Dodatečné úkoly z Lineární algebry I

Př. 1. Dokažte, že soustava $Ax = b$ má řešení právě tehdy když $A^T y = 0,\ b^T y = 1$ nemá řešení.

Př. 2. Buď $B = \{(0, -1, 2)^T,\ (-2, 2, -1)^T,\ (-1, 2, 1)\}$. Najděte bázi B' tak, aby pro každý vektor $x \in \mathbb{R}^3$ platilo $x + [x]_B + [x]_{B'} = o$.

Př. 3. Buďte U, V vektorové prostory nad $\mathbb{T}$. Definujme prostor W nad $\mathbb{T}$ předpisem $W = \{(u, v);\ u \in U,\ v \in V\}$ s operacemi $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$ a $\alpha(u_1, v_1) = (\alpha u_1, \alpha v_1)$. Najděte bázi a určete dimenzi W.

Př. 4. Určete bázi jádra a bázi obrazu lineárního zobrazení $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ definovaného maticí

$$_{B_2}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázím

$$\begin{aligned} B_1 &= \{x^2 + x + 1,\ x^2 + 2,\ x^2 + 3x\}, \\ B_2 &= \{x^2 + 2,\ x^2 - 3x,\ x - 1\}. \end{aligned}$$

Př. 5. Uvažujme lineární zobrazení $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadaná maticemi

$$_B[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad _B[g]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

kde $B = \{(1, 0, -1)^T,\ (1, 1, 0)^T,\ (1, -2, 1)^T\}$. Určete $_{\text{kan}}[f \circ g]_{\text{kan}}$.

Př. 6. Uvažujme lineární zobrazení $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadaná maticemi

$$_B[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad _{\text{kan}}[g]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

kde $B = \{(2, 1, 1)^T,\ (1, 0, 1)^T,\ (0, 0, 1)^T\}$. Určete $_{\text{kan}}[f + g]_{\text{kan}}$.

Př. 7. Uvažme lineární zobrazení $x \mapsto Dx$, kde D je regulární matice řádu n. Buď $o \neq a \in \mathbb{R}^n$ a $b \in \mathbb{R}$. Kam se zobrazí množina $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$, tj. nadrovina v obecné poloze? A co by se stalo, kdyby D nebyla regulární matice?

Př. 8. Buď $v \in \mathbb{R}^n$ dané a uvažme zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ s předpisem $f(x) = v x^T v$.

(a) Ukažte, že f je lineární.

(b) Najděte matici f vzhledem ke kanonické bázi.

(c) Určete jádro a obraz f.

Př. 9. Dokažte, že lineární zobrazení $f\colon U \mapsto V$ je

(a) prosté právě tehdy, když existuje lineární zobrazení $g\colon V \mapsto U$ takové, že $g \circ f = id$ (na U).

(b) „na“ právě tehdy, když existuje lineární zobrazení $g\colon V \mapsto U$ takové, že $f \circ g = id$ (na V).