Příklad zpracování tématu *Lineární závislost a nezávislost*

Základní definice. Musíme nejprve definovat základní pojmy. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Vektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ se nazývají *lineárně nezávislé*, pokud rovnost $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = o$ nastane pouze pro $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. V opačném případě jsou vektory *lineárně závislé*. Tedy vektory $v_1, \ldots, v_n$ jsou lineárně závislé, pokud existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T}$, ne všechna nulová a taková, že $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = o$.

Příklady.

- Řádky regulární matice jsou lineárně nezávislé.
- Sloupce regulární matice jsou lineárně nezávislé.
- Řádky singulární matice jsou lineárně závislé.
- Sloupce singulární matice jsou lineárně závislé.
- Nenulové řádky matice v RREF tvaru jsou lineárně nezávislé.

Ekvivalentní charakterizace. Lineární závislost a nezávislost lze charakterizovat několika ekvivalntními podmínkami. Uvedeme je i s důkazem.

Věta. *Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$, a mějme $v_1, \ldots, v_n \in V$. Pak vektory $v_1, \ldots, v_n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existuje $k \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že $v_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i$ pro nějaké $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T}$, to jest*

$$v_k \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\}.$$

Důkaz. Implikace „$\Rightarrow$“. Jsou-li vektory $v_1, \ldots, v_n$ lineárně závislé, pak existuje jejich netriviální lineární kombinace rovna nule, tj. $\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = o$ pro $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{T}$ a $\beta_k \neq 0$ pro nějaké $k \in \{1, \ldots, n\}$. Zde můžeme zvolit libovolné k takové, že $\beta_k \neq 0$. Vyjádříme k-tý člen $\beta_k v_k = -\sum_{i \neq k} \beta_i v_i$ a po zkrácení dostáváme požadovaný předpis $v_k = \sum_{i \neq k} (-\beta_k^{-1} \beta_i) v_i$.

Implikace „$\Leftarrow$“. Je-li $v_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i$, pak $v_k - \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i = o$, což je požadovaná netriviální kombinace rovna nule, neboť koeficient u v_k je $1 \neq 0$. $\square$

Věta. *Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$, a mějme $v_1, \ldots, v_n \in V$. Pak vektory $v_1, \ldots, v_n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existuje $k \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že*

$$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\} = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\}. \tag{1}$$

Důkaz. Implikace „$\Rightarrow$“. Jsou-li vektory $v_1, \ldots, v_n$ lineárně závislé, potom podle předchozí věty existuje $k \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že $v_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i$ pro nějaké $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T}$. Inkluze $\supseteq$ v (1) je splněna triviálně, zaměříme se na tu opačnou. Libovolný vektor $u \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ se dá vyjádřit jako lineární kombinace

$$u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \beta_k v_k + \sum_{i \neq k} \beta_i v_i = \beta_k \left(\sum_{i \neq k} \alpha_i v_i \right) + \sum_{i \neq k} \beta_i v_i = \sum_{i \neq k} (\beta_k \alpha_i + \beta_i) v_i.$$

Tedy $u \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ a máme dokázanou inkluzi „$\subseteq$“ v (1).

Implikace „$\Leftarrow$“. Pokud platí rovnost (1), tak

$$v_k \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\} = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$$

a podle předchozí věty jsou vektory $v_1, \ldots, v_n$ lineárně závislé. $\square$

Použití a souvislosti. Ukážeme několik využití a souvislost s příbuznými tématy.

- *Báze.*

  Báze vektorového prostoru je jeho lineárně nezávislý systém generátorů. V případě potřeby můžeme o bázi říci více. Zmíníme důležitou Steinitzovu věta o výměně (bez důkazu, který můžeme dodat) a její důsledky.

  Věta (Steinitzova věta o výměně)**.** *Buď V vektorový prostor, buď $x_1, \dots, x_m$ lineárně nezávislý systém ve V, a nechť $y_1, \dots, y_n$ je systém generátorů V. Pak platí:*

  1. *$m \leq n$,*
  2. *existují navzájem různé indexy $k_1, \dots, k_{n-m}$ takové, že soubor vektorů $x_1, \dots, x_m, y_{k_1}, \dots, y_{k_{n-m}}$ tvoří systém generátorů V.*

  Věta. *Nechť $x_1, \dots, x_m \in V$ jsou lineárně nezávislé. Pak $m \leq \dim V$. Pokud $m = \dim V$, potom $x_1, \dots, x_m$ je báze.*

  Věta. *Každý lineárně nezávislý systém v prostoru V lze rozšířit na bázi V.*

- *Sloupce matice.*

  Pokud matici A násobíme zleva jinou maticí Q, lineární závislosti mezi sloupci se zachovají. Pokud je Q regulární, zachovají se i lineární nezávislosti. Formálněji (na žádost můžeme tvrzení dokázat):

  Věta. *Buď $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$, $Q \in \mathbb{T}^{p \times m}$. Pokud $A_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaké $k \in \{1, \dots, n\}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$, $j \neq k$, pak $(QA)_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.*

  Věta. *Buď $Q \in \mathbb{T}^{m \times m}$ regulární a $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$. Rovnost $A_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j A_{*j}$ platí právě tehdy, když platí rovnost $(QA)_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$, kde $k \in \{1, \dots, n\}$ a $\alpha_j \in \mathbb{T}$, $j \neq k$.*

- *Lineární zobrazení.*

  Z definice lineárního zobrazení (kterou můžeme dodat) plyne, že pokud jsou vektory $x_1, \dots, x_n$ lineárně závislé, potom jsou jejich obrazy $f(x_1), \dots, f(x_n)$ rovněž lineárně závislé. Pozor, pro lineární nezávislost to již neplatí, tam je potřeba předpokládat, ze zobrazení je prosté. Konkrétně platí:

  Věta (Prosté lineární zobrazení)**.** *Buď $f \colon U \to V$ lineární zobrazení. Pak následující jsou ekvivalentní:*

  1. *f je prosté,*
  2. $\mathrm{Ker}(f) = \{o\}$,
  3. *obraz libovolné lineárně nezávislé množiny je lineárně nezávislá množina.*

  Věta. *Buď $f \colon U \to V$ lineární zobrazení, B_U báze prostoru U a B_V báze prostoru V. Pak:*

  1. *f je prosté právě tehdy, když ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ má lineárně nezávislé sloupce,*
  2. *f je „na“ právě tehdy, když ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ má lineárně nezávislé řádky.*

- *Afinní podprostory.*

  Analogie lineární nezávislosti u afinních podprostorů je pojem *afinní nezávislost.* Vektory $x_0, x_1, \dots, x_n$ vektorového prostoru jsou *afinně nezávislé*, pokud $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$ jsou lineárně nezávislé. V opačném případě vektory nazýváme *afinně závislé.*

  Například vektory $(1,1)^T, (2,2)^T, (1,2)^T \in \mathbb{R}^2$ jsou sice lineárně závislé, ale afinně nezávislé.