pokud pro matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ máme charakteristický polynom $p_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$, poté

$$p_A(A) = (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0.$$

Pro diagonalizovatelné matice platí, že existuje regulární S taková, že $A = SDS^{-1}$, kde D je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále. Dosaďme do levé strany rovnice

$$(-1)^n(SDS^{-1})^n + a_{n-1}(SDS^{-1})^{n-1} + \cdots + a_1 SDS^{-1} + a_0 I_n.$$

Dále, protože $A^k = (SDS^{-1})^k = SD^kS^{-1}$, můžeme výraz upravit na

$$(-1)^n SD^nS^{-1} + a_{n-1}SD^{n-1}S^{-1} + \cdots + a_1 SDS^{-1} + a_0 I_n.$$

Vytkněme z výrazu matici S zleva a matici S^{-1} zprava, dostáváme

$$S((-1)^n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I_n)S^{-1}.$$

Matice $M \coloneqq (-1)^n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I_n$ má složky

$$M_{ij} = \begin{cases} (-1)^n 0^n + a_{n-1}0^{n-1} + \cdots + a_1 0 + a_0 0 = 0 & \text{pro } i \neq j, \\ (-1)^n\lambda_i^n + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_i + a_0 = p_A(\lambda_i) = 0 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

Matice M je tedy nulová. Dostáváme proto

$$p_A(A) = SMS^{-1} = S\,0\,S^{-1} = 0,$$

čímž je tvrzení dokázáno.

9. Vlastní čísla – Jordanova normální forma a symetrické matice

Jordanova normální forma

Cv. 9.1 Najděte

(a) matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem (libovolným),

(b) matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem $v = (1,1,1)^T$.

Řešení:

(a) Matice musí mít Jordanovu normální formu ve tvaru jediné Jordanovy buňky velikosti 3. Můžeme tedy volit přímo Jordanovu buňku

$$J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

kde λ je libovolné číslo.

(b) Vyjdeme z předchozího příkladu a zvolíme například matici

$$J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektor této matice je jediný, ale je to vektor $e_1 = (1,0,0)^T$. Pokud chceme změnit vlastní vektor, ale zachovat vlastní čísla a jejich algebraické a geometrické násobnosti, můžeme využít podobnosti a uvažovat matici ve tvaru $A = S^{-1}J_3(0)S$. Aby byl vektor v vlastním vektorem a číslo λ vlastním číslem matice A, musí platit $Av = \lambda v$, čili $S^{-1}J_3(0)Sv = \lambda v$. Přenásobením maticí S zleva dostaneme $J_3(0)Sv = \lambda Sv$. Tudíž vektor Sv je vlastním vektorem matice $J_3(0)$, což znamená $Sv = e_1$. Hledáme tedy regulární matici S takovou, aby platilo

$$S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Takových matic existuje mnoho, zvolíme například

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hledaná matice potom je

$$\begin{aligned} A &= S^{-1}J_3(0)S \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Můžeme pak ověřit, že tato matice splňuje zadání: Matice A má jediné vlastní číslo 0, které je trojnásobné a přísluší mu jediný vlastní vektor v.

Cv. 9.2 V kolika Jordanových buňkách matice $A \in \mathbb{R}^{16\times 16}$ je vlastní číslo 8, pokud víme, že $\operatorname{rank}(A - 8I_{16}) = 9$?

Řešení:

Počet všech Jordanových buněk odpovídajících vlastnímu číslu λ je roven počtu vlastních vektorů pro λ, tedy hodnotě $n - \operatorname{rank}(A - \lambda I_n)$. V našem případě $n - \operatorname{rank}(A - 8I_n) = 16 - 9 = 7$. Tedy vlastní číslo 8 je v sedmi Jordanových buňkách.

Cv. 9.3 Najděte Jordanovu normální formu matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matice A je trojúhelníková, její vlastní čísla jsou tedy prvky na diagonále. Konkrétně matice A má vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ (dvojnásobné) a $\lambda_1 = 2$ (jednonásobné). Vlastní číslo λ_2 leží v jedné Jordanově buňce velikosti 1, ale λ_1 může ležet v jedné nebo dvou Jordanových buňkách. Spočítáme proto $\operatorname{rank}(A - \lambda_1 I_3) = 1$, což říká, že geometrická násobnost λ_1 je dva, čili přísluší mu dva vlastní vektory. Hledaná Jordanova normální forma je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matice B má také dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ a jednonásobné vlastní číslo $\lambda_2 = 2$. Protože $\operatorname{rank}(B - \lambda_1 I_3) = 2$, přísluší k vlastnímu číslo λ_1 pouze jeden vlastní vektor a tudíž λ_1 leží v Jordanově buňce velikosti 2. Jordanova normální forma matice B je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matice C má dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ a dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_2 = 3$. Protože $\operatorname{rank}(C - \lambda_1 I_3) = 2$ a $\operatorname{rank}(C - \lambda_2 I_3) = 3$, vlastní číslo λ_1 leží ve dvou buňkách, kdežto λ_2 leží v jedné buňce. Jordanova normální forma matice C je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 9.4 Určete, kolik je tříd ekvivalence podobnosti pro:

(a) matice řádu 4, které mají pouze vlastní číslo 7,

(b) matice řádu 3 s vlastními čísly 5 a 7.

Řešení:

(a) Každá matice je podobná matici v Jordanově normální formě, která je jednoznačná až na pořadí buněk na diagonále. Stačí tedy spočítat, kolik je různých tvarů matic v Jordanově normální formě. Pokud je vlastní číslo 7

- čtyřnásobné, pak je jediná možnost s buňkami $J_1(7), J_1(7), J_1(7), J_1(7)$;
- trojnásobné, pak je jediná možnost s buňkami $J_2(7), J_1(7), J_1(7)$;
- dvojnásobné, pak existují dvě možnosti s buňkami $J_2(7), J_2(7)$ nebo $J_1(7), J_3(7)$;
- jednonásobné, pak je jediná možnost s buňkami $J_4(7)$.

Souhrnem máme 5 tříd ekvivalence s reprezentanty

$$\begin{pmatrix}7&0&0&0\\0&7&0&0\\0&0&7&0\\0&0&0&7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7&1&0&0\\0&7&0&0\\0&0&7&0\\0&0&0&7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7&1&0&0\\0&7&0&0\\0&0&7&1\\0&0&0&7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7&1&0&0\\0&7&1&0\\0&0&7&0\\0&0&0&7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7&1&0&0\\0&7&1&0\\0&0&7&1\\0&0&0&7\end{pmatrix}.$$

(b) Provedeme obdobný rozbor:

- Matice má vlastní číslo 5 dvojnásobné a vlastní číslo 7 jednonásobné. Pak Jordanův normální tvar se může skládat z buněk $J_1(5), J_1(5), J_1(7)$ nebo z buněk $J_2(5), J_1(7)$.
- Matice má vlastní číslo 5 jednonásobné a vlastní číslo 7 dvojnásobné. To je opačná situace k předchozí. Jordanův normální tvar se může skládat z buněk $J_1(5), J_1(7), J_1(7)$ nebo z buněk $J_1(5), J_2(7)$.

Jiná situace než ty výše zmíněné nastat nemůže, protože každé vlastní číslo musí mít násobnost aspoň 1. Dostali jsme dohromady 4 třídy ekvivalence s reprezentanty

$$\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5&1&0\\0&5&0\\0&0&7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5&0&0\\0&7&0\\0&0&7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5&0&0\\0&7&1\\0&0&7\end{pmatrix}.$$

Cv. 9.5 Najděte Jordanovu normální formu matice $J_n(\lambda)^T$.

Řešení:
Matice $J_n(\lambda)^T$ má stejné spektrální vlastnosti jako matice $J_n(\lambda)$: přísluší jí pouze vlastní číslo λ (je to trojúhelníková matice, takže vlastní čísla má na diagonále), které je algebraicky n-násobné, ale geometricky jednonásobné, protože mu přísluší jediný vlastní vektor (hodnost matice $J_n(\lambda)^T - \lambda I_n = J_n(0)^T$ je $n-1$). Jordanovu normální forma matice $J_n(\lambda)^T$ je opět $J_n(\lambda)$.

Poznámka. Mohla by nás zajímat matice podobnosti, tedy matice S, pro kterou platí $J_n(\lambda)^T = SJ_n(\lambda)^T S^{-1}$. Tuto vlastnost má například permutační matice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 9.6 O kolik se maximálně zmenší hodnost matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ když ji umocníme A^2?

Řešení:
Umocněním se hodnost matice nemůže zvýšit, tedy $\mathrm{rank}(A^2) \leq \mathrm{rank}(A)$. Nicméně, hodnost se může zmenšit. Cílem cvičení je ukázat, že se nemůže zmenšit o libovolnou hodnotu.

Matice A je podobná matici J v Jordanově normální formě, $A = SJS^{-1}$. Protože $A^2 = SJ^2S^{-1}$ a obě matice A, J mají stejnou hodnost, stačí úvahu omezit na matice v Jordanově normální formě a na jednotlivé Jordanovy buňky.

Uvažujme Jordanovu buňku $J_k(\lambda)$, kde $\lambda \neq 0$. Potom je buňka regulární a její druhá mocnina také, tím pádem ke snížení hodnosti nedojde. Pro nejhorší případ stačí uvažovat Jordanovy buňky s $\lambda = 0$. Pro $k = 1$ je Jordanova buňka i její mocnina nulová a opět mají stejnou hodnost. Nechť $k \geq 2$. Hodnost matice $J_k(0)$ je $k - 1$ a hodnost druhé mocniny $J_k(0)^2$ je $k - 2$. Tudíž umocněním dojde je snížení hodnosti bez ohledu na velikost Jordanovy buňky. Nejhorší případ tedy je, když je buněk velikosti $k \geq 2$ co nejvíce, a tedy když mají velikost 2. To znamená, že matice má na diagonále pouze Jordanovy buňky $J_2(2)$ (případně navíc jednu buňku $J_1(0)$, pokud je n liché). Potom se umocněním sníží hodnost o počet buněk, tedy o $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Dokázali jsme tak vztah

$$\mathrm{rank}(A^2) \geq \mathrm{rank}(A) - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

a tato mez je těsná, to znamená, že se nabyde jako rovnost pro každé n a určitou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; takovou matici jsme zkonstruovali postupem nahoře.

Symetrické matice

Cv. 9.7 Ukažte, že spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^T$, kde Λ je diagonální a Q ortogonální, existuje pouze pro symetrické matice.

Řešení:
Pro symetrické matice víme z přednášky, že spektrální rozklad existuje. Protože matice $Q\Lambda Q^T$ je symetrická, takovýto rozklad pro nesymetrické matice nemůže nastat.

Cv. 9.8 Najděte spektrální rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Vlastní čísla matice A jsou 3 a 0 (dvojnásobné). K vlastnímu číslu 3 přísluší vlastní vektor $(1,1,1)^T$. K vlastnímu číslu 0 přísluší vlastní vektory například $(1,-1,0)^T$, $(1,0,-1)^T$. Pokud sestavíme matice

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dostaneme spektrální rozklad $A = S\Lambda S^{-1}$. Nicméně spektrální rozklad symetrické matice vyžaduje ortogonální matici. Musíme tedy vlastní vektory ortonormalizovat. Vlastní vektory pro různá vlastní čísla symetrické matice jsou automaticky na sebe kolmé, čili stačí ortonormalizovat vlastní vektory pro vícenásobná vlastní čísla (ty ostatní pouze znormujeme, aby měly velikost 1). Konkrétně musíme ortonormalizovat dvojici vektorů $(1,-1,0)^T$, $(1,0,-1)^T$. Aplikací Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace dostaneme vektory

$$\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)^T, \quad \tfrac{\sqrt{6}}{6}(1,1,-2)^T.$$

Hledaný spektrální rozklad má podobu $A = Q\Lambda Q^T$, kde

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}.$$

Cv. 9.9 Víme, že symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ má vlastní vektor $v = (1,2)^T$. Dopočítejte druhý vlastní vektor.

Řešení:

Protože je matice symetrická, druhý vlastní vektor musí být kolmý na první. Až na násobek máme jednoznačný kolmý vektor. Druhý vlastní vektor je tedy vektor $(2,-1)^T$.

Cv. 9.10 Dokažte, že pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má matice A^TA všechna vlastní čísla nezáporná. Kdy budou kladná?

Řešení:

Buď λ vlastní číslo a x odpovídající vlastní vektor matice A^TA. Bez újmy na obecnost můžeme předpokládat, že $\|x\| = 1$. Z rovnice $A^TAx = \lambda x$ přenásobením x^T zleva dostaneme $x^TA^TAx = \lambda x^Tx$, neboli $\|Ax\|^2 = \lambda$. Vlastní číslo λ tedy musí být nezáporné.

Situace $\lambda = 0$ nastane pouze, když $\|Ax\|^2 = 0$, čili když $Ax = o$. To znamená, když sloupce matice A jsou lineárně závislé. Pokud tedy jsou sloupce matice A lineárně nezávislé (tj. $\mathrm{rank}(A) = n$), potom vlastní čísla matice A^TA jsou kladná ($\lambda > 0$).

Cv. 9.11 (a) Dokažte z definice, že vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům symetrické matice jsou na sebe kolmé.

(b) S pomocí předchozího bodu dokažte větu o spektrálním rozkladu přímo pro symetrické matice s různými vlastními čísly.

Řešení:

(a) Buďte λ, μ, $\lambda \neq \mu$, vlastní čísla a u, v odpovídající vlastní vektory symetrické matice A. Pak platí $Au = \lambda u$, $Av = \mu v$. To ale implikuje

$$\lambda v^T u = v^T(\lambda u) = v^T Au = (v^T Au)^T = u^T A^T v = u^T Av = u^T(\mu v) = \mu u^T v.$$

Protože $\lambda \neq \mu$, musí $u^T v = 0$.

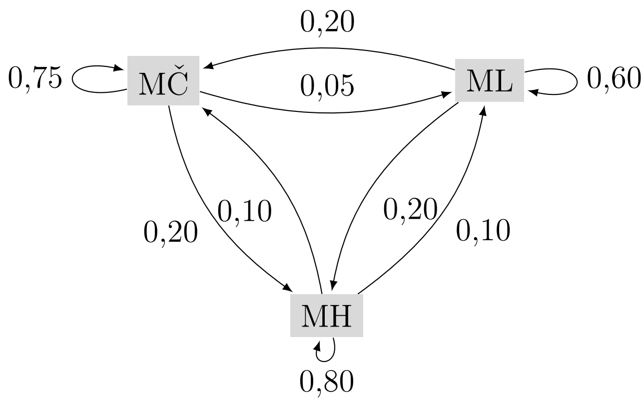
(b) Pokud má A různá vlastní čísla, je diagonalizovatelná. Můžeme tedy psát $A = Q\Lambda Q^{-1}$, kde Λ je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále a regulární matice Q má odpovídající vlastní vektory ve sloupcích. Protože podle předchozího bodu jsou vlastní vektory na sebe kolmé a lze je volit s normou 1, je Q ortogonální.

10. Vlastní čísla – metody výpočtu, odhady, Markovovy řetězce

Markovovy řetězce a nezáporné matice

Cv. 10.1 Ve městě Žebrácká Lhota fungují tři lokální politické strany, a to Moderní Čechy (MČ), Mír pro Lidi (ML) a Malé Hnutí (MH). Volby se řídí následujícím pravidlem: Z voličů strany MČ volí opět tuto stranu 75 % jejich voličů, ale k ML přejde 5 % a k MH dokonce 20 %. Z voličů ML přejde k MČ rovných 20 % a k MH také 20 %. Nakonec, z voličů MH zůstane jen 80 %, zbytek se rovnoměrně rozdělí mezi MČ a ML. Jaké bude rozdělení podpory stran v místním zastupitelstvu za delší časový horizont?

Řešení:
Pravidla pro volby v Žebrácké Lhotě ilustruje následující diagram:



Vrcholy grafu reprezentují stavy (volené politické strany) a hrany přechody mezi danými stavy, tedy přesuny voličů mezi těmito stranami. Pro výpočet výsledného rozdělení sestavíme přechodovou matici P, kde p_{ij} reprezentuje pravděpodobnost přechodu ze stavu j do stavu i:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}60 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}80 \end{pmatrix}.$$

První sloupec matice P tedy reprezentuje pravděpodobnost přechodu ze stavu MČ do stavu MČ (75 % voličů opět volí stejnou stranu MČ), do stavu ML (5 % bude volit stranu ML) a do stavu MH (20 % volí stranu MH).

Pokud je počáteční rozložení sil dáno stavovým vektorem $x_0 \in \mathbb{R}^3$, vývoj situace v čase popisují stavy $x_0, Px_0, P^2x_0, \ldots, P^\infty x_0$, kde $P^\infty x_0$ označuje limitní stav $\lim_{k\to\infty} P^k$ (pokud existuje).

Diagonalizací (tj. spektrálním rozkladem) matice P dostaneme

$$P = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}55 \end{pmatrix} S^{-1}, \text{ kde } S = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2 & -1 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a tedy

$$P^\infty = S\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}S^{-1} = S_{*1}S^{-1}_{1*} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

Limitní stav odpovídá vektoru $P^\infty x_0 = \frac{1}{6}(2e^T x_0, e^T x_0, 3e^T x_0)^T$, rozložení podpory stran se tedy ustálí v poměru $2:1:3$.

Jelikož je matice P kladná, dominantní vlastní číslo 1 je jednoznačné a násobnosti jedna. Výsledné rozložení tak odpovídá složkám vlastního vektoru $v = S_{*1}$, který přísluší vlastnímu číslu 1. Hledaný poměr tedy můžeme také přímo najít jako složky kladného vektoru $v \in \operatorname{Ker}(P - 1\cdot I_3)$.

Cv. 10.2 Difuze léčebné látky mezi dvěma buňkami probíhá podle pravidla: 50 % látky z první buňky přejde do druhé, ale jen 25 % látky z druhé buňky přejde do první. V jakém poměru se množství látky ustálí?

Řešení:

Podobně jako v předchozím cvičení sestrojíme přechodovou matici

$$A = \begin{pmatrix}0.5 & 0.25\\ 0.5 & 0.75\end{pmatrix}.$$

Její spektrální rozklad je

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Tudíž

$$A^\infty = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Množství látky v buňkách se tedy ustálí v poměru $1:2$.

Poznámka. Protože matice A je kladná, víme, že dominantní vlastní číslo je jednoznačné a stačí pouze hledat příslušný vlastní vektor. Tím je vektor $(1,2)^T$ (druhý sloupec matice S), který nám dá přímo hledaný poměr látek v ustáleném stavu.

Cv. 10.3 Ukažte, že vlastnosti kladné matice z Perronovy věty obecně neplatí pro nezápornou matici. Konkrétně, najděte postupně takové matice $A \geq 0$, aby platily vlastnosti

(a) $\rho(A) = 0$,

(b) $\rho(A)$ je vícenásobné vlastní číslo,

(c) existuje vlastní číslo $\lambda \neq \rho(A)$ takové, že $|\lambda| = \rho(A)$.

Řešení:

Toto je kreativní příklad, takže neexistuje kuchařka, jak takové matice najít. Řešením bude v každém bodě matice, která je nezáporná, ale obsahuje i nějaké nuly. Dobrými maticemi na testování jsou například Jordanovy buňky a blokově diagonální matice.

(a) například $J_2(0) = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$,

(b) například $J_2(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

(c) například $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Odhady a techniky z výpočetních metod

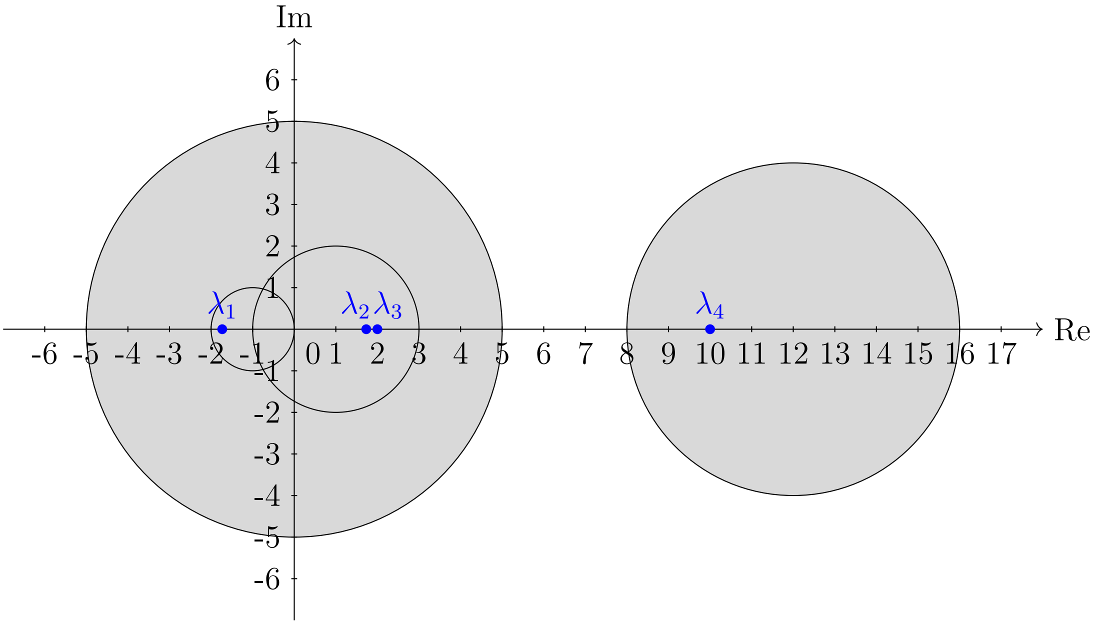
Cv. 10.4 Určete Gerschgorinovy disky pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a pomocí nich rozhodněte, zda má matice A aspoň dvě reálná vlastní čísla.

Řešení:
Dle věty o Gerschgorinových discích víme, že každé vlastní číslo matice A leží v komplexní rovině v kruhu $B(c_i, r_i)$ o středu $c_i = a_{ii}$ a poloměru $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, 4\}$. Pro zadanou matici A dostáváme následující kruhy (viz také obrázek níže):

střed $c_1 = a_{11} = 1$, poloměr $r_1 = |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = |0| + |-2| + |0| = 2$,
střed $c_2 = a_{22} = 12$, poloměr $r_2 = |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| = |0| + |0| + |-4| = 4$,
střed $c_3 = a_{33} = -1$, poloměr $r_3 = |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| = |-1| + |0| + |0| = 1$,
střed $c_4 = a_{44} = 0$, poloměr $r_4 = |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| = |0| + |5| + |0| = 5$.



Navíc víme, že každá komponenta souvislosti obsahuje tolik vlastních čísel, z kolika kruhů daná komponenta vznikla. V kruhu $B(c_4, r_4) = B(0, 5)$ tedy leží 3 vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ matice A a v kruhu $B(c_2, r_2) = B(12, 4)$ jedno vlastní číslo λ_4.

Komplexní vlastní čísla reálné matice můžeme spárovat do dvojic navzájem komplexně sdružených čísel, vlastní číslo λ_4 proto musí být reálné (jinak by v kruhu $B(12,4)$ muselo ležet i vlastní číslo $\overline{\lambda_4}$). V kruhu $B(0,5)$ leží 3 vlastní čísla, aspoň jedno z nich musí být také reálné. Nahlédli jsme tedy, že matice A má alespoň 2 reálná vlastní čísla. Výpočtem můžeme zjistit, že vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = -\sqrt{3}$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 2$ a $\lambda_4 = 10$.

Cv. 10.5 Pomocí Gerschgorinových disků rozhodněte, zda je následující matice regulární:

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Určíme Gerschgorinovy disky a zjistíme, zda některý z nich obsahuje počátek nebo ne. Disky ve tvaru $B(c,r)$, kde c je střed a r je poloměr, postupně jsou: $B(10,8)$, $B(-7,5)$, $B(-5,4)$ a $B(7,6)$. Protože žádný z disků počátek neobsahuje, matice nemá vlastní číslo $\lambda = 0$, a proto je regulární.

Cv. 10.6 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 4.6 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda $(I_4 - A^{-1})^k \to 0$ pro $k \to \infty$.

Řešení:

Nejprve sestrojíme Gerschgorinovy disky matice A. Protože matice A je symetrická, má reálná vlastní čísla a zajímají nás proto jen intervaly, kde Gerschgorinovy disky protnou reálnou osu. Všechny tyto průsečíky jsou částí intervalu $[0.6, 15]$, tudíž vlastní čísla matice A leží v intervalu $[0.6, 15]$. Matice A^{-1} má převrácené hodnoty vlastních čísel, její vlastní čísla se tak nachází v intervalu $[1/15, 1/0.6] \subset (0, 2)$. Vlastní čísla matice $-A^{-1}$ potom patří do intervalu $(-2, 0)$ a konečně vlastní čísla matice $M := I_4 - A^{-1}$ leží v intervalu $(-1, 1)$; viz cvičení 7.5(c). To znamená, že je $\rho(M) < 1$, a proto $M^k \to_{k\to\infty} 0$.

Cv. 10.7 Nejprve spočítejte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

a potom aplikujte větu o deflaci vlastního čísla na to největší vlastní číslo.

Řešení:

Výpočtem zjistíme, že matice A má vlastní čísla 6, 0 (dvojnásobné) a -2. Největšímu vlastnímu číslu $\lambda_1 = 6$ odpovídá znormovaný vlastní vektor $v_1 =$

$\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$. Deflací dostaneme matici

$$A' = A - \lambda_1 v_1 v_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tato transformace způsobila, že matice A' má stejná vlastní čísla a vlastní vektory, jako matice A, pouze vlastní číslo 6 se vynulovalo. Můžeme ověřit, že vskutku matice A' má vlastní čísla 0 (trojnásobné) a -2 a stejné vlastní vektory jako matice A.

11. Positivně (semi-)definitní matice

Positivně definitní matice

Cv. 11.1 Otestujte positivní definitnost matic

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pomocí:

(a) rekuretního vzorce,

(b) Sylvestrova pravidla,

(c) Gaussovy eliminace.

Řešení:

(a) Rekurentní vzorec nám říká, že symetrická matice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \widetilde{A} \end{pmatrix}$$

je positivně definitní právě tehdy, když $\alpha > 0$ a matice $\widetilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T$ je positivně definitní. Aplikací dostáváme matici menší dimenze

$$\widetilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} (-2, 4) = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

K určení positivní definitnosti této matice aplikujme vzorec ještě jednou. Dostáváme $2 - \frac{1}{9} 3 \cdot 3^T = 1$. Pro matici v prostoru $\mathbb{R}^{1\times 1}$ víme, že je positivně definitní právě tehdy, když je kladná, což zřejmě hodnota 1 splňuje, matice A je proto positivně definitní.

Pro matici B postupujeme obdobně. Protože prvek $b_{11} = 1 > 0$, vede první krok rekurence na matici

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Dle rekurentního vzorečku tato matice není positivně definitní (prvek na pozici $(1, 1)$ je 0), tedy ani B není positivně definitní.

(b) Stačí nám zkontrolovat, že determinanty všech hlavních vedoucích podmatic jsou kladné. To jsou matice, která vzniknou vyškrtnutím posledních $n - i$ řádků a sloupců pro $i = 1, \ldots, n$.

Pro matici A se jedná o podmatice

$$(4), \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

jejichž determinanty se rovnají hodnotám 4, 36 a 36. Tyto hodnoty jsou kladné, tedy matice A je positivně definitní.

Pro matici B se jedná o podmatice

$$(1)\,, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

jejichž determinanty jsou 1, 0, a -49. Hodnoty nejsou kladné, tedy matice B není positivně definitní.

(c) Při provádění Gaussovy eliminace musíme mít na paměti, že máme povolenou pouze operaci přičítání α násobku řádku k řádku pod ním. Důvod najdeme v důkazu příslušného tvrzení, ze kterého je zřejmé, že využíváme vlastnosti rekurentního vzorce.

Pokud u matice A nejprve odečteme příslušné násobky prvního řádku od ostatních a následně násobek druhého od třetího řádku, dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta má kladnou diagonálu, tedy se jedná o positivně definitní matici.

Postupujeme obdobně pro matici B. Po odečtení příslušného násobku prvního řádku od řádků pod ním dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že k tomu, abychom dokončili eliminaci potřebujeme prohodit 2. a 3. řádek, matice B tedy není positivně definitní.

Cv. 11.2 Otestujte positivní semidefinitnost resp. positivní definitnost následujících matic pomocí vlastních čísel:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

Positivní (semi-)definitnost můžeme otestovat na základě znaménka vlastních čísel. Pro výpočet vlastních čísel matice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ využijeme vztahů $\lambda_1\lambda_2 = \det(A)$ a $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{trace}(A) = a_{11} + a_{22}$.

(a) Dostáváme $\lambda_1\lambda_2 = 0$ a $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$. Řešením je tedy dvojice vlastních čísel 0 a 2. Protože jsou vlastní čísla nezáporná, matice je positivně semidefinitní.

(b) Dostáváme $\lambda_1\lambda_2 = -3$ a $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$. Vlastní čísla tedy jsou -1 a 3. Matice je tzv. indefinitní, to znamená, že není ani positivně semidefinitní, ani negativně semidefinitní.

(c) Dostáváme $\lambda_1\lambda_2 = 3$ a $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$. Vlastní čísla jsou 3 a 1. Matice je tedy positivně definitní.

Cv. 11.3 Buď A blokově diagonální symetrická matice. Ukažte, že A je positivně definitní právě tehdy, když všechny bloky jsou positivně definitní.

Jak to bude s positivní semidefinitností?

Řešení:

První způsob. Vyjádříme matici A blokově jako

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix}.$$

Poté součin x^TAx můžeme vyjádřit jako

$$x^TAx = \begin{pmatrix} x_1^T & \dots & x_k^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^T & \dots & x_k^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1x_1 \\ \vdots \\ A_kx_k \end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} x_i^TA_ix_i.$$

Pokud jsou všechny bloky positivně definitní, potom $x_i^TA_ix_i \geq 0$ pro všechna $i = 1, \dots, k$. Protože je vektor x nenulový, musí být nenulový aspoň jeden podvektor x_j, pro něhož platí $x_j^TA_jx_j > 0$. Tím pádem $x^TAx = \sum_{i=1}^{k} x_i^TA_ix_i > 0$.

Předpokládejme naopak, že existuje blok A_j, který není positivně definitní. To znamená, že $x_j^TA_jx_j \leq 0$ pro určité nenulové x_j. Definujme $x_i \coloneqq o$ pro $i \neq j$. Potom vektor $x = (x_1^T, \dots, x_k^T)^T$ je nenulový a platí

$$x^TAx = \sum_{i=1}^{k} x_i^TA_ix_i = x_j^TA_jx_j \leq 0.$$

Matice A proto není positivně definitní.

Z postupu je patrné, že tvrzení platí analogicky i pro positivní semidefinitnost.

Druhý způsob. Využijeme cvičení 7.8, které říká, že množina vlastních čísel matice A je rovna sjednocení vlastních čísel jednotlivých bloků. Pokud jsou všechny bloky positivně definitní, mají kladná vlastní čísla, a tím pádem i matice A má kladná vlastní čísla. Pokud aspoň jeden blok není positivně definitní, pak má nějaké vlastní číslo nekladné, a tedy i matice A má aspoň jedno vlastní číslo nekladné.

Cv. 11.4 Najděte příklad matice ilustrující, že nefunguje přímočaré zobecnění na testování positivní semidefinitnosti pomocí rekurentního vzorečku, Sylvestrova kritéria pro positivní definitnost a Choleského rozkladu.

Řešení:
Uvažme matici
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
která je positivně semidefinitní, ale ne positivně definitní.

Rekurentní vzoreček na tuto matici aplikovat nelze, protože prvek vlevo nahoře je nulový, $a_{11} = 0$, a proto jím nelze dělit. Není ani jasné, jak by se měl rekurentní vzoreček adaptovat pro testování positivní semidefinitnosti.

Varianta Choleského rozkladu existuje i pro positivně semidefinitní matice, to znamená, že je umíme přepsat do tvaru LL^T, kde L je dolní trojúhelníková matice. Narozdíl od Choleského rozkladu nyní matice L může mít na diagonále nulové prvky a navíc rozklad není jednoznačný. Například matice A má různé rozklady:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0.6 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sin\varphi \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$
Uvažme nyní matici
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
která není positivně semidefinitní. Sylvestrovo kritérium pro positivní definitnost říká, že všechny hlavní vedoucí podmatice mají mít kladný determinant. To zde není splněno, ale všechny hlavní vedoucí podmatice mají nezáporný determinant. Názorně tak vidíme, že pro testování positivní semidefinitnosti nestačí probírat pouze hlavní vedoucí podmatice, ale musíme spočítat determinanty všech hlavních podmatic (pro matici B už všechny nezáporné nejsou).

Positivně semidefinitní matice

Cv. 11.5 Ověřte positivní semidefinitnost matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
a to všemi třemi způsoby (na základě tří ekvivalentních definic).

Řešení:
Nejprve ukážeme, že platí základní definice, tedy že $x^T Ax \geq 0$ platí $\forall x \in \mathbb{R}^2$. Rozepíšeme
$$x^T Ax = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 \geq 0.$$
Podle druhé ekvivalentní definice je matice A positivně semidefinitní, pokud má nezáporná vlastní čísla. Charakteristický polynom A můžeme vyjádřit jako
$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

Vidíme, že vlastní čísla jsou 0 a 2, matice A je tedy positivně semidefinitní.

Třetí ekvivalentní charakterizace tvrdí, že existuje matice $U \in \mathbb{R}^{m\times 2}$ taková, že $A = U^T U$. Obecný postup pro faktorizaci uvidíme později, ale pro tuto jednoduchou matici není těžké rozklad uhádnout. Navíc matici U můžeme volit jako čtvercovou nebo jako matici s jedním řádkem (protože matice A má hodnost 1). Možné rozklady jsou například

$$A = U^T U = \begin{pmatrix} \sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 11.6 Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou positivně definitní.

(a) Ukažte, že $A + B$ jsou také positivně definitní.
(b) Jak to bude se součtem positivně semidefinitních matic?
(c) Jak to bude se součtem positivně semidefinitní a positivně definitní matice?
(d) Jak to bude s násobkem positivně definitních matic?

Řešení:

(a) Protože matice A, B jsou positivně definitní, platí pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ nerovnost $x^T Ax \geq 0$ a $x^T Bx \geq 0$. Rovnost $x^T Ax = 0$ a $x^T Bx = 0$ nastane pouze pro $x = o$. Rozepišme

$$x^T (A + B)x = x^T Ax + x^T Bx \geq 0.$$

Rovnost $x^T (A + B)x = 0$ nastane pouze, pokud jsou oba sčítance $x^T Ax$, $x^T Bx$ nulové. Tato situace ale nastane pouze pro $x = o$.

(b) Vidíme, že v první části důkazu předchozí podúlohy jsme si vystačili pouze s positivní semidefinitností A a B. Platí tedy, že positivní semidefinitnost dvojice matic implikuje positivní semidefinitnost jejich součtu.

(c) Z předchozích podúloh již víme, že součet bude positivně semidefinitní. Aby byl positivně definitní, musí se nabýt $x^T (A + B)x = 0$ pouze pro $x = o$. Protože $x^T Ax \geq 0$ a $x^T Bx \geq 0$, tak rovnost $x^T (A+B)x = 0$ nastává pouze, pokud $x^T Ax = 0$ a zároveň $x^T Bx = 0$. Protože B je positivně definitní, tato situace nastane pouze pro $x = o$. Součet positivně semidefinitní a positivně definitní matice je tedy positivně definitní.

(d) Využijeme toho, že $x^T (\alpha A)x = \alpha x^T Ax$, a dále také, že platí $x^T Ax > 0$ pro všechna $x \neq o$. Matice αA tedy bude positivně definitní pro všechna $\alpha > 0$. Pro $\alpha = 0$ se vynuluje, a bude tedy pouze positivně semidefinitní. Pro $\alpha < 0$ už nebude ani positivně semidefinitní.

Cv. 11.7 Najděte regulární matici, která je positivně semidefinitní, ale ne positivně definitní.

Řešení:

Positivně semidefinitní matice A musí mít nezáporná vlastní čísla. Pokud navíc víme, že je regulární, tak musí mít nenulová vlastní čísla. Tím pádem vlastní čísla jsou kladná a matice je nutně positivně definitní. Hledaná matice proto neexistuje.

Cv. 11.8 Ukažte, že libovolná mocnina positivně semidefinitní matice je positivně semidefinitní matice.

Řešení:
Protože matice A je positivně semidefinitní, má nezáporná vlastní čísla $\lambda_1, \ldots \lambda_n$. Matice A^k má vlastní čísla jejich k-té mocniny $\lambda_1^k, \ldots \lambda_n^k$, které jsou taky nezáporné. Tudíž A^k je positivně semidefinitní.

Cv. 11.9 Nad symetrickými maticemi z $\mathbb{R}^{n\times n}$ definujme relaci $\preccurlyeq$ předpisem $A \preccurlyeq B$ pokud $B - A$ je positivně semidefinitní. Ukažte, že $\preccurlyeq$ je relace částečného uspořádání.

Řešení:
Ukážeme postupně, že $\preccurlyeq$ splňuje reflexivitu, antisymetrii a tranzitivitu.

Reflexivita. Pro každou matici A je $A \preccurlyeq A$ ekvivalentní tomu, že $A - A = 0_n$ je positivně semidefinitní. Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $x^T 0_n x = 0$, tedy 0_n je positivně semidefinitní, a tím pádem $\preccurlyeq$ je reflexivní relace.

Symetrie. Pokud $A \preccurlyeq B$ a zároveň $B \preccurlyeq A$, potom obě matice $B-A$ i $A-B$ jsou positivně semidefinitní. Pokud má matice $A - B$ kladné vlastní číslo λ, potom má matice $B-A$ vlastní číslo $-\lambda < 0$, a tudíž není positivně semidefinitní. Proto má matice $A-B$ pouze nulová vlastní čísla. Tím pádem je matice $A-B$ nulová (nahlédneme ze spektrálního rozkladu symetrické matice $A - B = Q\Lambda Q^T = Q\,0\,Q^T = 0$). Proto $A = B$ a relace $\preccurlyeq$ je tedy antisymetrická.

Tranzitivita. Mějme matice A, B, C takové, že $A \preccurlyeq B$ a $B \preccurlyeq C$. Tedy $M = B-A$ a $N = C - B$ jsou positivně semidefinitní matice. Všimněme si, že $M + N = (B - A) + (C - B) = C - A$. Protože $M + N$ je součet positivně semidefinitních matic, platí ze cvičení 11.6, že je opět positivně semidefinitní, a tudíž $A \preccurlyeq C$.

Cv. 11.10 Buď A positivně semidefinitní. Ukažte, že pokud $x^T Ax = 0$ platí pro nějaké $x \neq o$, potom $Ax = o$.

Řešení:
Matice A má (symetrickou) positivně semidefinitní odmocninu B, tj. $A = B^2$. Můžeme tedy psát $x^T Ax = x^T B^T Bx = y^T y$ pro $Bx = y$. Z předpokladu je $y^T y = 0$, z čehož $y = 0$ a tedy $Bx = 0$. Pokud obě strany vynásobíme maticí B, dostaneme $Ax = B^2 x = 0$.

12. Positivně definitní matice – Choleského rozklad

Cv. 12.1 Otestujte positivní definitnost matice A pomocí Choleského rozkladu.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Pro každou positivně definitní matici existuje jediná dolní trojúhelníková matice $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s kladnou diagonálou taková, že $A = LL^T$ (Choleského rozklad). K dokázání positivní definitnosti matice A nám tedy stačí nalézt takovou matici L.

Protože je L dolní trojúhelníková matice, víme, že část prvků tvoří nuly.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix} = LL^T.$$

Určíme nejprve prvek ℓ_{11}. Protože prvek a_{11} je dán maticovým násobením prvního řádku matice L s prvním sloupcem matice L^T (který odpovídá prvnímu řádku), můžeme zapsat $a_{11} = \ell_{11}^2 + \ell_{12}^2 + \ell_{13}^2$. Prvky ℓ_{12}, ℓ_{13} se nicméně rovnají nule, tedy platí $4 = a_{11} = \ell_{11}^2$ a proto $\ell_{11} = 2$ (fakticky máme dvě možnosti: 2 a -2, ale hodnotu 2 volíme proto, že L musí mít kladnou diagonálu).

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že když budeme pokračovat v násobení prvního řádku matice L se zbylými sloupci L^T, kvůli nulám v prvním řádku dostáváme rovnici $a_{1k} = (L)_{11}(L^T)_{1k} = 2\ell_{k1}$. Díky té snadno určíme prvky v prvním sloupci matice L jako $\ell_{k1} = \frac{1}{2}a_{1k}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & \bullet & 0 \\ 2 & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}.$$

Pokračujeme výpočtem ℓ_{22}. Podobně jako při určování předchozího diagonálního prvku, dostáváme vynásobením druhého řádku matice L a druhého sloupce matice L^T rovnici $10 = a_{22} = \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 + \ell_{23}^2 = (-1)^2 + \ell_{22}^2 + 0^2$. Po úpravě dostáváme $l_{22}^2 = 9$ a tedy $\ell_{22} = 3$ kvůli positivitě diagonály.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}.$$

Díky tomu, že druhý řádek matice L je kompletní, můžeme dopočítat podobně jako předtím i druhý sloupec L, a to z rovnice $a_{23} = (L)_{2*}(L^T)_{*3}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}.$$

Celý postup opakujeme ještě jednou pro třetí sloupec matice L. Nejprve z rovnice $a_{33} = \ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2$ spočítáme diagonální prvek $\ell_{33} = 1$ a poté i ostatní prvky v třetím sloupci (žádné už nejsou). Dostáváme rozklad

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LL^T.$$

Matice A je tudíž positivně definitní.

Uvědomme si dále, že jsme v průběhu konstrukce nikdy neměli na vybranou z více možností, jaký prvek pro libovolné ℓ_{ij} zvolit. Jediná situace byla, když jsme určovali diagonální prvky, ale protože diagonála musí být kladná, měli jsme stejně jen jedno řešení. Tedy matice L je skutečně dána jednoznačně.

Cv. 12.2 Nalezněte Choleského rozklad následujících matic, nebo zdůvodněte, že nejsou positivně definitní.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 21 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matice A a B jsou positivně definitní a jejich Choleského rozklad je

$$A = L_A L_A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = L_B L_B^T = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix}.$$

Pro matici B jsme postupovali stejným způsobem, jenom místo s čísly jsme pracovali s maticovými bloky.

Matice C naopak není positivně definitní. Nahlédnout to můžeme z toho, že konstrukce Choleského rozkladu selže. Postupujeme až do okamžiku, kdy máme

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \bullet & 0 \\ -3 & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}.$$

Pro výpočet prvku $(L_C)_{22}$ totiž platí, že $4 = 2 \cdot 2 + (L_C)_{22}^2$, tedy $(L_C)_{22}$ by měl odpovídat hodnotě 0, což není kladná hodnota, jak je požadováno po diagonálních prvcích matice L_C.

Cv. 12.3 Pomocí Choleského rozkladu invertujte matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Protože matice A je positivně definitní, lze rozložit do tvaru $A = LL^T$. Pro její inverzi tedy platí $A^{-1} = (LL^T)^{-1} = L^{-T}L^{-1}$. Místo počítání inverze přímo tedy můžeme spočítat nejprve Choleského rozklad, následně inverzi dolní trojúhelníkové matice L a na závěr vzniklou inverzi L^{-1} vynásobíme s její transpozicí.

Choleského rozkladem spočítáme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom invertujeme matici L klasickým způsobem:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nakonec vyjádříme hledanou inverzi

$$A^{-1} = (L^{-1})^T L^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.4 Pomocí Choleského rozkladu vyřešte soustavu $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Pokud vyjádříme matici $A = LL^T$ pomocí Choleského rozkladu, můžeme vyřešit soustavu $Ax = b$ ve dvou krocích. Nejprve vyřešíme soustavu $Ly = b$, a následně soustavu $L^T x = y$. Výhodou tohoto postupu je, že matice L a L^T jsou trojúhelníkové, takže pro vyřešení soustav nemusíme provádět Gaussovu eliminaci, ale rovnou provedeme zpětnou resp. dopřednou substituci (u dopředné substituce, tj. v případě matice L, postupujeme od první proměnné po poslední). Dostáváme

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LL^T.$$

Soustava $Ly = b$ je tvaru

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

a má řešení $y = (1, -1, 2)^T$. Po dosazení do $L^T x = y$ dostáváme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

která má řešení $x = (1, 3, 2)^T$.

13. Bilineární a kvadratické formy

Cv. 13.1 Jsou následující zobrazení bilineární formou? Pokud ano, jde o symetrickou formu?

(a) $a\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $a(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$,

(b) $b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $b(x, y) = x_1y_2 + x_2$,

(c) $c\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $c(x, y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1$,

(d) $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $d(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2$,

(e) $e\colon \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definované $e(A, B) = AB$.

Řešení:

(a) Bilineární formu můžeme otestovat dvěma způsoby. První možností je otestovat vlastnosti přímo z definice. Aby bylo zobrazení a bilineární, musí platit linearita v obou složkách zvlášť. Jednoduchými algebraickými úpravami dostáváme linearitu v první složce,

$$\begin{aligned} a(\alpha u \ + \beta v, w) &= (\alpha u_1 + \beta v_1)w_2 + (\alpha u_2 + \beta v_2)w_1 \\ &= \alpha(u_1w_2 + u_2w_1) + \beta(v_1w_2 + v_2w_1) \\ &= \alpha a(u, w) + \beta a(v, w), \end{aligned}$$

stejně jako linearitu v druhé složce,

$$\begin{aligned} a(w, \alpha u \ + \beta v) &= w_1(\alpha u_2 + \beta v_2) + w_2(\alpha u_1 + \beta v_1) \\ &= \alpha(w_1u_2 + w_2u_1) + \beta(w_1v_2 + w_2v_1) \\ &= \alpha a(w, u) + \beta a(w, v). \end{aligned}$$

Zobrazení a je tedy bilineární forma. To, že je a navíc symetrická dostáváme opět rozepsáním, prohozením členů sčítání a násobení,

$$a(u, v) = u_1v_2 + u_2v_1 = v_1u_2 + v_2u_1 = a(v, u).$$

Druhá možnost. Zobrazení a je bilineární forma právě tehdy, když se dá vyjádřit maticově ve formě $a(x, y) = [x]_B^T A\, [y]_B$, kde A je matice bilineární formy vůči bází B. Vezmeme-li za B kanonickou bázi, dostáváme

$$a(x, y) = x^TAy = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2.$$

V našem případě, kdy $a(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$ dokážeme koeficienty matice A určit snadno, $a_{11} = a_{22} = 0$ a $a_{12} = a_{21} = 1$, tedy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice je navíc symetrická, tedy i bilineární forma je symetrická.

(b) Linearita v první složce platí. Podíváme-li se na linearitu v druhé složce, dostáváme výraz

$$b(w, \alpha u + \beta v) = w_1(\alpha u_2 + \beta v_2) + w_2 = \alpha w_1 u_2 + \beta w_1 v_2 + w_2,$$

který se nerovná $\alpha b(w, u) + \beta b(w, v)$. To naznačuje, že forma b asi není bilineární, ale k formálnímu potvrzení musíme najít protipříklad. Uvažujme například $x = (1, 1)^T$, $y = (1, 1)^T$ a $\alpha = 2$. Potom

$$b(x, \alpha y) = 3 \neq 4 = \alpha b(x, y).$$

Forma b tedy není bilineární.

(c) Pokusme se nalézt matici C, reprezentující bilineární formu c vůči kanonické bázi. Pro tu musí platit, že

$$x^T Cy = c_{11}x_1y_1 + c_{12}x_1y_2 + c_{21}x_2y_1 + c_{22}x_2y_2 = c(x, y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1.$$

Vidíme, že daná rovnice nemá pro neznámé koeficienty c_{ij} žádné řešení, forma c asi není bilineární. Tuto domněnku potvrdíme protipříkladem. Nechť $x = (1, 0)^T$, $y = (1, 0)^T$ a $\alpha = 3$. Potom

$$b(x, \alpha y) = 10 \neq 6 = \alpha b(x, y).$$

Forma c proto není bilineární.

(d) Určíme maticovou reprezentaci, je tedy třeba najít matici D takovou, aby platilo

$$x^T Dy = d_{11}x_1y_1 + d_{12}x_1y_2 + d_{21}x_2y_1 + d_{22}x_2y_2 = 1x_1y_1 + 1x_1y_2 + 2x_2y_2.$$

Porovnáním jednotlivých členů vidíme, že rovnost nastane pro matici

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

která není symetrická. Zobrazení d je tedy bilineární forma, která není symetrická. Nesymetrii formy opět potvrdíme protipříkladem. Uvažujme vektory $x = e_1 = (1, 0)^T$, $y = e_2 = (0, 1)^T$; volíme tyto vektory, protože matice D je nesymetrická pro prvky $d_{12} \neq d_{21}$. Nyní

$$d(x, y) = 1 \neq 0 = d(y, x).$$

(e) Zde nelze mluvit o (bilineární) formě, protože zobrazení e zobrazuje do prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$, které není tělesem. Ale i tak ověříme, zda je zobrazení bilineární a případně symetrické.

Linearita v první složce

$$e(\alpha U + \beta V, W) = (\alpha U + \beta V)W = \alpha UW + \beta VW = \alpha e(U, W) + \beta e(V, W)$$

platí díky linearitě maticového násobení. Obdobně tomu je i s linearitou v druhé složce.

Aby platila symetrie, musela by platit komutativita maticového násobení, tedy $e(X, Y) = XY = YX = e(Y, X)$. To víme, že obecně neplatí, tedy zobrazení e je bilineární, ale ne symetrické.

Cv. 13.2 Najděte matici bilineárních forem vzhledem ke kanonické bázi.

(a) $b(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_3y_2$

(b) $b(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2$

Řešení:

(a) *První způsob.* Hledáme matici $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ takovou, aby

$$b(x, y) = x^T Ay = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_iy_j.$$

Tudíž prvek a_{ij} v matici A je roven koeficientu u x_iy_j ve výrazu pro $b(x, y)$. Takto najdeme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Druhý způsob využívá definici matice bilineární formy. Podle definice je $a_{ij} = b(e_i, e_j)$. Dosazením opět dostaneme, že hodnota $b(e_i, e_j)$ je rovna koeficientu u x_iy_j.

(b) Stejným postupem jako v předchozím bodě dostaneme matici bilineární formy

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 13.3 Pro následující kvadratickou formu

$$f(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_2^2$$

nalezněte symetrickou bilineární formu $b(x, y)$, která ji indukuje a uveďte $b(x, y)$ v maticové reprezentaci.

Řešení:

Chceme nalézt symetrickou bilineární formu

$$b(x, y) = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2$$

takovou, že $b(x, x) = f(x)$. Ze symetrie musí nutně $b_{12} = b_{21}$. Kombinací obou podmínek dostáváme

$$\begin{aligned} b(x, x) &= b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{12}x_2x_1 + b_{22}x_2^2 \\ &= b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 \\ &= 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_2^2. \end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že $b_{11} = 3$, $b_{12} = b_{21} = 2{,}5$ a $b_{22} = 5$. V maticové reprezentaci tedy máme

$$b(x, y) = x^T By = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2.5 \\ 2.5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 13.4 Najděte matici kvadratické formy

$$f(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

vzhledem ke kanonické bázi a vzhledem k bázi $B = \{(1,1,1)^T,\ (1,1,0)^T,\ (1,0,0)^T\}$. Použijte dva různé postupy: z definice a pomocí matice přechodu.

<u>Řešení:</u>
Podobným způsobem jako v předchozím cvičení určíme matici kvadratické formy vzhledem ke kanonické bázi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro nalezení matice C formy vzhledem k bázi B nejprve budeme postupovat z definice. Symetrická bilineární forma indukující kvadratickou formu f je $b(x,y) = x^T Ay$. Nyní vypočítáme jednotlivé prvky matice C ze vzorce $C_{ij} = b(v_i, v_j) = v_i^T Av_j$, kde $v_1, \ldots, v_n$ jsou vektory dané báze. Konkrétně $C_{12} = (1,1,1)A(1,1,0)^T = 2$ atd., ze symetrie matice stačí spočítat diagonálu a horní polovinu prvků. Dostaneme

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Druhý způsob nalezení matice C spočívá ve využití matice přechodu. Sestavíme matici přechodu od báze B do kanonické báze

$$S = {}_{\text{kan}}[id]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom je matice formy f vzhledem k bázi B rovna

$$C = S^T AS = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 13.5 Pro zobrazení $b\colon \mathcal{P}^2 \times \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}$ definované $b(p,q) = p(0)q(2)$ ukažte:

(a) b je bilineární forma,

(b) najděte matici formy vzhledem k bázi $B = \{1,\ 1+x,\ (1-x)^2\}$,

(c) vyčíslete $b(1-x, x^2-2x+2)$ dvěma různými postupy,

(d) najděte matici formy vzhledem k bázi $B' = \{1,\ x,\ x^2\}$ s využitím té staré.

Řešení:

(a) Musíme ukázat linearitu v první a druhé složce. Ukážeme linearitu v první složce, v druhé se to nahlédne analogicky. Pro dva polynomy $p_1, p_2 \in \mathcal{P}^2$ platí

$$\begin{aligned} b(p_1 + p_2, q) &= (p_1 + p_2)(0) \cdot q(2) = (p_1(0) + p_2(0)) \cdot q(2) \\ &= p_1(0) \cdot q(2) + p_2(0) \cdot q(2) = b(p_1, q) + b(p_2, q). \end{aligned}$$

Podobně pro skalár $\alpha \in \mathbb{R}$ máme

$$b(\alpha p, q) = (\alpha p)(0) \cdot q(2) = \alpha \cdot p(0) \cdot q(2) = \alpha \cdot b(p, q).$$

(b) Matici A formy b sestrojíme z definice. To znamená, že $A_{ij} = b(p_i, p_j) = p_i(0)p_j(2)$, kde $p_1, \ldots, p_n$ jsou polynomy dané báze. Konkrétně například

$$\begin{aligned} A_{11} &= 1 \cdot 1 = 1, \\ A_{2,3} &= (1 + 0) \cdot (1 - 2)^2 = 1, \\ A_{3,2} &= (1 - 0)^2 \cdot (1 + 2) = 3 \end{aligned}$$

a tak dále. Dohromady dostaneme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) První způsob vyčíslení hodnoty je přímo z definice:

$$b(1 - x, x^2 - 2x + 2) = (1 - 0) \cdot (2^2 - 2 \cdot 2 + 2) = 2$$

Druhý způsob vyčíslení hodnoty je s využitím matice A bilineární formy. Nejprve spočítáme souřadnice zadaných polynomů vzhledem k bázi B

$$[1 - x]_B = (2, -1, 0)^T, \quad [x^2 - 2x + 2]_B = (1, 0, 1)^T,$$

a potom spočítáme

$$b(1 - x, x^2 - 2x + 2) = (2, -1, 0)A(1, 0, 1)^T = 2.$$

(d) K výpočtu matice formy vzhledem k jiné bázi potřebujeme sestrojit matici přechodu mezi bázemi, konkrétně

$$S = {}_B[id]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice formy vzhledem k bázi B' pak je rovna

$$S^T A S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výsledek můžeme ověřit tím, že matici formy vzhledem k bázi B' spočítáme přímo z definice.

Cv. 13.6 Jednoznačnost kvadratické formy.

(a) Nechť $A, B \in \mathbb{T}^{n\times n}$ jsou symetrické a nechť $x^T Ax = x^T Bx$ platí pro všechna $x \in \mathbb{T}^n$. Rozhodněte, zda potom $A = B$.

(b) Rozhodněte, zda matice kvadratické formy vzhledem k dané bázi je jednoznačná.

Řešení:

(a) Protože rovnost $x^T Ax = x^T Bx$ platí pro všechna $x \in \mathbb{T}^n$, dosadíme do rovnice konkrétní vektory. Volbou $x := e_i$ dostaneme ze vztahu $e_i^T Ae_i = e_i^T Be_i$ rovnost diagonálních prvků $a_{ii} = b_{ii}$. Volbou $x := e_i + e_j$ dostaneme ze vztahu $(e_i + e_j)^T A(e_i + e_j) = (e_i + e_j)^T B(e_i + e_j)$ rovnost

$$a_{ii} + a_{ij} + a_{ji} + a_{jj} = b_{ii} + b_{ij} + b_{ji} + b_{jj},$$

což se zjednoduší na $a_{ij} + a_{ji} = b_{ij} + b_{ji}$. Ze symetrie matic má rovnost tvar $2a_{ij} = 2b_{ij}$. Pokud těleso $\mathbb{T}$ nemá charakteristiku 2, můžeme krátit prvkem $2 \neq 0$ a dostaneme $a_{ij} = b_{ij}$. Tudíž jsme nahlédli rovnost $A = B$ po jednotlivých prvcích.

Zbývá vyřešit případ, kdy těleso $\mathbb{T}$ má charakteristiku 2. V tomto případě rovnost $A = B$ platit nemusí. Jako protipříklad uvažujme matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nad tělesem $\mathbb{Z}_2$. Matice jsou různé, ale přesto platí

$$x^T Ax = x_1x_2 + x_2x_1 = 0 = x^T Bx$$

pro všechny vektory $x \in \mathbb{Z}_2^2$.

(b) Opět zde musíme předpokládat, že těleso $\mathbb{T}$ nemá charakteristiku 2, jinak matice formy není jednoznačná z předchozího bodu.

Nyní předpokládejme pro spor, že kvadratická forma má dvě různá maticová vyjádření vzhledem k bázi B:

$$f(x) = [x]_B^T A[x]_B = [x]_B^T C[x]_B,$$

Z předchozího bodu ale víme, že tato rovnost pro každý vektor $x \in V$, neboli každý vektor $[x]_B \in \mathbb{T}^n$, implikuje $A = C$. Proto je matice jednoznačná.

Cv. 13.7 Buď V vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbb{T}$ a nechť charakteristika tělesa $\mathbb{T}$ není 2.

(a) Ukažte, že bilineární formy a symetrické bilineární formy na prostoru V tvoří vektorové prostory a určete jejich dimenze.

(b) Ukažte, že kvadratické formy na prostoru V tvoří vektorový prostor a určete jeho dimenzi.

Řešení:

(a) Buď V prostor dimenze n nad tělesem $\mathbb{T}$. Bilineární formy na prostoru V můžeme sčítat a násobit skalárem (podobně jako funkce) a výsledkem je opět bilineární forma. Vlastnosti vektorového prostoru plynou z toho, že hodnoty formy jsou prvky tělesa $\mathbb{T}$. Nulovým vektorem je forma $b(u,v) = 0$ $\forall u, v \in V$.

Abychom spočítali dimenzi prostoru bilineárních forem, uvědomme si, že jsou jednoznačně reprezentované maticemi řádu $n \times n$, a tento vztah je lineární: Nechť $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ je báze prostoru V a uvažujme dvě bilineární formy b, b'. Těmto formám přísluší vzhledem k bázi B dvě matice A, A' definované po prvcích

$$a_{ij} = b(w_i, w_j), \quad a'_{ij} = b'(w_i, w_j).$$

Potom součet bilineárních forem je zase bilineární forma $b^* = b + b'$ a její matice A^* vzhledem k bázi B složky

$$a^*_{ij} = b^*(w_i, w_j) = (b + b')(w_i, w_j) = b(w_i, w_j) + b'(w_i, w_j) = a_{ij} + a'_{ij}.$$

Tudíž $A^* = A + A'$. Analogicky dokážeme, že násobek bilineární formy se projeví násobkem její matice.

Takže prostor bilineárních forem je isomorfní s prostorem $\mathbb{T}^{n\times n}$ a má dimenzi n^2.

Analogicky symetrické bilineární formy jsou reprezentované symetrickými maticemi z prostoru $\mathbb{T}^{n\times n}$ a symetrické matice tvoří podprostor dimenze $\frac{1}{2}n(n+1)$.

(b) Kvadratické formy jsou vzájemně jednoznačně odvozené od symetrických bilineárních forem. Při dané bázi je pak kvadratická forma určená jednoznačně symetrickou maticí a opět symetrická matice závisí lineárně na kvadratické formě. Tedy dimenze prostoru kvadratických forem je $\frac{1}{2}n(n+1)$.

14. Kvadratické formy a Sylvestrův zákon setrvačnosti

Cv. 14.1 Diagonalizujte kvadratické formy s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

K diagonalizaci kvadratické formy můžeme využít elementárních řádkových úprav. Jediné, co musíme zajistit je, že po aplikaci elementární řádkové úpravy aplikujeme odpovídající elementární sloupcovou úpravu.

U matice A nejprve prohodíme pořadí 1. a 2. řádku (a následně i sloupců),

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

V dalším kroku nejprve přičteme 1. řádek k 2. řádku (dále 1. sloupec k 2. sloupci), a stejně tak (-1)-násobek 1. řádku k 3. řádku (obdobně pro sloupce). Dostáváme,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nakonec přičteme (-2)-násobek 2. řádku k 3. řádku a provedeme odpovídající operaci pro sloupce, tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dostali jsme matici v diagonálním tvaru. Podle Sylvestrova zákonu o setrvačnosti je matice A positivně semidefinitní, má dvě kladné a jedno nulové vlastní číslo.

U matice B nejprve prohodíme 1. řádek a 2. řádek (a obdobně pro sloupce)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní odečteme 1. řádek od 2. řádku (obdobně pro sloupce), a pak odečteme 1. řádek od 3. řádku (obdobně pro sloupce)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nakonec přičteme 2. řádek k 3. řádku (obdobně pro sloupce), čímž získáme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dostali jsme matici v diagonálním tvaru, která je podle Sylvestrova zákonu o setrvačnosti indefinitní – má jedno kladné, jedno nulové a jedno záporné vlastní číslo.

Pro matici C postupujeme analogicky. Problém nastane ve chvíli, když prohazujeme první dva řádky. Potom prohodíme první dva sloupce a opět dostaneme matici v původnim tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Musíme si tedy vypomoci trikem, který spočívá v tom, že provedeme nějakou jinou elementární operaci, která změní strukturu matice. Například přičteme k 1. řádku matice 2. řádek (obdobně pro sloupce) a dostaneme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní již postupujeme standardním způsobem a matici diagonalizujeme na tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matice má tedy jedno kladné a jedno záporné vlastní číslo, je indefinitní.

Cv. 14.2 Diagonalizujte kvadratické formy s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a určete polární bázi, tj. bázi, vůči níž je matice formy diagonální.

Řešení:

Pro kvadratickou formu určenou maticí A je polární báze určena sloupci matice S, kde $S^TAS = D$ a matice D je diagonální. Pro její výpočet tedy budeme postupovat stejně jako v předchozí podúloze, kde jsme matici diagonalizovali, jenom s tím rozdílem, že si budeme v průběhu výpočtu udržovat i součin matic sloupcových elementárních úprav, které na matici C aplikujeme.

Budeme tedy upravovat matici $(A \mid I_3)$, přičemž na matici vlevo aplikujeme řádkové i sloupcové úpravy a na matici vpravo aplikujeme pouze sloupcové úpravy. V prvním kroku přičteme (-1)-násobek 1. řádku k 3. řádku (totéž pro sloupce), dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nyní přičteme $(-\frac{1}{2})$-násobek 2. řádku k 3. řádku (totéž pro sloupce),

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Zde bychom mohli skončit, ale z estetických důvodů provedeme ještě operaci vynásobení 3. řádku číslem 2 (totéž pro sloupce)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Polární báze je tedy tvořena sloupci matice napravo, tedy matice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Můžeme pak snadno ověřit zkouškou, že platí

$$S^T A S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} = D.$$

Pro matici B postupujeme analogicky a dostaneme tvar:

$$(B \mid I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Matice B je tedy positivně definitní a polární báze je například $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(-2,-1,2)^T$.

Cv. 14.3 Uvažte relaci kongruence, kdy $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou v relaci, pokud existuje regulární S taková, že $B = S^T A S$.

(a) Dokažte, že se jedná o relaci ekvivalence.

(b) Kolik má tříd ekvivalencí?

Řešení:

(a) Ukážeme, že relace kongruence splňuje reflexivitu, antisymetrii a tranzitivitu.

Reflexivita. Reflexivita kongruence říká, že existuje regulární matice S taková, že $A = S^T A S$. Tento vztah splňuje matice $S := I_n$.

Symetrie. Symetrie kongruence říká, že pokud existuje regulární S taková, že $B = S^T A S$, poté existuje regulární matice U taková, že $A = U^T B U$. Přenásobením prvního vztahu zleva maticí $(S^T)^{-1}$ a zprava S^{-1} dostáváme $A = (S^T)^{-1} B S^{-1} = (S^{-1})^T B S^{-1}$. Tedy stačí volit $U := S^{-1}$.

Tranzitivita. Nakonec tranzitivita říká, že pokud existují regulární matice S a U takové, že $B = S^T A S$ a $C = U^T B U$, poté také existuje regulární V, že $C = V^T A V$. Dosazením prvního vztahu do druhého dostáváme

$$C = U^T B U = U^T (S^T A S) U = (U^T S^T) A (SU) = (SU)^T A (SU).$$

Volíme tedy $V := SU$.

(b) Podle Sylvestrova zákonu o setrvačnosti je každá matice reprezentující kvadratickou formu ekvivalentní diagonální matici s prvky na diagonále z množiny $\{-1, 0, 1\}$. Protože vzhledem ke kongruenci nezáleží na pořadí prvků na diagonále, ale pouze na počtu prvků odpovídající daným hodnotám, jedná se o tzv. kombinace s opakováním a hledaný počet je $\binom{n+2}{2} = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$.

Cv. 14.4 Vyjádřete kvadratickou formu $f(x) = x^T Ax$ jako součet čtverců lineárních forem, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Podle cvičení 14.2 víme, že existuje regulární matice S a diagonální matice D takové, že $S^T AS = D$. Uvažujme substituci $y = S^{-1}x$, čili $x = Sy$. Potom kvadratickou formu můžeme psát jako

$$f(x) = x^T Ax = y^T S^T ASy = y^T Dy = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} y_i^2.$$

Kvadratická forma má tvar součtu čtverců, ale v proměnných y. Pokud za proměnné dosadíme zpět, získáme hledaný tvar

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} d_{ii}((S^{-1})_{i*}x)^2.$$

V našem případě máme konkrétně

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Dosazením dostaneme požadovaný tvar

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1 + x_3)^2 + 2(x_2 + 0.5x_3)^2 + 2(0.5x_3)^2 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + 2(x_2 + 0.5x_3)^2 + 0.5x_3^2. \end{aligned}$$

Zkouškou (roznásobením výrazu) můžeme ověřit správnost výsledku.

Cv. 14.5 Ukažte, že rovnice $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$ popisuje elipsu v $\mathbb{R}^2$ a zjistěte její charakteristiky (postupem z přednášky).

Řešení:

Aby se jednalo o elipsu, je třeba, aby rovnice šla vyjádřit ve tvaru $x^T Ax = 1$, kde A je positivně definitní. Poté existuje spektrální rozklad matice $A = Q\Lambda Q^T$, kde poloosy elipsy vedou ve směru vlastních vektorů (sloupců Q) a jejich délky se rovnají hodnotám $1/\sqrt{\lambda_1}$, $1/\sqrt{\lambda_2}$, kde λ_1, λ_2 jsou vlastní čísla (čísla na diagonále matice Λ). Určíme nejprve matici A a následně najdeme její spektrální rozklad,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy osy elipsy ukazují ve směrech $(1, -1)^T$ a $(1, 1)^T$ a jejich délky jsou 1 a 1/3.