Příklad zpracování tématu *Jádro matice*

Základní definice. Musíme nejprve definovat základní pojmy. *Jádro matice* $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ je množina řešení soustavy $Ax = o$ s nulovou pravou stranou. Jádro značíme $\mathrm{Ker}(A)$. Formálně,

$$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{T}^n;\ Ax = o\}.$$

Zde $\mathbb{T}$ je libovolné těleso.

Základní vlastnosti.

- Jádro matice $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ je podprostor prostoru $\mathbb{T}^n$. Můžeme nahlédnout důkaz (obsahuje o a je uzavřené na součty a násobky; v případě potřeby můžeme rozepsat podrobně).

- *Výpočet jádra.* Protože je jádro matice vektorový prostor, zajímá nás typicky jeho báze. K tomu stačí vyjít z definice jádra a vyřešit soustavu $Ax = o$ pomocí Gaussovy nebo Gaussovy–Jordanovy eliminace. Množinu řešení popíšeme pomocí parametrů (nebázických proměnných). Protože soustava $Ax = o$ má nulovou pravou stranu, tak v parametrickém popisu nejsou absolutní členy a ten tak vyjadřuje lineární kombinace bázických vektorů.

- Protože jádro matice je definováno jako množina řešení soustavy $Ax = o$, tak se jádro nemění, pokud na matici A aplikujeme elementární řádkové úpravy. Tudíž se nemění ani když matici přenásobíme zleva jakoukoli regulární maticí. Odvodili jsme tak: $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(QA)$ pro libovolnou regulární $Q \in \mathbb{T}^{n\times n}$.

  Pro obecnou matici $Q \in \mathbb{T}^{m\times n}$ pak platí $\mathrm{Ker}(A) \subseteq \mathrm{Ker}(QA)$, protože pokud x splňuje $Ax = o$, potom $(QA)x = Q(Ax) = Qo = o$.

Příklady.

- Je-li $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ regulární, pak $\mathrm{Ker}(A) = \{o\}$.
- Obecněji, pokud matice $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ má hodnost n, pak $\mathrm{Ker}(A) = \{o\}$.
- Pro nulovou matici řádu $n \times n$ naopak máme $\mathrm{Ker}(0) = \mathbb{T}^n$.

Věta o dimenzi jádra i s důkazem. Jádro matice je vektorový prostor, proto nás přirozeně zajímá jeho dimenze. Pro dimenzi máme hezký vzoreček. Je-li $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$, pak

$$\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n.$$

Dimenze jádra je tedy rovna počtu sloupců minus hodnost matice. Tato hodnota je stejná, jako počet nebázických sloupců při úpravě matice na REF tvar. Opět můžeme nahlédnout souvislost s řešením soustav rovnic.

Protože pan profesor chce vidět i nějaký důkaz, uvedeme důkaz tohoto vzorečku.

Důkaz. Označme $k := n - \operatorname{rank}(A)$. Pokud soustavu $Ax = o$ vyřešíme Gaussovou–Jordanovou eliminací, tak její množinu řešení (tj. $\operatorname{Ker}(A)$) popíšeme pomocí nebázických proměnných. Těch je přesně k a nechť jsou to proměnné $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$. Tím pádem dostaneme k generátorů jádra $\operatorname{Ker}(A)$, označme je $y_1, \dots, y_k$. Zbývá nahlédnout, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé. Bázické sloupce matice $\operatorname{RREF}(A)$ jsou tvořeny jednotkovými vektory, proto i_j-tá složka vektoru y_j je rovna jedné a i_j-tá složka ostatních vektorů $y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_k$ je nulová. Proto jsou vektory $y_1, \dots, y_k$ lineárně nezávislé. Tím pádem tvoří bázi jádra $\operatorname{Ker}(A)$ a $\dim \operatorname{Ker}(A) = k = n - \operatorname{rank}(A)$. $\square$

Souvislosti. Jádro matice se objevuje v souvislosti s dalšími tématy. Uvedeme dvě.

- *Jádro zobrazení.*

  Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Jádro zobrazení f je definováno jako množina vektorů z prostoru U, které se zobrazí na nulový vektor ve V, tedy $\operatorname{Ker}(f) := \{x \in U;\ f(x) = o\}$.

  Jádro $\operatorname{Ker}(f)$ je podprostorem prostoru U. Pokud $U = \mathbb{T}^n$, $V = \mathbb{T}^m$, pak se zobrazení dá vyjádřit jako $f(x) = Ax$ pro určitou matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$. V tomto případě $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(f)$, tedy jádro zobrazení splývá s jádrem příslušné matice. V obecném případě to pravda není, protože se jedná o různé vektorové prostory. Přesto mají hodně společného. Je-li $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$ matice lineárního zobrazení f vůči bázím B_U, B_V, potom $\dim \operatorname{Ker}(f) = \dim \operatorname{Ker}(A)$. Tudíž prostory $\operatorname{Ker}(A)$, $\operatorname{Ker}(f)$ jsou isomorfní. Příslušným isomorfismem je například zobrazení $x \in \operatorname{Ker}(f) \mapsto [x]_{B_U}$. Tento isomorfismus nám umožní efektivně najít bázi $\operatorname{Ker}(f)$ tak, že nejprve najdeme bázi $\operatorname{Ker}(A)$ a tyto vektory pak představují souřadnice hledané báze $\operatorname{Ker}(f)$.

  Jádro $\operatorname{Ker}(f)$ vyjadřuje různé vlastnosti zobrazení. Například f je prosté zobrazení právě tehdy, když $\operatorname{Ker}(f) = \{o\}$. Vzoreček $\dim \operatorname{Ker}(A) + \operatorname{rank}(A) = n$, který jsme uváděli na začátku tohoto tématu pak v jazyku lineárních zobrazení nabyde tvaru $\dim U = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim f(U)$.

- *Afinní podprostory.*

  Jádro matice se objevuje i v oblasti afinních prostorů. Připomeňme, že afinní podprostor v prostoru V je množina vektorů tvaru $U + a$, kde U je podprostor prostoru V a $a \in V$.

  Buď $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a $b \in \mathbb{T}^m$. Množina řešení soustavy rovnic $Ax = b$ je prázdná nebo afinní. Je-li neprázdná, můžeme tuto množinu řešení vyjádřit ve tvaru $\operatorname{Ker}(A) + x_0$, kde x_0 je jedno libovolné řešení soustavy. To je tedy souvislost jádra matice s afinními prostory. Množina řešení soustavy $Ax = o$ je jádro $\operatorname{Ker}(A)$, množina řešení soustavy $Ax = b$ je jen posunuté jádro $\operatorname{Ker}(A) + x_0$ (pokud to není prázdná množina). Dimenze množiny řešení soustavy rovnic $Ax = b$ (pokud je řešitelná) je pak dimenze jádra A, tedy $n - \operatorname{rank}(A)$.